

## Pauta Guía Problemas Semana 8

Profesor: Jorge San Martín H.

Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

**P1.** Probar que  $\inf \left\{ \frac{1}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} = 0$

**Solución**

Llamemos  $A$  al conjunto bajo estudio. Comprobaremos que 0 cumple las dos propiedades del ínfimo, es decir

- (a) 0 es cota inferior de  $A$ .
- (b) Cualquier otra cota inferior de  $A$  es menor que 0.

Veamos cada propiedad por separado.

- (a) Por definición, 0 es cota inferior de  $A$  ssi  $(\forall x \in A) 0 \leq x$ . En efecto, los elementos de  $A$  son de la forma  $\frac{1}{2n+1}$ , con  $n \in \mathbb{N}$ . Notemos que 1 y  $2n+1$  son estrictamente positivos para todo  $n$  natural, por lo tanto también su cociente, y entonces tenemos que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \frac{1}{2n+1} \geq 0$ . De esto se sigue que 0 es cota inferior de  $A$ .
- (b) Ahora probaremos que ningún número positivo puede ser cota inferior de  $A$ , es decir, mostraremos que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists m \in \mathbb{N}) \quad \frac{1}{2m+1} < \varepsilon.$$

En efecto, dado  $\varepsilon > 0$ , por la Propiedad Arquimediana,  $\exists m \in \mathbb{N}$  tal que  $1 < m\varepsilon$ . Notemos que  $1 < m\varepsilon < 2m\varepsilon < 2m\varepsilon + \varepsilon = \varepsilon(2m+1)$ , desigualdades válidas pues todas las cantidades involucradas son estrictamente positivas. Obtenemos que

$$1 < \varepsilon(2m+1) \iff \frac{1}{2m+1} < \varepsilon.$$

Hemos demostrado que ningún número positivo puede ser cota inferior de  $A$ , pues dado cualquiera, hay un elemento en  $A$  menor que éste. Por lo tanto, cualquier cota inferior  $c$  de  $A$  debe cumplir que  $c \leq 0$ .

De todo lo anterior, concluimos que 0 es el ínfimo de  $A$ . ■

**P2.** Sea  $f$  una función creciente cuyo dominio es el intervalo  $[0, 1]$ . Demuestre que el conjunto  $f([0, 1])$  es acotado superiormente. Calcule el supremo del conjunto  $f([0, 1])$  y determine si posee máximo.

**Solución**

Por hipótesis tenemos que  $f$  es creciente, y de la definición tenemos que

$$(\forall x_1, x_2 \in \text{Dom } f) \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2).$$

Tomando  $x_2 = 1$  (pues la propiedad debe cumplirse para cualquier  $x_2$ ), tenemos que

$$(\forall x \in \text{Dom } f) \quad x \leq 1 \Rightarrow f(x) \leq f(1).$$

Notemos que el lado izquierdo de la implicación siempre es verdadero, por lo que ha de tenerse que

$$(\forall x \in [0, 1]) \quad f(x) \leq f(1).$$

Y con esto  $f([0, 1])$  es acotado superiormente por  $f(1)$ . Luego, por axioma del supremo,  $f([0, 1])$  tiene supremo. Notemos que  $f(1) \in f([0, 1])$ . Entonces,  $f(1)$  es el máximo del conjunto  $f([0, 1])$  y por lo tanto su supremo. ■

**P3.** Dados  $a$  y  $b$  reales, demuestre que si para cualquier  $\varepsilon > 0$  se cumple que  $a \leq b + \varepsilon$ , entonces  $a \leq b$ .

**Solución**

Sabemos que

$$\begin{aligned} & (\forall \varepsilon > 0) \quad a \leq b + \varepsilon \\ \iff & (\forall \varepsilon > 0) \quad a - b \leq \varepsilon \\ \iff & (\forall \varepsilon \in (0, +\infty)) \quad a - b \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

De donde concluimos que  $a - b$  es cota inferior de  $(0, +\infty)$ .

Por otra parte, sabemos que  $\inf(0, +\infty) = 0$ , y por definición de ínfimo, cualquier cota inferior de  $(0, +\infty)$  debe ser menor o igual que él, en particular, tenemos que

$$a - b \leq 0 \iff a \leq b. \blacksquare$$

**P4.** Sean  $S$  y  $T$  subconjuntos no vacíos de  $\mathbb{R}$  tales que para todo  $x \in S$  y para todo  $y \in T$   $x \leq y$ . Probar que  $S$  tiene supremo, que  $T$  tiene ínfimo, y que  $\sup S \leq \inf T$ .

