Departamento de Ingeniería Matemática
Fac. Cs. Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

Control 3, MA12A, Otoño 1996

Problema 1. Calcule el límite de las siguientes sucesiones

1. **(1.5 pts.)** $U_n = \frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}$, $0 < a \leq b$. Distinga los casos $a = b$ y $a < b$.
2. **(1.5 pts.)** $U_n = (1 - \frac{1}{n-2})^{n+4}$.
3. **(1.5 pts.)** $U_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}$.
4. **(1.5 pts.)** $U_n = \frac{n - sen(n)}{n^2-16}$.

Problema 2.
Sean (a_n) y (b_n) sucesiones definidas por la recurrencia

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

$$b_{n+1} = \frac{b_0}{a_0}\sqrt{a_n b_n}$$

con $a_0 > b_0 > 0$.

1. **(2.0 pts.)** Pruebe que (a_n) es decreciente. Concluya que (b_n) es decreciente.
2. **(2.0 pts.)** Muestre que (a_n) y (b_n) son acotadas inferiormente. Concluya que (a_n) y (b_n) son convergentes.
3. **(2.0 pts.)** Calcule los límites de (a_n) y (b_n).

Ind: Para probar que (a_n) es decreciente muestre que $\forall n \ \ \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Para ello observe que $\frac{b_n}{a_n} = \frac{b_0}{a_0}$.

Problema 3.

1. Analice la convergencia de las siguientes sucesiones, estudiando sus puntos de acumulación.
   (a) **(1.0 pto.)** $(1 + \frac{1}{n})^{(-1)^n n}$.
   (b) **(1.0 pto.)** $cos(\frac{n\pi}{2})$.
   (c) **(1.0 pto.)** $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k$.
2. **(3.0 pts.)** Sea (U_n) creciente y a un punto de acumulación. Pruebe que (U_n) es convergente y que $\lim U_n = a$.

   Ind: Muestre que a es cota superior de (U_n).

Departamento de Ingeniería Matemática
Fac. Cs. Físicas y Matemáticas
Universidad de Chile

Pauta Control 3, MA12A, Otoño 1996

Problema 1. Calcule el límite de las siguientes sucesiones

1. **(1.5 pts.)** $U_n = \frac{a^n+b^n}{a^{n+1}+b^{n+1}}$, $0 < a \leq b$. Distinga los casos $a = b$ y $a < b$. Para el caso $a = b$ la sucesión es constante igual a $\frac{1}{a}$. Luego, su límite es $\frac{1}{a}$. En el caso $a < b$ dividamos por b^n en el numerador y en el denominador. Entonces, se obtiene que $U_n = \frac{(\frac{a}{b})^n+1}{a(\frac{a}{b})^n+b}$. Como el límite de $(\frac{a}{b})^n$ es cero se concluye que el l'ımite de U_n es $\frac{1}{b}$.

2. **(1.5 pts.)** $U_n = (1 - \frac{1}{n-2})^{n+4}$.

   La sucesión U_n se puede escribir como el producto de la sucesión $(1 - \frac{1}{n-2})^{n-2}$ y la sucesión $(1 - \frac{1}{n-2})^6$. La primera es una subsucesión de la sucesión $(1 - \frac{1}{n})^n$ que converge a e^-1. La segunda es una potencia de una sucesión que converge a 1. Aplicando el álgebra de límites concluimos que U_n converge a e^{-1}.

3. **(1.5 pts.)** $U_n = \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$.

   Racionalizando, se obtiene que $U_n = \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}$. Como el límite de la sucesión $\frac{1}{\sqrt{n}}$ es cero, se concluye que el límite de U_n es 1.

4. **(1.5 pts.)** $U_n = \frac{n-sen(n)}{n^2-16}$.

   Separamos la sucesión en la diferencia de dos sucesión: $\frac{n}{n^2-16}$ y $\frac{sen(n)}{n^2-16}$. La primera es convergente a cero y la segunda es el producto de una sucesión acotada por una que converge a cero, y por lo tanto converge a cero. Así, U_n converge a cero.

Problema 2.

Sean (a_n) y (b_n) sucesiones definidas por la recurrencia

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

$$b_{n+1} = \frac{b_0}{a_0}\sqrt{a_n b_n}$$

con $a_0 > b_0 > 0$.

1. **(2.0 pts.)** Pruebe que (a_n) es decreciente. Concluya que (b_n) es decreciente.

   Claramente, $b_{n+1} = \frac{b_0}{a_0}\sqrt{a_n b_n} = \frac{b_0}{a_0}a_{n+1}$ y entonces $\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{b_0}{a_0}$.

   Calculemos $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{a_n b_n}}{a_n} = \sqrt{\frac{b_n}{a_n}} = \sqrt{\frac{b_0}{a_0}} < 1$. Así, (a_n) es decreciente. Además, $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ y entonces (b_n) es decreciente.

2. **(2.0 pts.)** Muestre que (a_n) y (b_n) son acotadas inferiormente. Concluya que (a_n) y (b_n) son convergentes.

   Todos los términos de (a_n) y (b_n) son positivos de modo que ambas sucesiones están acotadas inferiormente por 0. Por lo tanto, ambas convergen a límites a y b respectivamente.

3. **(2.0 pts.)** Calcule los límites de (a_n) y (b_n).

   Usando la relaciónde recurrencia tenemos que a y b satisfacen:

   $$a = \sqrt{ab} \qquad b = \frac{b_0}{a_0}\sqrt{ab}$$

   La primera igualdad tiene como solución $a = 0$ o $a = b$. Si $a = 0$ entonces de la segunda ecuación sabemos que $b = 0$. Si $a = b$ de la segunda ecuación sabemos que $b = \frac{b_0}{a_0}b$ y por lo tanto $a = b = 0$. Así, la única solución es $a = b = 0$.

Ind: Para probar que (a_n) es decreciente muestre que $\forall n \;\; \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$. Para ello observe que $\frac{b_n}{a_n} = \frac{b_0}{a_0}$.

Problema 3.

1. Analice la convergencia de las siguientes sucesiones, estudiando sus puntos de acumulación.

   (a) **(1.0 pto.)** $(1 + \frac{1}{n})^{(-1)^n n}$.

   La subsucesión $(1 + \frac{1}{2n})^{(-1)^{2n} 2n}$ converge a e y la subsucesión $(1 + \frac{1}{2n+1})^{(-1)^{2n+1} 2n+1}$ converge a e^{-1}. Por lo tanto la sucesión no converge.

   (b) **(1.0 pto.)** $cos(\frac{n\pi}{2})$.

   La subsucesión $cos(\frac{(4n)\pi}{2})$ es la sucesión constante igual a 1. La subsucesión $cos(\frac{(2n+1)\pi}{2}) = cos(n\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$, por lo que su límite es cero. La subsucesión $cos(\frac{(4n+2)\pi}{2}) = cos(\pi) = -1$, y entonces convergente a -1. Teniendo tres puntos de acumulación la sucesión no converge.

   (c) **(1.0 pto.)** $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k$.

   Para n pares la suma anterior es 1 y para n impares es 0. Luego la sucesión admite a 1 y 0 como puntos de acumulación y entonces no converge.

2. (**3.0 pts.**) Sea (U_n) creciente y a un punto de acumulación. Pruebe que (U_n) es convergente y que $\lim U_n = a$.

   Veamos que a es cota superior. Supongamos que existe un n tal que $U_n > a$. Entonces como la sucesión es creciente, $\forall m \geq n \ U_m > a$. y a no puede ser un punto de acumulación. Así, U_n converge pues es acotada superiormente y creciente.

   Probemos ahora que $\lim U_n = a$. Sea $\epsilon > 0$. Como a es punto de acumulación, dado $m = 1$ existe un $n_0 \geq 1$ tal que $|U_{n_0} - a| < \epsilon$. Pero la sucesión es creciente y acotada superiormente por a entonces, $\forall n \geq n_0 \ |U_n - a| < |U_{n_0} - a| < \epsilon$, es decir, U_n converge a a.

   Ind: Muestre que a es cota superior de (U_n).

Departamento de Ingeniería Matemática

Universidad de Chile

CONTROL 3 CALCULO, MA - 12 A, 1997

Problema 1.- Analizar la convergencia de las siguientes sucesiones.

1. (1.5 pts.) $\left(\frac{n^3}{2n^2+1} - \frac{n^2}{2n+1}\right)^{\frac{1}{n}}$
2. (1.5 pts.) $\left(\frac{4n+\frac{1}{3}}{4n+1}\right)^n$
3. (1.5 pts.) $\left(\frac{(a+b)^n-(a-b)^n}{a^n+b^n}\right)$, con $a > b > 0$.
4. (1.5 pts.) $\frac{(-n)^{n+1}}{(n+1)^n}$

Problema 2.-

Considere la sucesión (s_n) definida por la recurrencia

$$s_{n+1} = \sqrt{\frac{a^3 + s_n^2}{a+1}}$$

con $a > 0$ y $s_1 = a$.

1. (2.0 pts.) Demuestre, usando inducción, que $\forall n \in \mathbb{N} \;\; s_n \geq a$.
2. (2.0 pts.) Muestre que (s_n) es decreciente y concluya que su límite existe.
3. (2.0 pts.) Calcule este límite.

Problema 3.-

1. (2.0 pts.) Sea $h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ una función que satisface
$$h(x \cdot y) = h(x) + h(y)$$
Muestre que si h es continua en $x = 1$ entonces es continua en todo punto de su dominio. (ind: Demuestre que $h(1) = 0$).
2. Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos funciones que satisfacen la relación
$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad f(x) \geq f(y) + g(y)(y - x)$$
   (a) (1.0 pto.) Muestre que:
   $$\forall x, y \in \mathbb{R} : \quad g(x)(y - x) \geq f(x) - f(y) \geq g(y)(y - x)$$
   (b) (1.5 pts.) Probar que si g es una función acotada entonces f es continua en todo $\mathbb{R}$.
   (c) (1.5 pts.) Probar que si g es continua en a y a_n es una sucesión que converge a a, $a_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces,
   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{f(a_n) - f(a)}{a_n - a}$$
   existe y vale $-g(a)$.

Tiempo: 3 horas
Sin Consultas

CONTROL 3

MA12A CALCULO 1999

Problema 1.

1. (2.0 pto.) Estudiar la convergencia de la sucesión $\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^n$.

2. (2.0 pto.) Estudiar la convergencia de la sucesión $\frac{(-n)^n}{(n-1)^{n+1}}$.

3. (2.0 pto.) Dados a, b, c reales positivos resolver la ecuación

$$\log_{x^2} a + \log_x b = c.$$

Problema 2.

1. Considerar la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} xsen\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

   (a) (1.5 pts.) Estudiar la continuidad de f para $x \neq 0$.

   (b) (1.5 pts.) Demostrar, usando la **definición de continuidad**, que f es continua en $x = 0$.

2. Sea (a_n) una sucesión creciente que admite un punto de acumulación α.

   (a) (1.5 pts.) Probar que α es una cota superior de (a_n).

   (b) (1.5 pts.) Demostrar que (a_n) converge a α.

Problema 3.

1. (3.0 pts.) Demostrar, utilizando el Teorema del Valor Intermedio que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que

$$x^{179} + \frac{163}{1 + x^2 + sen^2(x)} = 119.$$

2. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Para $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ se define

$$g(x) = f\left(x + \frac{1}{k}\right) - f(x).$$

   (a) (1.0 pto.) Demostrar que $\sum\limits_{i=0}^{k-1} g\left(\frac{i}{k}\right) = f(1) - f(0)$.

   (b) (0.5 pts.) Si $\forall x \in \left[0, 1 - \frac{1}{k}\right]$, $g(x) > 0$ demostrar que $f(1) > f(0)$.

   (c) (0.5 pts.) Si $\forall x \in \left[0, 1 - \frac{1}{k}\right]$, $g(x) < 0$ demostrar que $f(1) < f(0)$.

   (d) (1.0 pto.) Si $f(1) = f(0)$ demostrar que existe $x \in \left[0, 1 - \frac{1}{k}\right]$ tal que $f(x) = f\left(x + \frac{1}{k}\right)$.

Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 8 de Junio del 2000.

CONTROL 3

Parte MA12A CALCULO 2000

Problema 1.

a) Dado $\alpha \in (0,1)$ se define la sucesión (a_n) mediante la recurrencia $a_1 = \alpha$ y $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}}$.

  i) (2.0 pts.) Demostrar que $\forall n \geq 1$, $0 < a_n < 1$.

  ii) (2.0 pts.) Demostrar que (a_n) converge y calcular su límite.

b) (2.0 pts.) Dada la sucesión convergente (s_n), se define la sucesión (u_n) por $u_n = (-1)^n s_n$. Probar que (u_n) converge si y sólo si (s_n) converge a cero.

Problema 2. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones y calcular sus límites, cuando éstos existan.

a) $\frac{\text{sen}(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}$ b) $n\text{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ c) $\sqrt{n^6+n^3} - \sqrt{n^6-n^2}$

d) $\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n$ e) $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ f) $\frac{1-(-1)^n n}{4n+1}$

(Cada parte vale un punto).

Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 8 de Junio del 2000.

Pauta CONTROL 3

Parte MA12A CALCULO 2000

Problema 1.

a) Dado $\alpha \in (0,1)$ se define la sucesión (a_n) mediante la recurrencia $a_1 = \alpha$ y $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}}$.

i) (2.0 pts.) Demostrar que $\forall n \geq 1$, $0 < a_n < 1$.

solución:
Aplicando inducción tenemos que $a_o = \alpha \in (0,1)$ (0.5 pts.). Si $a_n \in (0,1)$ entonces $0 < a_n < \frac{1+a_n}{2} < 1$ (0.5 pts). Como $\sqrt{}$ es est. creciente (0.5 pts.) tenemos que $0 = \sqrt{0} < \sqrt{a_n} < a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}} < \sqrt{1} = 1$ (0.5 pts.).

ii) (2.0 pts.) Demostrar que (a_n) converge y calcular su límite.

solución:
Veamos que (a_n) es creciente. Como $\frac{1+a_n}{2} \in (0,1)$ tenemos que $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1+a_n}{2}} > \frac{1+a_n}{2}$ (0.5 pts.) y además $a_n < 1$ entonces $\frac{1+a_n}{2} > a_n$. Concluimos que $a_{n+1} > a_n$ (0.5 pts.).
Tenemos que (a_n) es creciente y acotada superiormente por 1. Entonces, el Teorema de las Sucesiones Monótonas garantiza que (a_n) converge (0.5 pts.).
Como (a_{n+1}) converge a l y $\sqrt{\frac{1+a_n}{2}}$converge a $\sqrt{\frac{1+l}{2}}$ tenemos que el límite de (a_n) debe satisfacer la ecuación $l = \sqrt{\frac{1+l}{2}}$. La única solución no negativa de ésta es $l = 1$. Concluimos que el límite es $l = 1$ (0.5 pts).

b) (2.0 pts.) Dada la sucesión convergente (s_n), se define la sucesión (u_n) por $u_n = (-1)^n s_n$. Probar que (u_n) converge si y sólo si (s_n) converge a cero.
solución:
Si $(s_n) \to 0$ entonces $(-1)^n s_n \to 0$ pues $|(-1)^n s_n| = |s_n| \to 0$ (1.0 pto.).
Si llamamos v al límite de la sucesión (s_n) tenemos que $(u_{2n}) = (s_{2n}) \to v$ y $(u_{2n+1}) = (-s_{2n+1}) \to -v$ (0.5 pto.).
Si (u_n) converge, toda subsucesión lo debe hacer al mismo límite. Entonces $v = -v$ lo que implica que $v = 0$ (0.5 pts.).

