(b)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}} (2i-1) &= \sum_{i=1}^{\frac{m(m+1)}{2}-\frac{m(m-1)}{2}} \left(2\left(i+\frac{m(m-1)}{2}\right)-1\right) && \text{\textbackslash cambio de índice}\\
&= \sum_{i=1}^{m} (2i+m(m-1)-1)\\
&= \sum_{i=1}^{m} 2i + \sum_{i=1}^{m} m(m-1) - \sum_{i=1}^{m} 1\\
&= 2\sum_{i=1}^{m} i + m(m-1)\sum_{i=1}^{m} 1 - \sum_{i=1}^{m} 1 && \text{\textbackslash las constantes salen}\\
&= 2\cdot\frac{m(m+1)}{2} + m(m-1)m - m && \text{\textbackslash sumas conocidas}\\
&= m^2 + m + m^3 - m^2 - m\\
&= m^3
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})}\cdot\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}(k+1-k)} && \text{\textbackslash racionalizar}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}\\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k(k+1)}} - \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}}\right]\\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right] && \text{\textbackslash telescópica}\\
&= 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}
\end{aligned}$$

P6
- Caso base ($n=1$): $\sum_{k=1}^{2} \frac{1}{1+k} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3} \leq \frac{5}{6}$.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{n+k} \leq \frac{5}{6}$, para cierto $n \geq 1$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n+1$, en efecto
- PDQ $\sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{n+1+k} \leq \frac{5}{6}$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+2}\frac{1}{n+1+k} &= \sum_{k=2}^{n+3}\frac{1}{n+k} && \backslash\text{cambio de índice}\\
&= \sum_{k=2}^{n+3}\frac{1}{n+k}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1} && \backslash\text{sumar 0}\\
&= \sum_{k=1}^{n+3}\frac{1}{n+k}-\frac{1}{n+1} && \backslash\text{incorporar el término } \frac{1}{n+1} \text{ en la sumatoria}\\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+k}+\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1} && \backslash\text{soltar últimos 2 términos}\\
&\leq \frac{5}{6}+\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+2} && \backslash\text{hipótesis inductiva}\\
&= \frac{5}{6}-\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}\\
&\leq \frac{5}{6} && \backslash -\frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \text{ es siempre menor que 0}
\end{aligned}$$

P7 **(a)** $(f*f)(n)=\sum_{k=0}^{n}f(k)f(n-k)=\sum_{k=0}^{n}1\cdot 1=\sum_{k=0}^{n}1=n+1.$

$(f*g)(n)=\sum_{k=0}^{n}f(k)g(n-k)=\sum_{k=0}^{n}1\cdot(n-k)=\sum_{k=0}^{n}n-\sum_{k=0}^{n}k=n\sum_{k=0}^{n}1-\frac{n(n+1)}{2}=n(n+1)-\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}.$

$(g*g)(n)=\sum_{k=0}^{n}g(k)g(n-k)=\sum_{k=0}^{n}k\cdot(n-k)=\sum_{k=0}^{n}nk-\sum_{k=0}^{n}k^2=n\sum_{k=0}^{n}k-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n^2(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(n+1)(n^2-1)}{6}.$

(b) $n!(f*g)(n)=n!\sum_{k=0}^{n}f(k)g(n-k)=n!\sum_{k=0}^{n}\frac{a^k}{k!}\cdot\frac{b^{n-k}}{(n-k)!}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}=(a+b)^n.$

P8 **(a)**
- Caso base $(k=1)$: $H_{2^1}=\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{i}=1+\frac{1}{2}\leq 1+1$.
- Hipótesis inductiva: Supongamos que $H_{2^k}=\sum_{i=1}^{2^k}\frac{1}{i}\leq 1+k$, para cierto $k\geq 1$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n+1$, en efecto

- PDQ $H_{2^{k+1}} = \sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} \leq 1 + k + 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} &= \sum_{i=1}^{2\cdot 2^k} \frac{1}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{2^k+2^k} \frac{1}{i} \\
&= \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} + \sum_{i=1+2^k}^{2^k+2^k} \frac{1}{i} && \backslash\text{separar suma en 2} \\
&= \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i} + \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i+2^k} && \backslash\text{cambio de índice} \\
&\leq 1 + k + \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i+2^k} && \backslash\text{hipótesis inductiva}
\end{aligned}$$