**Solución**

Sabemos que  $(\forall x \in S)(\forall y \in T) \quad x \leq y$ . Mirando la segunda parte de la proposición, tenemos que

$$(\forall y \in T) \quad x \leq y.$$

Lo que nos dice que  $T$  es acotado inferiormente (por cualquier elemento de  $S$ ). Por lo tanto, por Axioma del Supremo,  $T$  tiene ínfimo. Además, por definición de ínfimo, se debe tener que

$$(\forall x \in S) \quad x \leq \inf T.$$

Lo que prueba que  $S$  es acotado superiormente. Nuevamente, por Axioma del Supremo, tenemos que  $S$  tiene supremo, y además, por definición de supremo tenemos que

$$\sup S \leq \inf T. \blacksquare$$

**P5.** Sean  $A$  y  $B$  subconjuntos no vacíos de  $\mathbb{R}$ , los cuales verifican las siguientes propiedades:

(a)  $A \cup B = \mathbb{R}$

(b) Todo elemento de  $A$  es menor que todo elemento de  $B$

Demuestre que existe un real  $\alpha$  que es simultáneamente cota superior de  $A$  y cota inferior de  $B$ . Pruebe, además, que dicho número real  $\alpha$  es único.

**Solución**

En el problema anterior hemos probado que si un par de subconjuntos  $A, B$  no vacíos de  $\mathbb{R}$  satisfacen la condición (b), entonces  $\sup A \leq \inf B$ . Veamos que no puede ser que  $\sup A < \inf B$ .

En efecto, si esto fuera cierto, por densidad de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathbb{R}$ ,  $\exists q \in \mathbb{Q}$  tal que  $\sup A < q < \inf B$ , lo que implica que  $q \notin A \wedge q \notin B$ . Luego,  $q \notin A \cup B$  y por lo tanto  $A \cup B \subsetneq \mathbb{R}$ , lo que contradice (a). Concluimos que  $\sup A = \inf B$ . Llamando  $\alpha = \sup A = \inf B$ , tenemos que  $\alpha$  es simultáneamente cota superior de  $A$  (la menor) y cota inferior de  $B$  (la mayor), además como es un supremo, es único.

**P6.** Sean  $A, B, C$  subconjuntos de  $\mathbb{R}$  no vacíos y acotados. Pruebe que si para todo  $x \in A$  y todo  $y \in B$  existe  $z \in C$  tal que  $x + y \leq z$ , entonces  $\sup A + \sup B \leq \sup C$ .  $\blacksquare$

**Solución**

Consideremos el conjunto

$$A + B = \{x + y \in \mathbb{R} : x \in A, y \in B\}.$$

Entonces, sabemos que

$$(\forall u \in A + B)(\exists z \in C) \quad u \leq z.$$

Lo que prueba  $A + B$  es acotado superiormente y, por Axioma del Supremo,  $A + B$  tiene supremo. Además, tenemos que como  $C$  es acotado, posee supremo. Por definición de supremo, tenemos que  $(\forall z \in C) \quad z \leq \sup C$ , y por lo tanto

$$(\forall u \in A + B) \quad u \leq \sup C.$$

De donde concluimos que  $\sup C$  es cota superior de  $A + B$ , y por definición de supremo nuevamente

$$\sup A + B \leq \sup C$$

Notando que  $\sup A + B = \sup A + \sup B$  concluimos que

$$\sup A + \sup B \leq \sup C. \blacksquare$$

**P7.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  un conjunto acotado superiormente y tal que su complemento es acotado inferiormente. Muestre que  $\inf A^c = \sup A$  si y sólo si  $A = (-\infty, a]$  o  $A = (-\infty, a)$  con  $a \in \mathbb{R}$ .

**Solución**

Demostremos la doble implicancia, para  $A = (-\infty, a)$ . El caso en que  $A = (-\infty, a]$  es completamente análogo y se deja como ejercicio al lector.

- $\Leftarrow$ ) Como sabemos que  $A = (-\infty, a)$ , con  $a \in \mathbb{R}$ , entonces  $A$  es acotado superiormente, por Axioma del Supremo,  $A$  posee supremo y, de hecho,  $\sup A = a$ . Además, como  $A^c = [a, +\infty)$ ,  $A^c$  es acotado inferiormente y por Axioma del Supremo nuevamente,  $A^c$  posee ínfimo y además  $\inf A^c = a$ .

Esto prueba que  $\sup A = \inf A^c$ .

- $\Rightarrow$ ) Razonemos por contradicción. Sea  $a = \sup A$  que existe por ser  $A$  acotado superiormente. Supongamos que  $A \neq (-\infty, a)$ . Entonces, el intervalo  $(-\infty, a)$  tiene por lo menos un punto que no está en  $A$ , digamos  $b$ . Notemos que no puede ser que  $b \geq a$ , pues en este caso  $A = (-\infty, a) \setminus \{b\} = (-\infty, a)$  lo que es una contradicción con nuestro supuesto, de donde concluimos que  $b < a$ .

Luego,  $A^c = \{b\} \cup [a, +\infty)$  que es acotado inferiormente, lo que implica que  $\inf A^c = b < a = \sup A$ , lo que contradice el hecho que  $\inf A^c = \sup A$ . ■