Problema 2.

1. La sucesión $(\operatorname{sen}(\sqrt{n}))$ es acotada <u>(0.5 pts.)</u> y la sucesión $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \to 0$ <u>(0.5 pts.)</u>. Entonces, $\left(\frac{\operatorname{sen}(\sqrt{n})}{\sqrt{n}}\right) \to 0$.

2. Sabemos que $\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}\right) \to 1$ <u>(0.5 pts.)</u>. Además, $\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ entonces $\left(\frac{1}{n}\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}\right) = \left(n\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \to 0$ <u>(0.5 pts.)</u>.

3. $\sqrt{n^6+n^3} - \sqrt{n^6-n^2} = \frac{n^6+n^3-\left(n^6-n^2\right)}{\sqrt{n^6+n^3}+\sqrt{n^6-n^2}} = \frac{n^3+n^2}{\sqrt{n^6+n^3}+\sqrt{n^6-n^2}} = \frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1-\frac{1}{n^4}}}$ <u>(0.4 pts.)</u>
   Las sucesiones $1+\frac{1}{n}$, $1+\frac{1}{n^3}$, $1+\frac{1}{n^4} \to 1$ <u>(0.2 pts.)</u>. Entonces $\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}$, $\sqrt{1-\frac{1}{n^4}} \to 1$ <u>(0.2 pts.)</u> y concluimos que la sucesión converge a $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$<u>(0.2 pts.)</u>.

4. $\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n$<u>(0.3 pts.)</u>. $\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n = \left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)$ <u>(0.3 pts)</u>. $\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{2}{n-1}\right) \to e^2 \cdot 1 = e^2$ <u>(0.4 pts.)</u>

5. $\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{n!n!}{n!\prod\limits_{i=n+1}^{2n} i} = \prod\limits_{i=1}^{n} \frac{i}{(n+i)}$ <u>(0.3 pts.)</u>. Como $\frac{i}{n+i} < 1$ para $i = 1, ..., n$ tenemos que $0 < \frac{(n!)^2}{(2n)!} < \frac{1}{n+1}$<u>(0.4 pts.)</u>. Las sucesiones de los extremos convergen a cero de modo que el Teorema del Sandwich asegura que la sucesión encajonada converge a cero <u>(0.3 pts.)</u>.

6. $a_n = \frac{1-(-1)^n n}{4n+1}$. Si tomamos las subsucesiones (a_{2n}) y (a_{2n+1}) tenemos que $a_{2n} = \frac{1-2n}{8n+1} \to -\frac{1}{4}$ y que $a_{2n+1} = \frac{1-(-1)(2n+1)}{4(2n+1)+1} = \frac{2n+2}{8n+5} \to \frac{1}{4}$ <u>(0.5 pts.)</u>. Siendo estos límites distintos, se concluye que (a_n) no converge <u>(0.5 pts.)</u>.

Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 21 de Junio del 2001. Tiempo: 3:00 hrs.

CONTROL 3

MA12A CALCULO 2001

Problema 1. Sea (a_n) una sucesión decreciente y convergente a 0. Se define la sucesión

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

(a) (1.5 pts.) Pruebe que (s_{2n}) es decreciente.

(b) (1.5 pts.) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \geq n$, $0 \leq s_{2n} - s_{2m} \leq a_{2n}$.

(c) (1.5 pts.) A partir de lo anterior, deduzca que (s_{2n}) satisface el criterio de Cauchy.

(d) (1.5 pts.) Usando (c), pruebe que (s_{2n+1}) es convergente y concluya que (s_n) converge.

Problema 2.

(a) (1.0 pto.) Sea $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\bar{x} = 0$ y tal que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $h\left(\frac{1}{n}\right) > 0$. Demuestre que $h(0)$ no puede ser estrictamente negativo.

(b) (2.5 pts.) Sea $g\colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función que satisface $g(x \cdot y) = g(x) + g(y)$. Demuestre que si g es continua en $\bar{x} = 1$ entonces g es continua en todo su dominio.
Indicación: demuestre primero que $g(1) = 0$.

(c) (2.5 pts.) Sean $h, g\colon [0,1] \to [0,1]$ continuas con $h(0) = 0$ y $g(1) = 0$. Demuestre que existe $c \in [0,1]$ tal que $h(c) = g(c)$.

Problema 3. Dado $a \geq 0$, sea $f_a(x) = ax^3 + x - 1$.

(a) (3 pts.) Demuestre la existencia y unicidad de $z \in [0,1]$ tal que $f_a(z) = 0$.

(b) (3 pts.) Sea $g\colon [0, \infty) \to [0,1]$ la función que a cada $a \geq 0$ le asocia la solución $z \in [0,1]$ de la ecuación $f_a(z) = 0$. Pruebe que g es continua.

Indicación: puede ser útil demostrar que si

$$\begin{aligned} au^3 + u - 1 &= 0 \\ bv^3 + v - 1 &= 0 \end{aligned}$$

con $a, b \geq 0$, entonces

$$[b(u^2 + uv + v^2) + 1](u - v) = u^3(b - a).$$

Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 21 de Junio del 2001. Tiempo: 3:00 hrs.

PAUTA CONTROL 3

MA12A CALCULO 2001

Problema 1. Sea (a_n) una sucesión decreciente y convergente a 0. Se define la sucesión

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$$

(a) (1.5 pts.) Pruebe que (s_{2n}) es decreciente.

(b) (1.5 pts.) Pruebe que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m \geq n$, $0 \leq s_{2n} - s_{2m} \leq a_{2n}$.

(c) (1.5 pts.) A partir de lo anterior, deduzca que (s_{2n}) satisface el criterio de Cauchy.

(d) (1.5 pts.) Usando (c), pruebe que (s_{2n+1}) es convergente y concluya que (s_n) converge.

Solución:

(a) Tenemos que

(0.5 pts.) $$s_{2n+2} - s_{2n} = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} = -a_{2n+1} + a_{2n+2}$$

Como (a_n) es decreciente, en particular $a_{2n+2} \leq a_{2n+1}$ **(0.5 pts.)**. Luego $s_{2n+2} - s_{2n} \leq 0$, es decir, (s_{2n}) es decreciente **(0.5 pts.)**.

(b) Sean $n, m \in \mathbb{N}$ con $m > n$ (el caso $m = n$ es trivial). Como (s_{2k}) es decreciente, se tiene que $s_{2m} \leq s_{2n}$ de modo que $0 \leq s_{2n} - s_{2m}$ **(0.2 pts.)**. Por otra parte,

(0.3 pts.) $$s_{2n} - s_{2m} = \sum_{k=2n+1}^{2m} (-1)^{k+1} a_k = a_{2n+1} - a_{2n+2} + \ldots + a_{2m-1} - a_{2m}$$

Sumando y restando a_{2n} al lado derecho y agrupando se obtiene

(0.4 pts.) $$s_{2n} - s_{2m} = a_{2n} + (-a_{2n} + a_{2n+1}) + \ldots + (-a_{2m-2} + a_{2m-1}) - a_{2m}$$

Como (a_n) es decreciente, se tiene que $\forall k \in \mathbb{N}$, $-a_{2k} + a_{2k+1} \leq 0$, razón por la cual todos los términos entre paréntesis son inferiores o iguales a 0 **(0.3 pts.)**. Más aún, (a_n) decrece a 0 por lo que $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y en particular $-a_{2m} \leq 0$ y en conclusión $s_{2n} - s_{2m} \leq a_{2n}$ **(0.3 pts.)**.

(c) Como $a_n \to 0$ y $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $0 \leq a_n < \varepsilon$ **(0.3 pts.)**. En particular, si $n \geq n_0$ entonces $2n \geq n \geq n_0$ y en consecuencia $a_{2n} < \varepsilon$ **(0.3 pts.)**. Luego, si $m \geq n \geq n_0$ entonces de la parte (b) se deduce que $0 \leq s_{2n} - s_{2m} \leq a_{2n} < \varepsilon$ **(0.4 pts.)**. Luego, hemos probado que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall m \geq n \geq n_0$, $|s_{2n} - s_{2m}| = s_{2n} - s_{2m} < \varepsilon$, que es el criterio de Cauchy **(0.4 pts.)**.

(d) Tenemos que $s_{2n+1} = s_{2n} - a_{2n+1}$ **(0.2 pts.)**. Como (s_{2n}) es de Cauchy, por teorema visto en clases se sigue que es convergente a un límite que denotamos $\bar{s}$ **(0.3 pts.)**. Pero (a_n) converge a 0, de modo que la subsucesión (a_{2n+1}) también converge a 0 **(0.3 pts.)**. Por álgebra de límites, se sigue que $\lim s_{2n+1} = \lim s_{2n} - \lim a_{2n+1} = \bar{s} - 0 = \bar{s}$ **(0.3 pts.)**. Para concluir que (s_n) converge, observamos primero que todo $n \in \mathbb{N}$ es de la forma $n = 2k$ o bien $n = 2k+1$ para un único $k \in \mathbb{N}$. Luego verificamos la definición de $s_n \to 0$: dado $\varepsilon > 0$ sabemos que existen $k_0, k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall k \geq k_0$, $|s_{2k} - \bar{s}| < \varepsilon$ y $\forall k \geq k_1$, $|s_{2k+1} - \bar{s}| < \varepsilon$. Tomando $k_2 = \max\{k_0, k_1\}$ se deduce que $\forall n \geq 2k_2 + 1$, $|s_n - \bar{s}| < \varepsilon$ **(0.4 pts.)**.

Problema 2.

(a) (1.0 pto.) Sea $h \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\bar{x} = 0$ y tal que $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $h\left(\frac{1}{n}\right) > 0$. Demuestre que $h(0)$ no puede ser estrictamente negativo.

(b) (2.5 pts.) Sea $g \colon (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función que satisface $g(x \cdot y) = g(x) + g(y)$. Demuestre que si g es continua en $\bar{x} = 1$ entonces g es continua en todo su dominio.
Indicación: demuestre primero que $g(1) = 0$.

(c) (2.5 pts.) Sean $h, g \colon [0,1] \to [0,1]$ continuas con $h(0) = 0$ y $g(1) = 0$. Demuestre que existe $c \in [0,1]$ tal que $h(c) = g(c)$.

Solución:

(a) La sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ converge a cero. La continuidad de h en cero implica que $h\left(\frac{1}{n}\right) \to h(0)$. **(0.5 pts.)** La condición del problema dice que la sucesión $h\left(\frac{1}{n}\right)$ es acotada inferiormente por cero, por lo que su límite $h(0)$, debe ser mayor o igual a cero **(0.5 pts.)**.

(b) Probemos dos propiedades de g. Primero, $g(1) = g(1 \cdot 1) = g(1) + g(1)$, luego $g(1) = 0$ **(0.5 pts.)**. Segundo, $0 = g(1) = g\left(\overline{x} \cdot \frac{1}{\overline{x}}\right) = g(\overline{x}) + g\left(\frac{1}{\overline{x}}\right)$, con lo que $g\left(\frac{1}{\overline{x}}\right) = -g(\overline{x})$ **(0.5 pts.)**. Supongamos que g es continua en $\overline{x} = 1$ y probemos que g es continua en todo $a \in (0, +\infty)$. Para ello sea $(a_n) \to a$, con $a_n \in (0, +\infty)$. Entonces, $\left(\frac{a_n}{a}\right) \to 1$ **(0.5 pts.)**. Como g es continua en 1, se tiene que $g\left(\frac{a_n}{a}\right) \to g(1) = 0$ **(0.5 pts.)**, luego $g(a_n) = g(a_n) - g(a) + g(a) = g\left(\frac{a_n}{a}\right) + g(a) \to g(a)$, probando que g es continua en 1 **(0.5 pts.)**.

(c) Consideremos la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = g(x) - h(x)$ **(0.5 pts.)**. Como g y h son continuas en $[0,1]$ por álgebra de funciones continuas sabemos que $g - h$ es una función continua en $[0,1]$ **(0.5 pts.)**. Usando los valores $g(1) = 0$ y $h(0) = 0$, y el hecho que $h[0,1] \subseteq [0,1]$ y $g[0,1] \subseteq [0,1]$ tenemos que $f(0) = g(0) - h(0) = g(0) \geq 0$ **(0.5 pts.)** y que $f(1) = g(1) - h(1) = -h(1) \leq 0$ **(0.5 pts.)**. El Teorema del Valor Intermedio nos dice que existe $c \in [0,1]$ tal que $f(c) = 0$, es decir, $g(c) = h(c)$ **(0.5 pts.)**.

Problema 3. Dado $a \geq 0$, sea $f_a(x) = ax^3 + x - 1$.

(a) (3 pts.) Demuestre la existencia y unicidad de $z \in [0,1]$ tal que $f_a(z) = 0$.

(b) (3 pts.) Sea $g : [0, \infty) \to [0,1]$ la función que a cada $a \geq 0$ le asocia la solución $z \in [0,1]$ de $f_a(z) = 0$. Pruebe que g es continua.

<u>Indicación</u>: Puede ser útil demostrar que si

$$\begin{aligned} au^3 + u - 1 &= 0 \\ bv^3 + v - 1 &= 0 \end{aligned}$$

con $a, b \geq 0$, entonces:

$$[b(u^2 + uv + v^2) + 1](u - v) = u^3(b - a) \tag{1}$$

<u>Solución</u>:

(a) Probemos primero la existencia. Tenemos que $f_a(0) = -1$ y $f_a(1) = a \geq 0$ **(0.5 pts.)**, y como f_a es continua **(0.5 pts.)**, el Teorema del Valor Intermedio nos dice que existe $z \in [0, 1]$ tal que $f_a(z) = 0$ **(0.5 pts.)**.

Para la unicidad, podemos utilizar (1) con $a = b$ para concluir que si $u, v \in [0, 1]$ son soluciones de la ecuación $f_a(x) = 0$ entonces $[a(u^2 + uv + v^2) + 1](u - v) = 0$ **(0.5 pts.)**. Pero $a, u, v \geq 0$, de modo que $a(u^2+uv+v^2)+1 \geq 1$ y en consecuencia para que lo anterior sea cierto necesariamente $u = v$ **(0.5 pts.)**.