Fijarse que

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i+2^k} = \frac{1}{1+2^k} + \frac{1}{2+2^k} + ... + \frac{1}{2^k+2^k}$$

Pero

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+2^k} &\leq \frac{1}{1+2^k} \\
\frac{1}{2+2^k} &\leq \frac{1}{1+2^k} && \backslash\text{hacer multiplicación cruzada para verlo} \\
&\vdots \\
\frac{1}{2^k+2^k} &\leq \frac{1}{1+2^k}
\end{aligned}$$

Sumando todo queda:

$$\frac{1}{1+2^k} + \frac{1}{2+2^k} + ... + \frac{1}{2^k+2^k} \leq \underbrace{\frac{1}{1+2^k} + \frac{1}{1+2^k} + ... + \frac{1}{1+2^k}}_{2^k \text{ veces}}$$

$$\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i+2^k} \leq \frac{2^k}{2^k+1} \leq 1 \ \backslash\text{multiplicación cruzada para verlo}$$

Retornando a la desigualdad anterior

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{i} &\leq 1 + k + + \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{i+2^k} \\
&\leq 1 + k + 1
\end{aligned}$$

(b) - Caso base ($n = 1$): $\sum_{i=1}^{1} H_i = H_1$, pero $H_1 = \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i} = 1$, luego $H_1 = (1+1)H_1 - 1 = (1+1) - 1 = 1$.

- Hipótesis inductiva: Supongamos que $\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)H_n - n$, para cierto $n \geq 1$. Ahora debemos demostrar que esto es cierto para $n+1$, en efecto
- PDQ $\sum_{i=1}^{n+1} H_i = (n+1+1)H_{n+1} - (n+1)$.

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} H_i &= \sum_{i=1}^{n} H_i + H_{n+1} \\
&= (n+1)H_n - n + H_{n+1} && \backslash\text{hipótesis inductiva} \\
&= (n+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - n + H_{n+1} && \backslash\text{definición de } H_n \\
&= (n+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + 1 - 1 - n + H_{n+1} && \backslash\text{sumar } 0 \\
&= (n+1)\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + \frac{n+1}{n+1} - 1 - n + H_{n+1} && \backslash 1 = \frac{n+1}{n+1} \\
&= (n+1)\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + \frac{1}{n+1}\right] - 1 - n + H_{n+1} \\
&= (n+1)\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} - 1 - n + H_{n+1} && \backslash\text{incorporar } \frac{1}{n+1} \text{ a la sumatoria} \\
&= (n+1)H_{n+1} - 1 - n + H_{n+1} \\
&= (n+2)H_{n+1} - (n+1)
\end{aligned}
$$

9. Semana 8

P1 Expandimos de la doble sumatoria redefiniéndola como sigue

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j:i+j \text{ es par}} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}$$

Tal que $b_{i,j} = a_{i,j}$ si $i+j$ es par y $b_{i,j} = 0$ si $i+j$ es impar, luego tenemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \sum_{j:i+j \text{ es par}} &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{i,j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i:i+j \text{ es par}} b_{i,j} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i:i+j \text{ es impar}} b_{i,j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i:i+j \text{ es par}} a_{i,j}
\end{aligned}$$

P1 Expandimos de la doble sumatoria redefiniéndola como sigue

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j:j=0 \text{ mód } i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}$$

Tal que $b_{i,j} = a_{i,j}$ si j mód i y $b_{i,j} = 0$ si no

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \sum_{j:j=0 \text{ mód } i} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{i,j} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{i,j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i:j \text{ mód } i} b_{i,j} + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i:j \text{ no mód } i} b_{i,j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i:j \text{ mód } i} b_{i,j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i:j=i*k \quad k\in\mathbb{Z}} b_{i,j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i:i \text{ divide a } j} b_{i,j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i:i \text{ divide a } j} a_{i,j}
\end{aligned}$$

P3 Notando que $|A| = \left|\bigcup_{C\in\mathcal{C}} C\right| = \sum_{C\in\mathcal{C}} |C|$. Lo anterior debido a que los conjuntos en $\mathcal{C}$ son disjuntos (una partición de A) y, en consecuencia, usando la proposición 7.11 se concluye lo pedido.

P4 Recordar que las funciones epiyectivas son aquellas que toman todos los elementos del codominio. Dicho esto, supongamos que $|A| = n$, el problema de encontrar funciones epiyectivas es simplemente un problema combinatorial, de los n elementos del dominio, extraigo k de ellos cuya imagens será 1, por otra parte, dado que es epiyectivo, $n-k$ tendrán imagen 0. Extraer k elementos en n es $\binom{n}{k}$ y eso se hace para $k \in \{1, ..., n-1\}$. Dicho esto se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - 2 \\
&= 2^n - 2 \\
&= 2^{|A|} - 2
\end{aligned}$$

P5 a)

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1, i\neq j}^{n} |A_i \cap A_j| \leq \sum_{i=1}^{n} |A_i|$$

Lo último debido a que el cardinal de intersección es siempre mayor o igual que 0

b) $\Leftarrow$

$$\begin{aligned}
\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| &= \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,i\neq j}^{n}|A_i\cap A_j| \\
&= \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,i\neq j}^{n}|\emptyset| \\
&= \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,i\neq j}^{n} 0 \\
&= \sum_{i=1}^{n}|A_i|
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,i\neq j}^{n}|A_i\cap A_j|$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1,i\neq j}^{n}|A_i\cap A_j| = 0$$

$$|A_i\cap A_j| = 0 \quad \forall i,j\in[1,n], i\neq j$$

P6 Probaremos que es biyección, es decir, inyectiva y epiyectiva

- Inyectiva: $\forall x_1,x_2\in\{0,1\}^A\ f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$. En efecto, sean x_1,x_2 funciones arbitrarias que van desde A a $\{0,1\}$, si $f(x_1)=f(x_2)$ quiere decir que $x_1^{-1}(\{1\})=x_2^{-1}(\{1\})=A'$ (Preimágenes iguales), además como x_1 y x_2 son funciones necesariamente $x_1^{-1}(\{0\})=x_2^{-1}(\{0\})=A''$ (notar que $A'\cup A''=A$), por lo que si tomamos un elemento $a\in A'$ tenemos que $x_1(a)=x_2(a)=1$, por otra parte si tomamos un elemento $a\in A''$ tenemos que $x_1(a)=x_2(a)=0$, por lo que las funciones son iguales.
- Epiyectiva $\forall B\in\mathcal{P}(A)\ \exists x\in\{0,1\}^A$ tal que $f(x)=B$, en efecto, dado $B\subseteq A$, si elegimos la función definida como $x:A\to\{0,1\}$ tal que $x(a)=1$ si $a\in B$ y $x(a)=0$ si $a\in A\backslash B$, se tiene que $f(x)=\{a\in A|x(a)=1\}\Leftrightarrow f(x)=x^{-1}(\{1\})=B$

Concluimos que la función f es biyectiva

P7 Primero hay que notar que A es finito, la idea del problema es que la secuencia, que es infinita, va sacando elementos de este conjunto, nos piden demostrar que existirá algún momento en que estos elementos se van a repetir en la secuencia (lo cual es lógico). A modo ilustrativo, pensemos en $A=\{1,2,3,4,5\}$, tomemos una secuencia aleatoria $(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,...)$ $=(2,4,5,3,2,4,1,3,...)$, claramente encontramos $1,5\in\mathbb{N}, 1\neq 5$ tales que $x_1=x_5$ $(4=4)$. La demostración es explicar esto mismo por contradicción, supongamos que para todo

$l, j \in \mathbb{N}, l \neq j$ $x_j \neq x_l$, pero A tiene n elementos y la secuencia es infinita, luego es imposible que no se repitan, entonces se concluye por contradicción que hay $l, j \in \mathbb{N}, l \neq j$ tales que $x_j = x_l$.