Finalmente, probamos la indicación. Restando las dos ecuaciones se deduce que

$$\begin{aligned} 0 &= au^3 - bv^3 + u - v \\ &= au^3 - bu^3 + bu^3 - bv^3 + u - v \\ &= u^3(a - b) + b(u^3 - v^3) + u - v \\ &= u^3(a - b) + b(u - v)(u^2 + uv + v^2) + u - v \\ &= u^3(a - b) + [b(u^2 + uv + v^2) + 1](u - v) \end{aligned}$$

de donde se sigue (1) **(0.5 pts.)**.

(b) Sea $a \geq 0$, P.D.Q. g es continua en a. Sea (a_n) una sucesión con valores en $[0, \infty)$ **(0.5 pts.)** y convergente al real a. P.D.Q. $g(a_n) \to g(a)$ **(0.5 pts.)**. Usando la propiedad (1) con a y $b = a_n$ queda

$$[a(g(a)^2 + g(a)g(a_n) + g(a_n)^2) + 1](g(a_n) - g(a)) = g(a_n)^3(a_n - a),$$

de donde

(1.0 pto.) $$|g(a_n) - g(a)| = \frac{g(a_n)^3}{a(g(a)^2 + g(a)g(a_n) + g(a_n)^2) + 1}|a_n - a| \leq |a_n - a|.$$

Luego, como $a_n \to a \Rightarrow |a_n - a| \to 0$, por sandwich de sucesiones, resulta que $|g(a_n) - g(a)| \to 0$, es decir $g(a_n) \to g(a)$ **(1.0 pto.)**.

U. DE CHILE

INGENIERIA

Control #3 MA12A Cálculo

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Año 2002

Puntuación: P1.- (i)2, (ii)2, (iii)2, P2.- (ia)2, (ib)2, (ii)2, P3.- (i)1.5, (ii)1.5, (iii)1.5, (iv)1.5.

P1.- Sea $a > 0$. Considere la sucesión definida por

$$\begin{cases} s_1 = 2a, \\ s_{n+1} = \sqrt{\dfrac{a^3 + s_n^2}{a+1}}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

(i) Demuestre por inducción que $s_n > a$, $\forall n \geq 1$.

(ii) Demuestre que s_n es estrictamente decreciente y convergente a un real L.

(iii) Encuentre el valor de L. Justifique rigurosamente su resultado.

P2.- Sea $a > 0$.

(i) **Utilizando** las desigualdades

$$\exp(x) \leq \frac{1}{1-x} \qquad \forall x < 1, \qquad 1 + x \leq \exp(x) \qquad \forall x \in I\!R,$$

estudie en los dos casos siguientes la convergencia de la sucesión

$$\exp\left(-\frac{s_n}{a^2 - s_n^2}\right).$$

(a) Si $s_n \to a$ con $s_n < a$,

(b) Si $s_n \to -a$ con $s_n > -a$.

(ii) Determine si existen valores de α y de β para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{x}{a^2 - x^2}\right) & \text{si} \quad -a < x < a \\ \alpha & \text{si} \quad x \leq -a \\ \beta & \text{si} \quad x \geq a \end{cases}$$

sea continua en $x = -a$ y/o $x = a$. Justifique claramente su respuesta.
Indicación: en esta parte puede usar la caracterización de continuidad por sucesiones o por límites.

P3.- Definimos la función en $I\!R$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

(i) Verifique que tanh es continua en todo $I\!R$, que $\tanh(0) = 0$ y que satisface $-1 < \tanh(x) < 1$, $\forall x \in I\!R$.

(ii) Pruebe que si $n \to \infty$ entonces $\tanh(n) \to 1$ y que $\tanh(-n) \to -1$.

(iii) **Usando** el Teorema del Valor Intermedio para funciones continuas (T.V.I.) demuestre que $\forall y \in]-1, 1[, \exists x \in \mathbb{R}$ tal que $\tanh(x) = y$.
Indicación: analice separadamente los casos $y > 0$, $y = 0$, $y < 0$.

(iv) Demuestre que la ecuación $\tanh(x) = \cos(x)$ tiene infinitas soluciones en $\mathbb{R}$.
Indicación: use nuevamente el T.V.I.

Pauta Control #3 MA12A Cálculo

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Año 2002

Puntuación: P1.- (i)2, (ii)2, (iii)2, P2.- (ia)2, (ib)2, (ii)2, P3.- (i)1.5, (ii)1.5, (iii)1.5, (iv)1.5.

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener vía `http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html` en formato ps o pdf.

P1.- Sea $a > 0$. Considere la sucesión definida por

$$\begin{cases} s_1 = 2a, \\ s_{n+1} = \sqrt{\dfrac{a^3 + s_n^2}{a+1}}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

(i) Demuestre por inducción que $s_n > a$, $\forall n \geq 1$.

(ii) Demuestre que s_n es estrictamente decreciente y convergente a un real L.

(iii) Encuentre el valor de L. Justifique rigurosamente su resultado.

Pauta.- **(i)** Para $n = 1$ es cierto que $s_1 = 2a > a$ **[0/0.25/0.5pto]**.

Si suponemos que $s_n > a$ entonces

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= \sqrt{\frac{a^3 + s_n^2}{a+1}} \\ &> \sqrt{\frac{a^3 + a^2}{a+1}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2(a+1)}{a+1}} \\ &= a \end{aligned}$$

[0/0.5/1/1.5pto].

(ii) Demostraremos que $s_{n+1} - s_n < 0$, en efecto

$$\begin{aligned} s_{n+1} - s_n &= \frac{\sqrt{a^3 + s_n^2}}{\sqrt{a+1}} - s_n \\ &= \frac{\sqrt{a^3 + s_n^2} - s_n\sqrt{a+1}}{\sqrt{a+1}} \\ &= \frac{\sqrt{a^3 + s_n^2} - \sqrt{s_n^2\, a + s_n^2}}{\sqrt{a+1}} \\ &< 0, \end{aligned}$$

pues de la parte **(i)** se ve que $s_n^2\, a > a^3$ **[0/0.5/1.0/1.5pto]** (obviamente esta cota es posible obtenerla con otras manipulaciones algebraicas). Como s_n es decreciente y acotada inferiormente es en consecuencia convergente a un real L **[0/0.5pto]**.

(iii) Ya que s_{n+1} es una subsucesión de s_n, ella es también convergente al mismo límite L **[0/0.25pto]**. Tomando límite en la expresión que define la sucesión se obtiene:

$$L = \frac{\sqrt{a^3 + L^2}}{\sqrt{a+1}}$$

[0/0.25/0.5/0.75/1pto] de donde $L^2(a+1) = a^3 + L^2$ y se deduce que $L^2 = a^2$ o bien $L = \pm a$ **[0/0.25/0.5pto]**. Ahora como $s_n > a$ entonces $L \geq a$ de donde se deduce que la única posibilidad es $L = a$ (el límite es único) **[0/0.25pto]**.

P2.- Sea $a > 0$.

(i) **Utilizando** las desigualdades

$$\exp(x) \leq \frac{1}{1-x} \qquad \forall x < 1, \qquad 1 + x \leq \exp(x) \qquad \forall x \in I\!R,$$

estudie en los dos casos siguientes la convergencia de la sucesión

$$\exp\left(-\frac{s_n}{a^2 - s_n^2}\right).$$

(a) Si $s_n \to a$ con $s_n < a$,

(b) Si $s_n \to -a$ con $s_n > -a$.

(ii) Determine si existen valores de α y de β para que la función:

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{x}{a^2 - x^2}\right) & \text{si} \quad -a < x < a \\ \alpha & \text{si} \quad x \leq -a \\ \beta & \text{si} \quad x \geq a \end{cases}$$

sea continua en $x = -a$ y/o $x = a$. Justifique claramente su respuesta.
Indicación: en esta parte puede usar la caracterización de continuidad por sucesiones o por límites.

Pauta.(i)(a) Utilizaremos la primera desigualdad. Primero verificamos que

$$-\frac{s_n}{a^2 - s_n^2} < 1$$

para n suficientemente grande. En efecto, como $s_n \to a$, $s_n < a$ y $-a < a$ entonces para n suficientemente grande $-a < 0 < s_n < a$, entonces $-\frac{s_n}{a^2 - s_n^2} < 0 < 1$ para n grande **[0/0.25/0.5pto]** (también se puede argumentar deduciendo que $-\frac{s_n}{a^2 - s_n^2} \to -\infty$). En seguida, aplicando la primera desigualdad (y que $\exp(x) \geq 0$, $\forall x \in I\!R$) tenemos

$$0 \leq \exp\left(-\frac{s_n}{a^2 - s_n^2}\right) \leq \frac{s_n(a^2 - s_n^2)}{a^2 - s_n^2 + s_n}.$$

Por álgebra de límites de sucesiones, el término de la derecha tiende a $\frac{a(a^2 - a^2)}{a^2 - a^2 + a} = 0$. Utilizando el Teorema de comparación para sucesiones (sandwich) se obtiene que la sucesión estudiada es convergente a cero **[0/0.5/1/1.5pto]**.

(i)(b) De la segunda desigualdad

$$1 - \frac{s_n}{a^2 - s_n^2} \leq \exp\left(-\frac{s_n}{a^2 - s_n^2}\right).$$

Por álgebra de límites, el lado izquierdo diverge a $+\infty$ (el signo hay que justificarlo, por ejemplo notar que como $s_n \to -a$, $s_n > -a$ y $-a < a$ entonces para n suficientemente grande $-a < s_n < 0 < a$ de donde $1 - \frac{s_n}{a^2 - s_n^2} > 0$ para n grande, o bien explicar que $s_n^2 \to a^2$ con $s_n^2 > a^2$ y deducir por álgebra de límites divergentes que $\frac{s_n}{a^2 - s_n^2} \to -\infty$ **[0/0.25/0.5pto]**), de donde por comparación (sandwich) se obtiene que el límite pedido es $+\infty$ **[0/0.5/1/1.5pto]**.

(ii) Esta parte se puede resolver utilizando sucesiones o límites laterales de funciones. Se dan ambas opciones en la pauta.

- **Opción sucesiones:** Sea s_n una sucesión convergente a $x = -a$ con $s_n \leq -a$, es claro de la definición de f que

$$f(s_n) = \alpha \to \alpha \quad \text{si } n \to \infty.$$

Sea ahora s_n una sucesión convergente a $x = -a$ con $s_n > -a$, es claro de la parte **(i)(b)** que

$$f(s_n) \to +\infty \quad \text{si } n \to \infty.$$

Entonces f es no puede ser continua en $x = -a$ para ningún valor de α. **[0/0.25/0.5/0.75/1pto]**.
Sea s_n una sucesión convergente a $x = a$. Esta sucesión la separamos en dos: la de los términos mayores o iguales que a y la de los términos menores que a. Si los términos mayores o iguales que a son un número finito, no los consideramos, si son un número infinito, constituyen una subsucesión de s_n denotada $s_{n'}$. Lo mismo para los términos menores, que de ser infinitos denotamos por la subsucesión $s_{n''}$. Es claro de la definición de f que

$$f(s_{n'}) = \beta \to \beta \quad \text{si } n' \to \infty$$

y de la parte **(i)(a)**

$$f(s_{n''}) \to 0 \quad \text{si } n'' \to \infty.$$

Entonces f es continua en $x = a$ para $\beta = 0$. **[0/0.25/0.5/0.75/1pto]** (el hecho de no tomar una sucesión general, sino sólo dos convergentes por cada lado de $x = a$ y no justificar que esto es equivalente a tomar una general convergiendo por ambos lados a $x = a$ vale **0.25ptos**).

- **Opción límites laterales:** Para que f sea continua en $x = -a$ es necesario que

$$\lim_{x \to -a^-} f(x) = \lim_{x \to -a^+} f(x).$$

Pero

$$\lim_{x \to -a^-} f(x) = \alpha$$

y

$$\lim_{x\to -a^+} f(x) = +\infty$$

pues $\lim_{x\to -a^+} -\frac{x}{(a+x)(b-x)} = +\infty$ y $\exp(y) \to +\infty$ si $y \to +\infty$. Entonces f es no puede ser continua en $x = -a$ para ningún valor de α. **[0/0.25/0.5/0.75/1pto]**.
Para que f sea continua en $x = b$ es necesario que

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^+} f(x).$$

Pero

$$\lim_{x\to b^+} f(x) = \beta$$

y

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = 0$$

pues $\lim_{x\to b^-} -\frac{x}{(a+x)(b-x)} = -\infty$ y $\exp(y) \to 0$ si $y \to -\infty$. Entonces f es continua en $x = b$ para $\beta = 0$. **[0/0.25/0.5/0.75/1pto]** (el hecho de mencionar en alguno de los dos puntos que f es continua ssi los límites laterales existen y son iguales vale **0.25ptos**).

P3.- Definimos la función en $\mathbb{R}$

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

(i) Verifique que tanh es continua en todo $\mathbb{R}$, que $\tanh(0) = 0$ y que satisface $-1 < \tanh(x) < 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

(ii) Pruebe que si $n \to \infty$ entonces $\tanh(n) \to 1$ y que $\tanh(-n) \to -1$.

(iii) **Usando** el Teorema del Valor Intermedio para funciones continuas (T.V.I.) demuestre que $\forall y \in]-1,1[$, $\exists x \in \mathbb{R}$ tal que $\tanh(x) = y$.
Indicación: analice separadamente los casos $y > 0$, $y = 0$, $y < 0$.

(iv) Demuestre que la ecuación $\tanh(x) = \cos(x)$ tiene infinitas soluciones en $\mathbb{R}$.
Indicación: use nuevamente el T.V.I.

Pauta.- **(i)** Notemos que $e^x + e^{-x} > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de modo que el denominador de tanh no se anula jamás y resulta ser continua por ser de la forma f/g con f y g continuas (suma de continuas) y $g(x) \neq 0$ **[0/0.25/0.5pto]**. Por otro lado $\tanh(0) = (1-1)/(1+1) = 0$ y

$$e^{-x} + e^{-x} > 0 \Rightarrow -e^{-x} < e^{-x} \Rightarrow e^x - e^{-x} < e^x + e^{-x}$$

$$e^x + e^x > 0 \Rightarrow -e^x < e^x \Rightarrow -e^x - e^{-x} < e^x - e^{-x}$$

de donde se obtiene $-1 < \tanh(x) < 1$ al dividir por $e^x + e^{-x} > 0$. **[0/0.25/0.5/0.75/1pto]**.

(ii) Si $n \to \infty$ entonces $e^{-2n} \to 0$, de donde por álgebra de límites **[0/0.25/0.5/0.75pto]**:

$$\lim_{n\to\infty} \tanh(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^n - e^{-n}}{e^n + e^{-n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - e^{-2n}}{1 + e^{-2n}} = 1.$$

(Alternativamente, se puede demostrar de manera similar que $\lim_{x\to+\infty} \tanh(x) = 1$ y y tomar $x = n$).

Del mismo modo **[0/0.25/0.5/0.75pto]**:

$$\lim_{n\to\infty} \tanh(-n) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-n} - e^{n}}{e^{-n} + e^{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-2n} - 1}{e^{-2n} + 1} = -1.$$

(Alternativamente, se puede demostrar de manera similar que $\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1$ y tomar $x = -n$). También se puede deducir usando el límite precedente y argumentando que $\tanh(-x) = -\tanh(x)$ (función impar).

(iii) Sea $0 < y < 1$, como $\tanh(n) \to 1$ y $\tanh(n) < 1$ (o bien como $\lim_{x\to\infty} \tanh(x) = 1$), entonces para n suficientemente grande $y < \tanh(n) < 1$, esto es existe n_0 tal que $y < \tanh(n_0) < 1$. Por otro lado $\tanh(0) = 0$. Entonces

$$\tanh(0) < y < \tanh(n_0).$$

Como tanh es continua, por el T.V.I. existe $x \in (0, n_0)$ tal que $\tanh(x) = y$ **[0.7pto]**.

Sea $-1 < y < 0$, como $\tanh(-n) \to -1$ y $-1 < \tanh(-n)$ (o bien como $\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1$), entonces para n suficientemente grande $-1 < \tanh(-n) < y$, esto es existe n_1 tal que $\tanh(-n_1) < y$. Por otro lado $\tanh(0) = 0$. Entonces

$$\tanh(-n_1) < y < \tanh(0).$$

Como tanh es continua, por el T.V.I. existe $x \in (-n_1, 0)$ tal que $\tanh(x) = y$ **[0.7pto]**. (También se puede argumentar usando la imparidad).

Si $y = 0$ claramente $\tanh(0) = y$ **[0/0.1pto]**.

(iv) Como $\cos(2k\pi) = 1$ y $\cos((2k+1)\pi) = -1$, $k \in \mathbb{N}$, entonces $\cos(2k\pi) - \tanh(2k\pi) > 0$ y $\cos((2k+1)\pi) - \tanh((2k+1)\pi) < 0$, esto es, la función continua $\cos(x) - \tanh(x)$ cambia de signo en cada intervalo $[2k\pi, (2k+1)\pi]$. Usando el T.V.I., existe $x_k \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$ con $\cos(x_k) - \tanh(x_k) = 0$, esto es $\cos(x_k) = \tanh(x_k)$ y por lo tanto $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ constituyen una sucesión de raíces reales distintas de la ecuación. **[1.5pto]**.

Nota: los puntajes del tipo **[0/0.5/1pto]** significan que en lo posible la puntuación tomará solamente esos valores.

Atte, el Coordinador.

U. DE CHILE

INGENIERIA

Control #3 MA12A CALCULO

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Semestre 2003-1

P1.- **(i)** (3 ptos.) Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ (x-\alpha)^2 & \text{si } x < 0 \\ \beta & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Analice la continuidad de f y encuentre todos los valores de α y β para los cuales f es continua en todo $\mathbb{R}$.

(ii) (3 ptos.) Calcule

$$\lim_{x \to a} \frac{\operatorname{arcsen} x - \operatorname{arcsen} a}{x - a}$$

en función de a, usando el cambio de variables $u = \operatorname{arcsen} x - \alpha$, donde $\alpha = \operatorname{arcsen} a$. Indicación: puede serle útil la fórmula del seno de la suma.

P2.- **(i)** Sean $f, g : [0,1] \to [0,1]$ funciones continuas y epiyectivas. Demuestre que $\exists c \in [0,1]$ tal que $f(c) = g(c)$. Indicación: analice los valores de g en los puntos donde f alcanza sus valores extremos.

(ii) (3 ptos) El objetivo de este problema es probar que toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y tal que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq |x|$, alcanza su mínimo en $\mathbb{R}$, es decir,

$$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(a) \leq f(x).$$

Para ello considere $y_0 = f(0)$ y el intervalo $I = [-y_0, y_0]$.

(a) (1.5 ptos) Demuestre que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus I, \quad f(x) > y_0.$$

(b) (1.5 ptos) Concluya que f alcanza su mínimo en $\mathbb{R}$ en un punto de I.

P3.- **(i)** (3 ptos) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Sea (a_n) una sucesión en $[a,b]$, no necesariamente convergente, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$. Demostrar que $\exists \overline{x} \in [a,b]$ tal que $\ell = f(\overline{x})$.

(ii) **(a)** (1 pto) Sea $k \in \mathbb{N}$. Usando subsucesiones, calcular

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^n.$$

(b) (2 ptos) Dado $a \in \mathbb{R}$, calcular

$$\lim_{n\to\infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n+a}\right).$$

Use este resultado para concluir el valor de $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+a}\right)^n$.

Pauta Control #3 MA12A Cálculo

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Año 2003

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba (Vi 01/08 18:00 y 19:00). Esta se puede obtener en `www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html` en formato ps o pdf. <u>Nota</u>: en la revisión se aceptará solamente tomar nota con lápiz de color verde.

P1.- (i) (3 ptos.) Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \\ (x-\alpha)^2 & \text{si } x < 0 \\ \beta & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Encuentre todos los valores de α y β para los cuales f es continua en todo $\mathbb{R}$.

(ii) (3 ptos.) Calcule

$$\lim_{x\to a} \frac{\arcsin x - \arcsin a}{x - a}$$

en función de a, usando el cambio de variables $u = \arcsin x - \alpha$, donde $\alpha = \arcsin a$. Indicación: puede serle útil la fórmula del seno de la suma.

Pauta.- (i)

- **Continuidad para $x \neq 0$.** Claramente f es una función continua en los intervalos: $(-\infty, 0)$ y $(0, +\infty)$ por álgebra de funciones continuas (la suma, producto, división si el denominador no se anula y composicion de funciones continuas es continua).
- **Continuidad por la derecha en $x = 0$.** Por límites laterales, podemos calcular:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)}.$$

  - Método 1: usando los límites conocidos vistos en clases:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

    En efecto:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{e^x-1}{x}}{\frac{\ln(1+x)}{x}} = \frac{1}{1} = 1.$$

  - Método 2: otro método, mucho más largo pero instructivo, es utilizar las desigualdades fundamentales de las funciones exponencial y logaritmo vistas en clases:

$$x + 1 \leq e^x \leq \tfrac{1}{1-x} \quad \forall x < 1$$
$$\tfrac{y-1}{y} \leq \ln y \leq y - 1 \quad \forall y > 0.$$

De la primera, restando 1 se obtiene que

$$x \leq e^x - 1 \leq \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x},$$

de la segunda, tomando $y = 1 + x$ (si $x > -1$ entonces $y > 0$) se tiene que

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\ln(1+x)} \leq \frac{1+x}{x}$$

pues los términos comparados son positivos.
Combinando lo anterior se obtienen las cotas siguientes:

$$x \cdot \frac{1}{x} = 1 \leq \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} \leq \frac{x}{1-x}\frac{1+x}{x} = \frac{1+x}{1-x},$$

que son validas para $-1 < x < 1$. Del teorema de comparación (Sandwich), tomando límite cuando $x \to 0^+$ se deduce que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} = 1.$$

Cualesquiera de los dos métodos anteriores indica que el valor de β debe ser necesariamente:

$$\beta = 1.$$

- **Continuidad por la izquerda en $x = 0$.** Calculemos el límite:

$$\lim_{x \to 0^-} (x - \alpha)^2.$$

Por álgebra de límites (o por continuidad de los polinomios), es directo que este límite existe $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ y vale α^2.
Imponiendo la restricción de continuidad en 0:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x)$$

se obtiene la condición

$$1 = \alpha^2$$

de donde

$$\alpha = 1 \text{ o bien } \alpha = -1.$$

(ii) Notemos primero que

$$\begin{aligned} u &= \arcsin x - \alpha \Rightarrow x = \sin(u + \alpha) \\ a &= \arcsin \alpha \Rightarrow \alpha = \sin a, \end{aligned}$$

de donde

$$x \to a \Rightarrow u \to 0.$$

Haciendo el cambio de variables el límite pedido queda entonces:

$$\lim_{x\to a} \frac{\arcsin x - \arcsin a}{x-a} = \lim_{u\to 0} \frac{u}{\sin(u+\alpha) - a}.$$

Calculemos este último límite utilizando la indicación (seno de la suma):

$$\begin{aligned}\lim_{u\to 0} \frac{u}{\sin(u+\alpha)-a} &= \lim_{u\to 0} \frac{u}{\cos\alpha \sin\ u + a\cos\ u - a} \\ &= \lim_{u\to 0} \frac{1}{\cos\alpha \frac{\sin\ u}{u} + a\frac{\cos\ u-1}{u}} \\ &= \frac{1}{\cos\alpha},\end{aligned}$$

donde hemos utilizado el álgebra de límites y los límites trigonométricos conocidos:

$$\lim_{u\to 0} \frac{\sin\ u}{u} = 1 \qquad \lim_{u\to 0} \frac{\cos\ u - 1}{u} = 0.$$

Finalmente, como

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

se obtiene

$$\lim_{x\to a} \frac{\arcsin x - \arcsin a}{x-a} = \frac{1}{\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}}.$$

Asignación de puntaje P1:

(i)	**[0.5pto]**	Justificar continuidad para $x \neq 0$
	[1pto]	Cálculo del límite
	[0.5pto]	Encontrar β por continuidad
	[0.5pto]	Cálculo del límite con α
	[0.5pto]	Encontrar valores de α por continuidad
(ii)	**[0.5pto]**	Buen despeje de x y reescritura del límite
	[0.5pto]	Ver bien que si $x \to a$ entonces $u \to 0$
	[0.5pto]	Utilización seno de la suma
	[0.5pto]	Utilización de límites trigonométricos
	[0.5pto]	Valor del límite en α
	[0.5pto]	Reescritura en a

P2.- **(i)** (3 ptos) Sean $f, g : [0,1] \to [0,1]$ funciones continuas y epiyectivas. Demuestre que $\exists c \in [0,1]$ tal que $f(c) = g(c)$. Indicación: analice los valores de g en los puntos donde f alcanza sus valores extremos.

(ii) (3 ptos) El objetivo de este problema es probar que toda función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y tal que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq |x|$, alcanza su mínimo en $\mathbb{R}$, es decir,

$$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(a) \leq f(x).$$

Para ello considere $y_0 = f(0)$ y el intervalo $I = [-y_0, y_0]$.

(a) (1.5 ptos) Demuestre que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus I, \quad f(x) > y_0.$$

(b) (1.5 ptos) Concluya que f alcanza su mínimo en $\mathbb{R}$ en un punto de I.

Pauta.- **(i)** Sea $h = f - g$ que también es una función continua en $[0,1]$ (pero no necesariamente epiyectiva!). Debemos probar que $\exists c \in [0,1]$ tal que $h(c) = 0$. Para ello la idea es usar el TVM para h,

Usamos la indicación: como f es epiyectiva, el valor máximo que toma es 1 digamos en algún $x_1 \in [0,1]$. Del mismo modo, el mínimo valor que toma es 0 en algún $x_0 \in [0,1]$. Por otro lado $0 \leq g(x) \leq 1$ $\forall x \in [0,1]$, de donde

$$g(x_1) \leq 1 = f(x_1) \quad \text{y} \quad g(x_0) \geq 0 = f(x_0).$$

Esto es, probamos que

$$\exists x_1, x_0 \in [0,1] \text{ tales que } \quad h(x_1) \leq 0, \quad h(x_0) \geq 0$$

y del TVM se concluye la propiedad.

(iia) Tenemos que

$$x \in \mathbb{R} \setminus I \;\Rightarrow\; |x| > y_0$$

pero

$$f(x) \geq |x|$$

de donde por transitividad

$$f(x) > y_0.$$

(iib) f es continua en I (intervalo cerrado y acotado) por lo que alcanza su mínimo en I, esto es:

$$\exists a \in I \quad \text{tal que} \quad f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in I.$$

Fuera de I, el punto a sigue siendo un mínimo, en efecto, como $0 \in I$, entonces:

$$f(a) \leq f(0) = y_0$$

y de la parte anterior se deduce que

$$f(a) \leq y_0 < f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus I.$$

Nota: esta pregunta también se puede hacer con un intervalo $[-y, y]$ donde y está en la imagen de f, pero en ese caso adicionalmente hay que probar que se puede escoger una preimagen de y en I (lo que no es necesario si la preimagen es 0). También se puede hacer por reducción al absurdo, pero es complicado: si f no tiene mínimo, al menos tiene ínfimo porque es acotada inferiormente (es positiva). Sea a_n una sucesión tal que $f(a_n)$ converja al ínfimo, entonces o bien a_n es acotada, en cuyo caso pasando al límite en una subsucesión se ve que el ínfimo se alcanza en el límite de esta subsucesión, o bien es no acotada, caso en que tomando límite se viola la desigualdad $f(a_n) \geq |a_n|$.

Asignación de puntaje P2:

(i)	**[0.5pto]**	Entender que se trata de TVM
	[0.75pto]	Existencia de valores máximos y mínimos de f
	[0.75pto]	Utilizar las cotas para g
	[1pto]	Utilizar bien el TVM
(iia)	**[0.5pto]**	Transcripción a desigualdad de $x \in I\!R \setminus I$
	[0.5pto]	Uso de la hipótesis $f(x) \geq \|x\|$
	[0.5pto]	Uso de la parte anterior
(iib)	**[1pto]**	Teorema f alcanza su mínimo en $[a,b]$
	[0.5pto]	Utilizar la parte anterior

P3.- **(i)** (3 ptos) Sea $f : I\!R \to I\!R$ una función continua. Sea (a_n) una sucesión en $[a,b]$, no necesariamente convergente, tal que $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \ell$. Demostrar que $\exists \overline{x} \in [a,b]$ tal que $\ell = f(\overline{x})$.

(ii) **(a)** (1 pto) Sea $k \in I\!N$. Usando subsucesiones, calcular

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^n.$$

(b) (2 ptos) Dado $a \in I\!R$, calcular

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n+a}\right).$$

Use este resultado para concluir el valor de $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+a}\right)^n$.

Pauta.- **(i)** Del teorema de Bolzano Weierstrass, existe una subsucesión $a_{\varphi(n)}$ de a_n que es convergente. Llamando $\overline{x}$ al límite tenemos

$$a_{\varphi(n)} \to \overline{x}.$$

Pero por continuidad de f:

$$f(a_{\varphi(n)}) \to f(\overline{x}).$$

Ahora notemos que

$$f(a_{\varphi(n)}) \quad \text{es una subsucesión de} \quad f(a_n)$$

por lo que por hipótesis

$$f(a_{\varphi(n)}) \to \ell.$$

Finalmente, por unicidad del límite

$$f(\overline{x}) = \ell.$$

(iia) Dado $k \in I\!N$ fijo, y si sabemos que

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e,$$

tomamos la subsucesión $a_{\varphi(n)}$ con $\varphi(n) = n + k$ para obtener que

$$a_{n+k} \to e.$$

Ahora

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{-k}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n+k} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{-k}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n+k} \\
&= 1^{-k}\lim_{n\to\infty} a_{n+k} \\
&= e
\end{aligned}$$

(iib) Se sabe de clases que

$$s_n \to 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+s_n)}{s_n} = 1$$

lo que viene de la desigualdad vista en clases:

$$\frac{y-1}{y} \leq \ln y \leq y - 1 \quad \forall y > 0.$$

Entonces reescribimos el primer límite pedido como

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n+a}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+a}\,\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+a}\right)}{\frac{1}{n+a}}$$

y es claro que

$$s_n = \frac{1}{n+a} \to 0 \quad \text{y} \quad \frac{n}{n+a} \to 1$$

de donde se deduce que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+a}\,\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n+a}\right)}{\frac{1}{n+a}} = 1.$$

El límite pedido puede obtenerse de la continuidad de la función exponencial (tercera igualdad):

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+a}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\exp\left(\ln\left(1+\frac{1}{n+a}\right)^n\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\exp\left(n\,\ln\left(1+\frac{1}{n+a}\right)\right) \\
&= \exp\lim_{n\to\infty} n\,\ln\left(1+\frac{1}{n+a}\right) \\
&= \exp 1 \\
&= e.
\end{aligned}$$

Valor que coincide con el límite calculado en el ítem anterior en el caso particular en que a es natural.

Asignación de puntaje P3:

(i)	**[1pto]**	Uso teorema de Bolzano Weierstrass
	[1pto]	Continuidad de f
	[0.5pto]	Subsucesiones y uso de la hipótesis
	[0.5pto]	Unicidad del límite
(iia)	**[0.2pto]**	Elección de la subsucesión correcta
	[0.3pto]	Saber que la subsucesión conserva el mismo límite
	[0.5pto]	Calculo del límite haciendo aparecer la subsucesión
(iib)	**[0.5pto]**	Entender que se trata del primer límite del logaritmo para un $s_n \to 0$
	[0.5pto]	Primer límite pedido
	[0.5pto]	Segundo límite pedido
	[0.5pto]	Comentar que la continuidad de exp permite intercambiar los límites

Control #3 MA12A CALCULO

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.

Semestre 2004-1

P1.- **(i)** Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin((1-a)x)}{x} & \text{si } x < 0, \\ b(x-a)^2 & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ \dfrac{\sin(a(x-1))}{\ln x} & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

donde a y b son parámetros reales con $a \neq 0$, $a \neq 1$.

a) (0.5 ptos.) ¿Qué puede decir de la continuidad de f en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0,1)$ y $(1, \infty)$? Justifique.

b) (1.5 ptos.) Encuentre una relación entre a y b equivalente a la continuidad de f en 0.

c) (1.5 ptos.) Encuentre una relación entre a y b equivalente a la continuidad de f en 1.

d) (0.5 ptos.) Encuentre los valores de a y b, con $a \neq 0$, $a \neq 1$, tales que f sea continua en $\mathbb{R}$.

(ii) (2 ptos.) Estudie la continuidad en los puntos 0 y 1 de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = [x]x$.

(Recuerde que $[x]$ es la parte entera de x, definida como el mayor entero k que cumple $k \le x$.)

P2.- Calcule los límites siguientes justificando apropiadamente (1 pto. cada uno):

(i) $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{\sin(a+h) - \sin(a)}{h}, \quad a \in \mathbb{R}$ **(ii)** $\displaystyle \lim_{x \to \pi} \frac{\sin(x)}{\pi - x}$ **(iii)** $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{e^{x^2} - 1}$

(iv) $\displaystyle \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1+x^a} - \sqrt{1-x^a}}{x^a}, \quad a > 0$ **(v)** $\displaystyle \lim_{x \to 1} x^{-\frac{x}{\ln x}}$ **(vi)** $\displaystyle \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n}{1+2n}\right)^n$

P3.- **(i)** Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$.

a) (2 ptos.) Pruebe que existen $\underline{x}$, $\overline{x} \in [a,b]$ tales que

$$f(\underline{x}) \le \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \le f(\overline{x}) \qquad \forall x_1, x_2 \in [a,b].$$

b) (2 ptos.) Demuestre que dados x_1, $x_2 \in [a,b]$ cualesquiera existe $\beta \in [a,b]$ tal que

$$f(\beta) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

<u>Indicación</u>: utilice los teoremas sobre funciones continuas en un intervalo $[a,b]$.

(ii) (2 ptos.) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface:

$f(x) \le 0 \quad \forall x \le 0,$

$f(x) \ge 1 \quad \forall x > 0.$

Pruebe que f no es continua en cero.

TIEMPO: 3 horas.

Pauta Control #3 MA12A Cálculo

Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile.
Semestre 2004-1

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es *responsabilidad del alumno* tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener en la página:
`http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html` en formato ps o pdf.

P1.- **(i)** Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin((1-a)x)}{x} & \text{si } x < 0, \\ b(x-a)^2 & \text{si } 0 \le x \le 1, \\ \dfrac{\sin(a(x-1))}{\ln x} & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

donde a y b son parámetros reales con $a \neq 0$, $a \neq 1$.

a) (0.5 ptos.) ¿Qué puede decir de la continuidad de f en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0,1)$ y $(1,\infty)$? Justifique.

b) (1.5 ptos.) Encuentre una relación entre a y b equivalente a la continuidad de f en 0.

c) (1.5 ptos.) Encuentre una relación entre a y b equivalente a la continuidad de f en 1.

d) (0.5 ptos.) Encuentre los valores de a y b, con $a \neq 0$, $a \neq 1$, tales que f sea continua en $\mathbb{R}$.

(ii) (2 ptos.) Estudie la continuidad en los puntos 0 y 1 de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = [x]x$. (Recuerde que $[x]$ es la parte entera de x, definida como el mayor entero k que cumple $k \le x$.)

Pauta. **(i)** **a)** La función f es continua en los intervalos $(-\infty, 0)$, $(0,1)$ y $(1,\infty)$ ya que en cada uno de éstos se puede aplicar los teoremas sobre álgebra y composición de funciones continuas. Sólo es necesario observar que en $(-\infty, 0)$ $\frac{\sin((1-a)x)}{x}$ es continua puesto que el denominador no se anula y en $(1,\infty)$ $\frac{\sin(a(x-1))}{\ln x}$ es continua.

b) Para estudiar la continuidad en 0 conviene calcular los límites laterales de f en este punto. Utilizando la definición de f y la hipótesis $a \neq 1$ podemos escribir

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin((1-a)x)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin((1-a)x)}{(1-a)x}(1-a) \\ &= 1-a \end{aligned}$$

ya que $\lim_{z\to 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$.
Por otro lado

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} b(x-a)^2 \\ &= ba^2. \end{aligned}$$

Ahora bien, f es continua en 0 si y sólo si $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, es decir

$$1 - a = ba^2.$$

c) Calculemos los límites laterales de f en 1:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-} b(x-a)^2 \\ &= b(1-a)^2. \end{aligned}$$

Suponiendo, como dice el enunciado, que $a \neq 0$ podemos calcular el otro límite del siguiente modo

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\sin(a(x-1))}{\ln x} \\ &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\sin(a(x-1))}{a(x-1)} \frac{a(x-1)}{\ln x}. \end{aligned} \tag{1}$$

Con el cambio de variables $y = z(x-1)$ vemos que $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(a(x-1))}{a(x-1)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$. Por otro lado $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$, lo que se puede deducir del límite (más conocido quizá) $\lim_{z\to 0} \frac{\ln(1+z)}{z} = 1$ con el cambio de variables $z = x-1$. Luego

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = a.$$

Finalmente la continuidad de f en 1 es equivalente a $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)$ lo que es a su vez equivalente a

$$b(1-a)^2 = a.$$

d) En vista de las partes anteriores debemos buscar $a \neq 0$, $a \neq 1$ tales que

$$1 - a = ba^2 \qquad \text{y} \qquad b(1-a)^2 = a.$$

Reemplazando $1 - a = ba^2$ en la segunda ecuación se obtiene $b(ba^2)^2 = a$, luego $b^3a^4 = a$. Dividiendo por a (que suponemos distinto de cero) $b^3a^3 = 1$ de donde $ab = 1$. Volviendo a la primera ecuación $1 - a = a$ por lo que $a = \frac{1}{2}$ y $b = 2$.

(ii) Estudiemos primeramente la continuidad de f en 0, para lo cual conviene recordar que

$$\lim_{x\to 0^-} [x] = -1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0^+} [x] = 0. \tag{2}$$

En efecto, argumentando con sucesiones, si (x_n) es una sucesión tal que $x_n \to 0$, $x_n < 0 \quad \forall n$, vemos que $-1 < x_n < 0$ para n suficientemente grande por lo que $[x_n] = -1$. El otro límite es similar.
Utilizando los límites (2) vemos que

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} [x]x = (-1)\cdot 0 = 0,$$

y

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} [x]x = 0 \cdot 0 = 0,$$

Como $f(0) = 0$ concluimos que f es continua en 0.
Similarmente a (2) tenemos

$$\lim_{x\to 1^-} [x] = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 1^+} [x] = 1.$$

Así

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} [x]x = 0 \cdot 1 = 0 \neq f(1) = 1.$$

Esto muestra que f no es continua en 1.

Puntaje.

(i)	a)	0.5 ptos.	El puntaje es por argumentar que sobre los intervalos anteriores la función es cociente, producto, suma, resta y composición de funciones continuas. Se tiene que mencionar que en el caso del cociente se está dividiendo por una función que no se anula.
	b) y c)	0.4 ptos.	por mencionar que la continuidad se puede establecer estudiando límites laterales
		1 pto.	calcular correctamente los límites por la izquierda y por la derecha (0.5 cada uno)
		0.1 ptos.	plantear correctamente la ecuación
	d)	0.5 ptos.	por resolver correctamente
(ii)	a)	1 pto.	la continuidad en 0
		1 pto.	la continuidad en 1

Observaciones: Para los límites laterales en ib) e ic) se requiere conocer algunos límites básicos: $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$ y $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}$ y además identificar la estrategia correcta para el límite por la derecha en 1 (ver (1)). De los dos puntos asignados a esta parte se sugiere:

0.5 por conocer $\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$
0.5 por conocer $\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t)}{t}$
0.5 por usar la continuidad de $b(x-a)^2$
0.5 por el resto (básicamente hacer (1)).

P2.- Calcule los límites siguientes justificando apropiadamente (1 pto. cada uno):

(i) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h},\quad a\in\mathbb{R}$ **(ii)** $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x)}{\pi-x}$ **(iii)** $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{e^{x^2}-1}$

(iv) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{1+x^a}-\sqrt{1-x^a}}{x^a},\quad a>0$ **(v)** $\displaystyle\lim_{x\to 1}x^{-\frac{x}{\ln x}}$ **(vi)** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{1+2n}\right)^n$

Pauta. **(i)**

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(a)\cos(h)+\cos(a)\sin(h)-\sin(a)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\sin(a)\frac{\cos(h)-1}{h}+\cos(a)\frac{\sin(h)}{h}.\end{aligned}$$

Pero

$$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h^2}\,h = -\frac{1}{2}\cdot 0 = 0.$$

Gracias a esto y el límite $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h}=1$ obtenemos

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sin(a+h)-\sin(a)}{h} = \cos(a).$$

(ii) Mediante el cambio de variables $h=x-\pi$ vemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x)}{\pi-x} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h+\pi)}{-h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sin(h)}{h} = 1,\end{aligned}$$

donde hemos utilizado el hecho que $\sin(\alpha+\pi)=-\sin(\alpha)\quad\forall\alpha\in\mathbb{R}$.

(iii)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{e^{x^2}-1} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2}\,\frac{x^2}{e^{x^2}-1}. \tag{3}$$

Recordemos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2},$$

y observemos que haciendo $h=x^2$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^{x^2}-1} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{e^h-1} = 1,$$

por lo que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{e^{x^2}-1} = -\frac{1}{2}.$$

(iv) Racionalizando encontramos

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x^a}-\sqrt{1-x^a}}{x^a} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x^a}-\sqrt{1-x^a}}{x^a}\,\frac{\sqrt{1+x^a}+\sqrt{1-x^a}}{\sqrt{1+x^a}+\sqrt{1-x^a}} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1+x^a-(1-x^a)}{x^a(\sqrt{1+x^a}+\sqrt{1-x^a})} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^a}{x^a(\sqrt{1+x^a}+\sqrt{1-x^a})} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{\sqrt{1+x^a}+\sqrt{1-x^a}}. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Las funciones $g_1(x)=\sqrt{1+x^a}$ y $g_2(x)=\sqrt{1-x^a}$ son continuas en $[0,\infty)$ y $[0,1]$ respectivamente por álgebra y composición de funciones continuas. El único punto delicado podría ser $\lim_{x\to 0^+} x^a = 0$ cuando $a>0$. Esto se deduce por ejemplo de $0 \le x^a \le x^{1/k} \quad \forall 0<x<1$ donde k es un natural tal que $\frac{1}{k}<a$ y del hecho (conocido) que $x^{1/k}$ es continua en $[0,\infty)$, siendo la inversa de la función $y\mapsto y^k$. Luego $\lim_{x\to 0}\sqrt{1+x^a} = \lim_{x\to 0}\sqrt{1-x^a} = 1$ y concluimos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^a}-\sqrt{1-x^a}}{x^a} = 1.$$

(v) FORMA 1: Utilizando la definición de $\ln(x)$ y la propiedades de la la exponencial

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} x^{-\frac{x}{\ln x}} &= \lim_{x\to 1} \exp\Big(-\frac{x}{\ln(x)}\ln(x)\Big) \\
&= \lim_{x\to 1} \exp(-x) \\
&= e^{-1},
\end{aligned}$$

gracias a la continuidad de la función exponencial.

FORMA 2:

$$\ln(x^{-\frac{x}{\ln x}}) = -\frac{x}{\ln(x)}\ln(x) = -x.$$

Entonces

$$\lim_{x\to 1} \ln(x^{-\frac{x}{\ln x}}) = \lim_{x\to 1} -x = -1.$$

De aquí se deduce que

$$\lim_{x\to 1} x^{-\frac{x}{\ln x}} = \exp(\lim_{x\to 1} \ln(x^{-\frac{x}{\ln x}})) = e^{-1}.$$

(vi) FORMA 1:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \Big(\frac{2n}{1+2n}\Big)^n &= \lim_{n\to\infty} \Big(1-\frac{n}{1+2n}\frac{1}{n}\Big)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(1+\frac{a_n}{n}\Big)^n
\end{aligned}$$

donde $a_n = -\frac{n}{1+2n}$ tiene límite $-\frac{1}{2}$. Es una propiedad usualmente vista en clases que en esta situación

$$\lim_{n\to\infty} \Big(1+\frac{a_n}{n}\Big)^n = \exp(\lim_{n\to\infty} a_n) = e^{-\frac{1}{2}}.$$

FORMA 2: utilizando logaritmos y un cambio de variables

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{1+2n}\right)^n &= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2}{x+2}\right)^{1/x} \qquad \left(x=\frac{1}{n}\right)\\
&= \lim_{x\to 0^+}\exp\left(\frac{\log(\frac{2}{x+2})}{x}\right)\\
&= \exp\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\log(\frac{2}{x+2})}{x}\right) \qquad \text{(continuidad de } \exp(\cdot))\\
&= \exp\left(\lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{x+2}\cdot\frac{\log(\frac{2}{x+2})}{\frac{2}{x+2}-1}\right)\\
&= \exp\left(-\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x+2}\cdot\lim_{t\to 1}\frac{\log t}{t-1}\right)\\
&= e^{-1/2}
\end{aligned}
$$

Puntaje.

(i)	0.3 ptos.	por identificar y utilizar correctamente la *buena* identidad trigonométrica
	0.3 ptos.	$\lim_{h\to 0}\frac{\cos(h)-1}{h}=0$
	0.4 ptos.	por el resto
(ii)	0.6 ptos.	lo importante aquí es el cambio de variables
	0.4 ptos.	por el resto
(iii)	0.2 ptos.	reconocer el paso (3)
	0.2 ptos.	$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2}$
	0.2 ptos.	$\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1}{t}$
	0.2 ptos.	$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1}{x^2}$ (reconocer el límite anterior y hacer el cambio de variables)
	0.2 ptos.	por el resto
(iv)	0.3 ptos.	por la idea de racionalizar
	0.2 ptos.	por llegar a (4)
	0.4 ptos.	por argumentar que $\lim_{x\to 0}\sqrt{1\pm x^a}=1$
	0.1 ptos.	por el resultado correcto
(v)	0.5 ptos.	por la idea $x^{(*)}=e^{(*)\ln(x)}$
	0.5 ptos.	por argumentar que $\exp(\cdot)$ es continua, y la respuesta correcta
(vi)	0.5 ptos.	por llegar a la forma $\lim(1+\frac{1}{a_n})^n$
	0.3 ptos.	por recordar/mencionar $\lim(1+\frac{1}{a_n})^n=\exp(\lim a_n)$
	0.2 ptos.	por el valor del límite

Observaciones: en (vi) se planteó la pauta para la primera forma. Para la segunda el puntaje es aproximadamente 0.2 ptos. por cada paso en el desarrollo de esta pauta (son 6 pasos, por eso lo de *aproximadamente*).

P3.- **(i)** Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$.

a) (2 ptos.) Pruebe que existen $\underline{x}$, $\overline{x}\in[a,b]$ tales que

$$f(\underline{x})\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\le f(\overline{x}) \qquad \forall x_1,x_2\in[a,b].$$

b) (2 ptos.) Demuestre que dados x_1, $x_2\in[a,b]$ cualesquiera existe $\beta\in[a,b]$ tal que

$$f(\beta)=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Indicación: utilice los teoremas sobre funciones continuas en un intervalo $[a,b]$.

(ii) (2 ptos.) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función que satisface:

$f(x) \leq 0 \quad \forall x \leq 0,$

$f(x) \geq 1 \quad \forall x > 0.$

Pruebe que f no es continua en cero.

Pauta. **(i)** **a)** La idea es escoger $\underline{x}$ como el mínimo de f y $\overline{x}$ como el máximo. En efecto, como f es continua en $[a, b]$ y $[a, b]$ es un intervalo cerrado y acotado, f alcanza su mínimo sobre $[a, b]$, es decir, existe $\underline{x} \in [a, b]$ tal que

$$f(\underline{x}) \leq f(x) \qquad \forall x \in [a, b]. \tag{5}$$

Del mismo modo f alcanza su máximo sobre $[a, b]$, es decir existe $\overline{x} \in [a, b]$ tal que

$$f(\overline{x}) \geq f(x) \qquad \forall x \in [a, b]. \tag{6}$$

Ahora sean x_1, $x_2 \in [a, b]$. Por la propiedad (5) tenemos que

$$f(x_1) \leq f(\overline{x}) \quad \mathrm{y} f(x_2) \leq f(\overline{x})$$

y sumando

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \leq f(\overline{x}).$$

Similarmente por (6)

$$f(x_1) \geq f(\underline{x}) \quad \mathrm{y} f(x_2) \geq f(\underline{x})$$

y sumando

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f(\underline{x}).$$

b) Si x_1, $x_2 \in [a, b]$ por la parte anterior sabemos que al definir $c = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ tenemos

$$f(\underline{x}) \leq c \leq f(\overline{x}).$$

Aplicando el teorema del valor intermedio a la función f sobre el intervalo $[\underline{x}, \overline{x}]$ si $\underline{x} \leq \overline{x}$ y sobre el intervalo $[\overline{x}, \underline{x}]$ en caso contrario deducimos que existe β en este intervalo tal que $f(\beta) = c$.

(ii) FORMA 1:

Si $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ no existe entonces f no puede ser continua en 0. Analicemos el caso en que este límite lateral existe. Entonces de la condición $f(x) \geq 1$ para todo $x > 0$ deducimos que

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \geq 1,$$

pero $f(0) \leq 0$ por lo que f no puede ser continua en 0.

FORMA 2: escogiendo la sucesión $1/n$ vemos que

$$\lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

o bien no existe, o si existe es mayor o igual que 1. Luego f no puede ser continua.

FORMA 3: eligiendo $\varepsilon = 1/2$ vemos que para todo $\delta > 0$ existe x con $|x| < \delta$ ($x = \delta/2$ sirve) tal que $f(x) = 1$, es decir

$$|f(x) - f(0)| \geq \varepsilon.$$

Puntaje.

(i)	a)	0.6 ptos.	por elegir (o darse cuenta) que $\underline{x}$ y $\overline{x}$ son el mínimo y máximo de f
		0.6 ptos.	por argumentar, citando el teorema correcto, que el mínimo y máximo de f sobre $[a, b]$ existen
		0.8 ptos.	deducir las desigualdades que se pide
	b)	0.5 ptos.	por mencionar el teorema del valor intermedio (y decir que f es continua, por lo que el teo. vale)
		0.5 ptos.	por darse cuenta que conviene aplicar el teorema en $[\underline{x}, \overline{x}]$ (en el caso $\underline{x} \leq \overline{x}$)
		0.5 ptos.	por verificar que $(f(x_1) + f(x_2))/2$ está en el rango apropiado (que es una de las hipótesis del teorema)
		0.5 ptos.	por un argumento ordenado
(ii)		0.7 ptos.	por elegir una sucesión o un valor de $\varepsilon > 0$ útil
		1.3 ptos.	por el resto del argumento

<u>Observaciones</u>: en (ia) los puntos $\underline{x}$ y $\overline{x}$ **tienen** que ser mínimo y máximo de f sobre $[a, b]$ respectivamente.

En (ii) hay gran variedad de formas de argumentar. Por lo que el puntaje descrito anteriormente es una sugerencia solamente.

De cualquier manera que se proceda es importante:

que esté presente la definición de continuidad, o propiedades equivalentes a ella (1 pto.),

que la lógica sea correcta (1 pto.).

Control 3 MA12A Cálculo
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2005-1 (30 de Junio)

P1. a) Considere la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\beta (1-e^x)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

i) Justifique porque f es continua $\forall x \in I\!R - \{0\}, \forall \beta \in I\!R$. **(1.0 pto.)**

ii) Pruebe que si $\beta > -1$, entonces f es continua $\forall x \in I\!R$. **(2.0 ptos.)**

iii) Para $\beta = -1$, utilice la sucesión $x_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$ para probar que f no es continua en $x = 0$. Justifique. **(1.0 pto.)**

b) Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x} = ln\, a, a > 0$ y úselo para calcular $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{ln(1+x)}$ **(2.0 ptos.)**

P2. a) Para la función $f(x) = 1 + x\, e^{1/x}$, encuentre

i) Su asíntota oblicua. **(1.5 ptos.)**

ii) (1) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, (2) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, (3) Asíntotas verticales de f, si las hay. **(1.5 ptos.)**
(Indicación: Para (2) haga $x = \frac{1}{t}$ y use $e^t > t^2 \quad \forall t \in I\!R^+$)

iii) Demuestre que $\exists x_0 \in [-2, -1]$ t.q. $f(x_0) = 0$. Justifique. **(1.0 pto.)**

b) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{a|x| + \mathrm{sen}\,\pi x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ b & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Calcule los límites laterales $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ y encuentre los valores de a y b para que f sea continua en $x = 0$. **(2.0 ptos.)**

P3. i) Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$, $a < b$ y tales que $f(a) \neq f(b)$, $f(a) = -g(b)$ y $f(b) = -g(a)$.
Pruebe que $\exists x_0 \in [a, b]$ t.q. $f(x_0) = -g(x_0)$ y para $f(x) = (x-a)^n$ y $g(x) = -(b-x)^n$ con $n \in I\!N - \{0\}$, verifique que se cumplen las hipótesis anteriores y calcule, para este caso, el valor de $x_0 \in [a, b]$ **(3.0 ptos.)**

ii) Considere F y G continuas en x_0 y tales que $F(x_0) < G(x_0)$.
Demuestre que $\exists \delta > 0$ t.q. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, $F(x) < G(x)$. **(1.5 ptos.)**

iii) Si $h(x) = x^3 - x^2 + x$ demuestre que $\exists\ x_0 \in I\!R$ tal que $h(x_0) = 10$. Justifique
(1.5 ptos.)

TIEMPO: 3 horas.

Pauta Control #3 MA12A Cálculo
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2005-1

El objetivo de esta pauta es orientar la corrección de los ayudantes y dar al alumno una guía de estudio. Es responsabilidad del alumno tener una copia de esta pauta para el día de la revisión de su prueba. Esta se puede obtener en la página:
http://www.dim.uchile.cl/~lmella/MA12A.html en formato ps o pdf.

Problema 1

a) Considere la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\beta(1-e^x)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

i) Justifique porque f es continua $\forall x \in I\!R - \{0\}$, $\forall \beta \in I\!R$.
f es continua en $I\!R - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ porque en esos intervalos las funciones $|x|, e^x, \mathrm{sen}\,x, 1/x$ son continuas y se puede aplicar los teoremas sobre algebra y composición de funciones continuas. Observar que en $I\!R - \{0\}, 1/x$ o $|x|^\beta, \beta < 0$, no anulan sus denominales. **(1.0 pto.)**

ii) Para $\beta > -1$, probar que f es continua en $I\!R - \{0\}$.
f es continua en $I\!R - \{0\}$ para $\forall \beta \in I\!R$ segun (i).
Para estudiar la continuidad en $x = 0$ calculamos
$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \left\{|x|^\beta(1-e^x)\,\mathrm{sen}\,\frac{1}{x}\right\} = \lim\limits_{x\to 0} \left\{|x|^{\beta+1}\ \frac{1-e^x}{|x|}\ \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right\}$ **(1.0 pto.)**
Observar que $\lim\limits_{x\to 0}\ \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe, pero $\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ es acotada, $\left|\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq k$.
Además $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-e^x}{|x|} \to \mp 1$ según $x \to 0^+$ o $x \to 0^-$ y $\lim\limits_{x\to 0} |x|^{\beta+1} = 0$, si $\beta + 1 > 0$ es decir $\beta > -1$
En tal caso $\lim\limits_{x\to 0} |x|^{\beta+1}\ \frac{1-e^x}{|x|}\ \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ lo que puede fundamentarse con

$$\underset{\substack{\downarrow\\0}}{0} < \left| |x|^{\beta+1}\ \frac{1-e^x}{|x|}\ \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right| < \underset{\substack{\downarrow\\0}}{|x|_0^{\beta+1}} \left|\frac{1-e^x}{|x|}\right| k \quad \underset{\substack{\downarrow\\0}}{}$$

Como $f(0) = 0$ se concluye que f es continua en 0 si $\beta > -1$.
Es decir f es continua $\forall x \in I\!R$ si $\beta > -1$. **(1.0 pto.)**

iii) Para $\beta = -1$, utilice la sucesión $x_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$ para probar que f no es continua en $x = 0$. Justifique.
La sucesión $x_n = \frac{1}{2n\pi+\pi/2} \to 0^+$ cuando $n \to \infty$ de modo que si f es continua en 0, debe cumplirse que $f(x_n) \to f(0) = 0$ (Para toda x_n t.q. $x_n \to 0$).
Pero $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} |x_n|^{-1}(1-e^{x_n})\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) \quad (\beta = -1)$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-e^{x_n}}{|x_n|}\ \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1-e^{x_n}}{x_n}\right) \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right)$ **(0.5 ptos.)**
en que $|x_n| = x_n$ pués $x_n \to 0^+$.
Pero $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-e^{x_n}}{x_n} = -1$ cuando $x_n \to 0$ y
$\lim\limits_{n\to\infty}\ \mathrm{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{sen}(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 1.$

Sigue que $f(x_n) \to -1$ con $x_n \to 0^+$.
Así $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -1 \neq f(0) = 0$.
Se concluye que f no es continua en 0 si $\beta = -1$. **(0.5 ptos.)**

b) Demuestre que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = ln\ a, a > 0$ y úselo para calcular $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{ln(1+x)}$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{ln\ a^x}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x\ ln\ a}-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{x\ ln\ a}-1}{x\ ln\ a} \cdot ln\ a$.

Como $x\ ln\ a \to 0$ $\quad \lim \underbrace{\frac{e^{x\ ln\ a}-1}{x\ ln\ a}}_{\to 1} \cdot ln\ a = ln\ a$. **(1.0 pto.)**

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{ln(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{(a^x-1)-(b^x-1)}{ln(1+x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\frac{a^x-1}{x} - \frac{b^x-1}{x}}{\frac{ln(1+x)}{x}}$ en que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$.

Sigue que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x-b^x}{ln(1+x)} = \frac{ln\ a - ln\ b}{1} = ln\left(\frac{a}{b}\right)$. **(1.0 pto.)**

Problema 2

a) Para la función $f(x) = 1 + xe^{1/x}$, encuentre

i) Su asintota oblicua.
La asintota oblicua es de la forma $y = mx + n$ en que
$m = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+xe^{1/x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}(1 + e^{1/x}) = 1$, puesto que $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ entonces $e^{1/x} \to e^0 = 1$ si $x \to \infty$. **(0.5 ptos.)**
Además $n = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\infty}(1 + xe^{1/x} - x)$
$= \lim\limits_{x\to\infty}[1 + x(e^{1/x} - 1)] = 1 + \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{1/x}-1}{1/x}$ en que $\frac{1}{x} \to 0$ entonces con
$y = \frac{1}{x} \Rightarrow n = 1 + \lim\limits_{y\to 0} \frac{e^y-1}{y} = 1 + 1 = 2.$
Entonces la asintota oblicua es $\boxed{y = x + 2}$ **(1.0 pto.)**

ii) 1) $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$, 2) $\lim\limits_{x\to 0^+}$ 3) Asíntotas verticales, si las hay.
1) $\lim\limits_{x\to 0^-} = \lim\limits_{x\to 0^-}(1 + xe^{1/x}) = 1 + 0 \cdot 0 = 1$ (pués $\frac{1}{x} \to -\infty \Rightarrow e^{1/x} \to 0$). **(0.5 ptos.)**
2) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(1 + xe^{1/x}) = 1 + \lim\limits_{x\to 0^+} xe^{1/x} = 1 + \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^{1/x}}{1/x}$.
Si $1/x = t$ entonces $t \to \infty$ cuando $x \to 0^+$.
Así $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{e^t}{t}$ pero $\frac{e^t}{t} > \frac{t^2}{t} = t \to \infty$. **(0.7 ptos.)**
De modo que $f(x) \to \infty$ si $x \to 0^+$.
3) Existe asintota vertical $x = 0$ (eje OY) por lo anterior. **(0.3 ptos.)**

iii) Demuestre que $\exists x_0 \in [-2, -1]$ t.q. $f(x_0) = 0$.
En efecto, f es continua en $[-2, -1]$ pués $1/x$ y $e^{1/x}$ lo son.
Además $f(-2) = 1 - 2e^{-1/2} = 1 - \frac{2}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}-2}{\sqrt{e}} < 0 \quad (\sqrt{e} < 2)$
y $f(-1) = 1 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0 \quad (e > 1)$ **(0.5 ptos.)**
Es decir $f(-2) \cdot f(-1) < 0$. Entonces por TEO. Valor Intermedio $\exists x_0 \in [-2, -1]$ tal que $f(x_0) = 0$.
(0.5 ptos.)

b) Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{a|x|+\operatorname{sen}\pi x}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ b & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Calcule los límites $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ y encuentre los valores de a y b para que f sea continua en $x = 0$
$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{ax+\operatorname{sen}\pi x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[a + \frac{\operatorname{sen}\pi x}{x}\right] = a + \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\pi x}{x}$ en que $|x| = x$ pués $x \in I\!R^+$.
Además $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\pi x}{x} = \pi \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}\pi x}{\pi x} = \pi \cdot 1 = \pi$.
Entonces $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = a + \pi$. **(0.5 ptos.)**
$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\left[\frac{-ax+\operatorname{sen}\pi x}{x}\right] = -a + \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{\operatorname{sen}\pi x}{x} = -a + \pi$ **(0.5 ptos.)**
en donde $|x| = -x$ pués $x \in I\!R$.
Además, f es continua en 0 si $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$, es decir $\begin{cases} a + \pi = -a + \pi \\ a + \pi = b \end{cases}$
de donde $2a = 0 \Rightarrow \underline{a = 0} \ \wedge \ \underline{b = \pi}$ **(1.0 pto.)**

Problema 3

i) Sean f, g funciones continuas en $[a,b], a < b$ y tales que
$f(a) \neq f(b), f(a) = -g(b), f(b) = -g(a)$.
Pruebe que $\exists x_0 \in [a,b]$ t.q. $f(x_0) = -g(x_0)$ y para $f(x) = (x-a)^n \quad \wedge \quad g(x) = -(b-x)^n$ con $n \in I\!\!N - \{0\}$, verifique que se cumplen las hipótesis anteriores y calcule, para ese caso, el valor de $x_0 \in [a,b]$.
Definamos la función $H : [a,b] \to I\!\!R$ por $H(x) = f(x) + g(x)$.
$H(x)$ es continua en $[a,b]$ puesto que f y g lo son.
Además $H(a) = f(a) + g(a) = f(a) - f(b) \qquad (g(a) = -f(b)$ por hipotesis)
$H(b) = f(b) + g(b) = f(b) - f(a) \qquad (g(b) = -f(a)$ por hipotesis).
Entonces como $f(a) \neq f(b), H(a)H(b) = -[f(a) - f(b)]^2 < 0$. **(1.0 pto.)**
Entonces H es tal que es continua en $[a,b] \quad \wedge \quad H(a) \cdot H(b) < 0$.
Así por TEO del Valor Intermedio (También Teorema de las Raíces)
$\exists x_0 \in [a,b]$ t.q. $H(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) + g(x_0) = 0$.
Es decir $\exists x_0 \in [a,b]$ t.q. $f(x_0) = -g(x_0)$. **(1.0 pto.)**
Además $f(x) = (x-a)^n \Rightarrow f(a) = 0 \quad \wedge \quad f(b) = (b-a)^n \neq 0 = f(a)$
$g(x) = -(b-x)^n \Rightarrow g(b) = 0 \quad \wedge \quad g(a) = -(b-a)^n$.
Entonces $f(a) = 0 = -0 = -g(b) \quad \wedge \quad f(b) = -g(a)$ con lo cual se cumplen las hipotesis originales.
Así $f(x_0) = -g(x_0) \Rightarrow$ en este caso, $(x_0 - a)^n = -[-(b - x_0)^n]$
$\Rightarrow (x_0 - a)^n = (b - x_0)^n / \sqrt[n]{\quad} \Rightarrow x_0 - a = b - x_0$

$$\therefore \quad x_0 = \frac{a+b}{2} \in [a,b]$$ **(1.0 pto.)**

ii) Considere F, G continuas en x_0 y tales que $F(x_0) < G(x_0)$.
Demuestre que $\exists \delta > 0$ t.q. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), F(x) < G(x)$.
Definamos $H(x) = G(x) - H(x)$ continuas en x_0 puesto que G y F lo son.
Además, $H(x_0) = G(x_0) - H(x_0) > 0$ por hipotesis. **(0.5 ptos.)**
Por propiedad puntual de las funciones continuas, $\exists \delta > 0$ t.q. $H(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, es decir H conserva el signo $(H(x_0) > 0)$ en una vecindad de x_0.
Entonces $\exists \delta > 0$ t.q. $G(x) - F(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
o bien $\exists \delta > 0$ t.q. $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \quad F(x) < G(x)$. **(1.0 pto.)**
OBS. También puede abordarse con uso de sucesiones $u_n \to x_0 \quad \wedge \quad F(u_n) < G(u_n) \ldots$ etc.

iii) Si $h(x) = x^3 - x^2 + x$ demuestre que $\exists x_0 \in I\!\!R$ tal que $h(x_0) = 10$. Justifique.
$h(x)$ es un polinomio y por lo tanto continua $\forall x \in I\!\!R$.
Por ejemplo $h(2) = 6 \quad \wedge \quad h(3) = 21$ **(0.5 ptos.)**
Así, $\qquad h(2) < 10 < h(3)$.
Entonces, por TEO Valor Intermedio, $[h(2), h(3)]$ es un intervalo, es decir, todo elemento de el tiene preimagen por h en $[2,3]$.
Así $\exists x_0 \in [2,3]$ t.q. $h(x_0) = 10$. **(1.0 pto.)**

quotes,angles

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introducción al Cálculo. MA1001

Control 3

P1. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida por:

$$f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{2|x| - 6}}$$

a) (1.0 pto) Demuestre que el dominio de f es $A = [-11, -3] \cup [3, 11]$.

b) (1.0 pto) Determine ceros, signos y paridad de la función.

c) (1.5 ptos.) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

d) (1.0 pto) Determine $f(A)$, la imagen de f, y explique por qué la función no es inyectiva y no es epiyectiva (sobreyectiva).

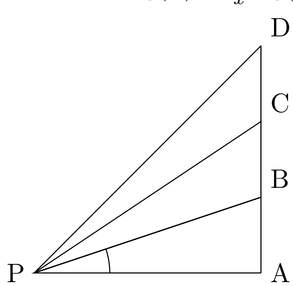
e) (1.0 pto) Determine el mayor intervalo $I \subset A$ donde la función sea inyectiva y decreciente, de modo que la restricción

$$\begin{aligned} f\big|_I :& I \longrightarrow f(I) \\ & x \longrightarrow f(x) \end{aligned}$$

resulte ser biyectiva. Calcule la inversa de la función restringida.

f) (0.5 ptos.) Bosqueje el gráfico de f basado en las partes anteriores.

P2. *a*) (3 ptos.) Una persona mira desde el punto P el edificio AD de la figura, de modo que el ángulo α que subtienden los primeros pisos (AD)es igual al ángulo que subtienden los últimos pisos (CD). Si se conocen a, b y c, pero no el ángulo α, encuentre la distancia $x = PA$ en función de a, b y c.
Indicación: $\text{tg}(\alpha) = \frac{a}{x}; \text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{a+b}{x}; \text{tg}(2\alpha + \beta) = \frac{a+b+c}{x}$



b) (3 ptos.) Determine la siguiente identidad:

$$\frac{1}{\cot(\theta) + \cot^3(\theta)} + \frac{1}{\text{tg}(\theta) + \text{tg}^3(\theta)} + \text{sen}(2\theta) = \sec(\theta)\,\text{cosec}(\theta)$$

Tiempo: 1:15 horas.

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introducción al Cálculo. MA1001

Control 3

P1. Sea $a \in \mathbb{R}, a > 0$. Se define $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \frac{|x|}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

a) (1.5 ptos.) Determine $A = Dom(f)$ y $f(A) = Im(f)$

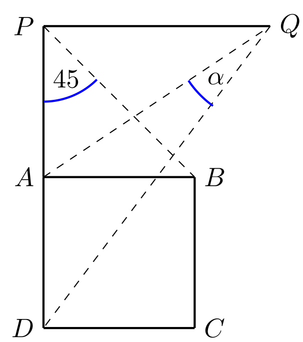
b) (1.5 ptos.) Encuentre los ceros de f. Estudie paridad, inyectividad, epiyectividad, existencia de asíntotas.

c) (2.0 ptos) Demuestre que $f : A \cap [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ es estrictamente creciente.

d) (1.0 ptos) Realice un bosquejo de la función que ilustre todo lo calculado en los puntos anteriores.

P2. a) (4.0 ptos.) Una construcción de base cuadrada $ABCD$ tiene los lados AB y CD paralelos a las riberas de un río. Un observador que está en la ribera del río más lejana a la construcción, en la misma recta en la que está DA, halla que desde su posición P el lado AB subtiende a su vista un ángulo de $45°$, y después de trasladarse a metros por la ribera hasta una nueva posición Q, encuentra que desde ella el lado DA subtiende a su vista un ángulo cuyo seno es $\frac{1}{3}$.

Demuestre que la longitud de cada lado de la base es $\frac{1}{2}a\sqrt{2}$



b) (2.0 ptos) Resuelva la ecuación:

$$\operatorname{sen}(2x)\cot(x) - \operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}$$

Tiempo: 1:15 horas.

Introducción al Cálculo (MA1001)

Control 3 Pauta Problema 1

$a \in \mathbb{R},\ a>0.\ f: A \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{a^2-x^2}}$

1) Para que f esté bien definida $\mathrm{Dom} f = A = \{x \in \mathbb{R} / a^2 - x^2 > 0\}$

(1.0) $= \{x \in \mathbb{R} / x^2 < a^2\} = (-a, a)$

Para valores de x cercanos a $\pm a^{\mp}$, f crece sin cota.

(0.5) Así $\mathrm{Im} f = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

2) Ceros de $f = \{0\}$

(0.5) $f(-x) = \dfrac{|-x|}{\sqrt{a^2-(-x)^2}} = \dfrac{|x|}{\sqrt{a^2-x^2}} = f(x)$. Sigue que f es PAR

f no es inyectiva pues es par.

f No es epiyectiva pues $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \neq \mathbb{R}$ (codominio)

(1.0) $x = a^-$ y $x = -a^+$ son asíntotas verticales de f

3) Demostrar que $f: A \cap [0,\infty) \to \mathbb{R}$ es creciente estricta.

$A \cap [0,\infty) = [0, a)$. Entonces, sean $0 < x_1 < x_2 < a$

$\Rightarrow 0 < x_1^2 < x_2^2 \Rightarrow 0 > -x_1^2 > -x_2^2 \Rightarrow a^2 - x_1^2 > a^2 - x_2^2 > 0$

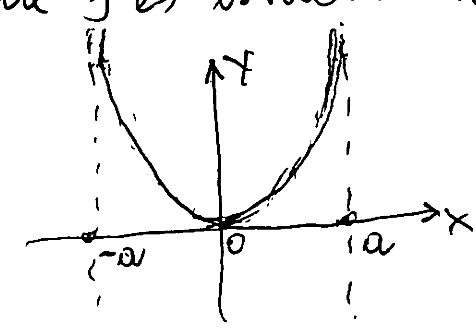
(1.5) $\xRightarrow{\sqrt{\ }\ \text{creciente}} \sqrt{a^2-x_1^2} > \sqrt{a^2-x_2^2} > 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x_1^2}} < \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x_2^2}}$

y además $0 < x_1 < x_2 \Rightarrow \dfrac{x_1}{\sqrt{a^2-x_1^2}} < \dfrac{x_2}{\sqrt{a^2-x_2^2}} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

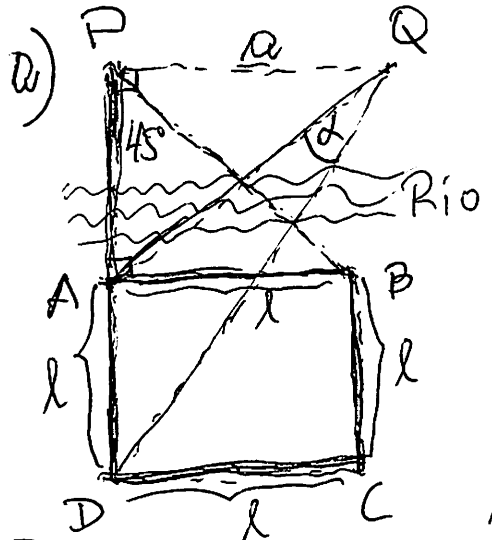
(0.5) Sigue que f es estrictamente creciente en $[0, a)$

4) Bosquejo

(1.0)



Pauta Problema 2

a) 

Sea l el lado del cuadrado ABCD

En $\triangle PAB$ $\measuredangle APB = 45° \Rightarrow \measuredangle PBA = 45°$

es decir $\triangle PAB$ es rectángulo isosceles $\Rightarrow \overline{PA} = l$

Además $\triangle APQ$ es rectángulo en P

Así $\overline{AQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PQ}^2 = l^2 + a^2$

Además $\triangle DPQ$ es rectángulo en P ($\measuredangle DPQ = 90°$)

1.5 con $\overline{DP} = 2l$ y $\overline{PQ} = a \Rightarrow \overline{DQ}^2 = \overline{DP}^2 + \overline{PQ}^2 = 4l^2 + a^2$

Entonces se puede aplicar el teorema del coseno al $\triangle DAQ$

donde $\overline{DA}^2 = l^2$, $\overline{AQ}^2 = l^2 + a^2$, $\overline{DQ}^2 = 4l^2 + a^2$ y $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{3}$ de donde

$\cos\alpha = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$

Sigue que $\overline{DA}^2 = \overline{AQ}^2 + \overline{DQ}^2 - 2\overline{AQ}\,\overline{DQ}\cos\alpha$

$\Rightarrow \cancel{l^2} = \cancel{l^2} + a^2 + 4l^2 + a^2 - 2\sqrt{l^2+a^2}\sqrt{4l^2+a^2}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2}$

1.5 $\Rightarrow \cancel{2}\sqrt{(l^2+a^2)(4l^2+a^2)}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{2} = \cancel{4}^{2}l^2 + \cancel{2}a^2 \Rightarrow \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{4l^4+5l^2a^2+a^4} = 2l^2+a^2$

$\xrightarrow{()^2} \frac{8}{9}(4l^4+5l^2a^2+a^4) = 4l^4+4l^2a^2+a^4 \Rightarrow 4l^4 - 4a^2l^2 + a^4 = 0$

1.0 $\Rightarrow (2l^2-a^2)^2 = 0 \Rightarrow 2l^2 - a^2 = 0 \Rightarrow l = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$

b) Resolver la ecuación $\operatorname{sen}(2x)\cot(x) - \operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}$

$\operatorname{sen}(2x)\cot(x) - \operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\cancel{\operatorname{sen}(x)}\cos(x)\frac{\cos(x)}{\cancel{\operatorname{sen}(x)}} - \operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}$ $\quad \operatorname{sen}x \neq 0$, $x \neq k\pi$

$\Rightarrow 2\cos^2(x) - (1-\cos^2 x) = 1/2 \Rightarrow 3\cos^2(x) - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \cancel{3}\cos^2(x) = \cancel{3}/2$

1.0 $\Rightarrow \cos^2(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

Sigue que $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x_1 = 2k\pi \pm \pi/4$

1.0 $\cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x_2 = 2k\pi \pm 3\pi/4$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introducción al Cálculo 2018-1

Control 3

P1)

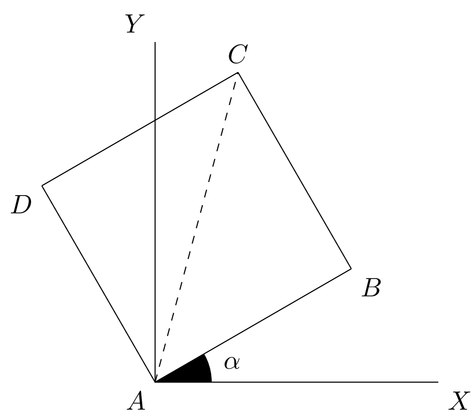
a) Demostrar las siguientes identidades

I) (1.5 ptos) $\operatorname{cosec}^4(\alpha) - \cot^4(\alpha) - 2\cot^2(\alpha) = 1$

II) (1.5 ptos) $\cos^2(\alpha) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} - \alpha\right) = \dfrac{3}{2}$

b) (3.0 ptos) El cuadrado $ABCD$ de la figura tiene el vértice A en el origen y su lado AB, de magnitud a, está inclinado con respecto al eje OX en un ángulo α. Determine en función de a y α las coordenadas de los vértices B y D y demuestre que la ecuación de la diagonal AC es

$$AC: \ (\sin(\alpha) + \cos(\alpha))x + (\sin(\alpha) - \cos(\alpha))y = 0$$



P2) Considere la función definida por

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$$

I) (3.0 ptos.) Determine: $\mathrm{Dom}(f)$, ceros, signos de f, asíntotas y el conjunto imagen de f: $Im(f)$.

II) (2.0 ptos.) Demuestre que f es monótona en $\mathrm{Dom}(f) \cap (-1, \infty)$ y en $\mathrm{Dom}(f) \cap (-\infty, -1)$.

III) (1.0 pto.) Con los antecedentes de las partes anteriores, haga un gráfico aproximado de f.

Tiempo: 1 hora 15 minutos.

Introducción al Cálculo (MA1001)

Control 3 - Pauta Problema 1

a) Demostrar las siguientes identidades.

i) $\operatorname{cosec}^4(\alpha) - \cot^4(\alpha) - 2\cot^2(\alpha) = 1$

0.5 $\quad 1^{er}$ Miembro $= \dfrac{1}{\operatorname{sen}^4(\alpha)} - \dfrac{\cos^4(\alpha)}{\operatorname{sen}^4(\alpha)} - \dfrac{2\cos^2(\alpha)}{\operatorname{sen}^2(\alpha)} = \dfrac{\overbrace{1-\cos^4(\alpha)}^{(1-\cos^2\alpha)(1+\cos^2\alpha)} - 2\cos^2(\alpha)\operatorname{sen}^2(\alpha)}{\operatorname{sen}^4(\alpha)}$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2(\alpha)(1+\cos^2(\alpha)) - 2\cos^2(\alpha)\operatorname{sen}^2(\alpha)}{\operatorname{sen}^4(\alpha)} = \frac{\operatorname{sen}^2(\alpha) + \cancel{\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha} - 2\operatorname{sen}^2\alpha\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^4(\alpha)}$$

1.0 $\quad = \dfrac{\operatorname{sen}^2(\alpha) - \operatorname{sen}^2(\alpha)\cos^2(\alpha)}{\operatorname{sen}^4(\alpha)} = \dfrac{\operatorname{sen}^2(\alpha)\overbrace{(1-\cos^2(\alpha))}^{\operatorname{sen}^2\alpha}}{\operatorname{sen}^4(\alpha)} = \dfrac{\operatorname{sen}^4(\alpha)}{\operatorname{sen}^4(\alpha)} = 1 = 2^{o}$ Miembro

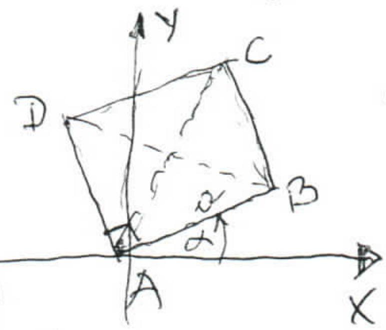
ii) $\cos^2(\alpha) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right) = 3/2$

0.5 $\quad 1^{er}$ Miembro $= \cos^2(\alpha) + \left(\cos\frac{2\pi}{3}\cos\alpha - \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\operatorname{sen}\alpha\right)^2 + \left(\cos\frac{2\pi}{3}\cos\alpha + \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}\operatorname{sen}\alpha\right)^2$

$= \cos^2(\alpha) + 2\cos^2\frac{2\pi}{3}\cos^2\alpha + 2\operatorname{sen}^2\frac{2\pi}{3}\operatorname{sen}^2\alpha \qquad$ con $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

1.0 $\quad = \cos^2(\alpha) + \cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{4}_2}\cos^2(\alpha) + \cancel{2}\,\frac{3}{\cancel{4}_2}\operatorname{sen}^2(\alpha) = \frac{3}{2}\cos^2(\alpha) + \frac{3}{2}\operatorname{sen}^2(\alpha) = \frac{3}{2}\underbrace{(\cos^2(\alpha)+\operatorname{sen}^2(\alpha))}_{1} = \frac{3}{2}$

b)



1.0

Coordenadas para B, según proyecciones

$x_B = a\cos\alpha$, $y_B = a\operatorname{sen}\alpha \quad B(a\cos\alpha, a\operatorname{sen}\alpha)$

Para D $\quad x_D = a\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -a\operatorname{sen}\alpha$

$y_D = a\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = a\cos\alpha$

$D(-a\operatorname{sen}\alpha, a\cos\alpha)$

Recta AC $\perp$ recta DB (Diagonales)

y $m_{DB} = \dfrac{\cancel{a}\cos\alpha - \cancel{a}\operatorname{sen}\alpha}{-\cancel{a}\operatorname{sen}\alpha - \cancel{a}\cos\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha}$ y $m_{AC} = -\dfrac{1}{m_{DB}}$

1.5 $\quad \Rightarrow m_{AC} = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)+\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)-\operatorname{sen}(\alpha)}$. Así AC: $y = m_{AC}x = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha)+\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)-\operatorname{sen}(\alpha)}x$

0.5 $\quad \Rightarrow (\operatorname{sen}(\alpha)+\cos(\alpha))x + (\operatorname{sen}(\alpha)-\cos(\alpha))y = 0$

Pauta Problema 2

$$f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^2-1}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x+1)},\quad f(x)=\frac{x+3}{x+1} \text{ si } x\neq 1$$

i) $\mathrm{Dom} f=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, Ceros $=\{-3\}$. $\cap$ eje OY: $(0,3)$

0.5 Signo: $f(x)>0$ si $x\in(-\infty,-3)\cup(-1,\infty)$

1.0 $f(x)<0$ si $x\in(-3,-1)$

Asíntotas: $y=\frac{a_n x^n+\dots+a_0}{b_n x^n+\dots+b_0}$ en este caso $y=\frac{a_n}{b_n}=\frac{1}{1}=1$ es asíntota horizontal.

Vertical si $x+1=0 \Rightarrow x=-1$ es asíntota vertical.

1.5 $\mathrm{Im} f$: f no está definida en $x=1$ y tiene asíntota horizontal $y=1$. Entonces $\mathrm{Im} f=\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$

ii) f es monótona en $\mathrm{Dom} f\cap(-1,\infty)$

En efecto, sea $-1<x_1<x_2 \Rightarrow 0<x_1+1<x_2+1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{x_1+1}>\frac{1}{x_2+1} \overset{\cdot 2}{\Rightarrow} \frac{2}{x_1+1}>\frac{2}{x_2+1}\Rightarrow 1+\frac{2}{x_1+1}>1+\frac{2}{x_2+1}\Rightarrow\frac{x_1+3}{x_1+1}>\frac{x_2+3}{x_2+1}$$

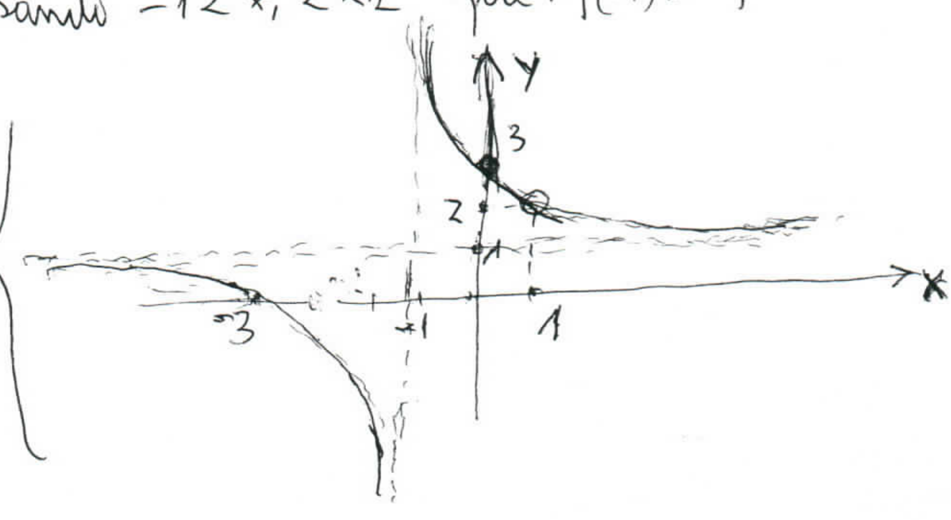
2.0 $\Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$, así f es decreciente en $(-1,\infty)\cap\mathrm{Dom} f$.

Análogamente f es decreciente en $\mathrm{Dom} f\cap(-\infty,-1)$

ALTERNATIVA: También puede formarse $f(x_1)-f(x_2)$ y probar, usando $-1<x_1<x_2$ que $f(x_1)>f(x_2)$

iii)

1.0



Solución Control 3, MA1001 Introducción al Cálculo
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2007/1 (14 de Abril)

P1) Considere la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, donde $0<b<a$ y su punto superior $A(0,b)$. Por un punto $P(x_0,y_0)$ (con $x_0\neq 0$) que se mueve sobre la elipse, se traza la recta AP, la que corta al eje OX en Q.

Determine el lugar geométrico de la intersección de la recta OP (O es el origen) con la recta vertical por Q.

Solución Alternativa 1: Sean $M(\alpha,\beta)$ las coordenadas de un punto cualquiera del Lugar Geométrico buscado. En términos de ellas se tiene que $Q(\alpha,0)$. 0

Por lo tanto, la recta AQ tiene por ecuación $\alpha y=-bx+b\alpha$. 0.5

La recta OM tiene por ecuación: $\alpha y=\beta x$.

Intersectando las dos rectas se obtienen las coordenadas del punto P: 0.5

$$\beta x=-bx+b\alpha$$

$$(\beta+b)x=b\alpha$$

Cuando $\beta\neq -b$ se puede calcular x como

$$x=\frac{b\alpha}{\beta+b}$$ 0.5

Si además, $\alpha\neq 0$ se puede calcular y como

$$y=\frac{b\beta}{\beta+b}$$ 0.5

De este modo, en términos de α y β, las coordenadas de P son

$$P\left(\frac{b\alpha}{\beta+b},\frac{b\beta}{\beta+b}\right).$$

Ahora, se tiene que

$$\begin{aligned}
M(\alpha,\beta)\in L.G. &\iff \alpha\neq 0,\ \beta\neq -b \text{ y } \quad \frac{1}{a^2}\left(\frac{b\alpha}{\beta+b}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(\frac{b\beta}{\beta+b}\right)^2=1\\
&\iff \alpha\neq 0,\ \beta\neq -b \text{ y } \quad \frac{b^2}{a^2}\alpha^2+\beta^2=\beta^2+2b\beta+b^2\\
&\iff \alpha\neq 0,\ \beta\neq -b \text{ y } \quad \frac{b^2}{a^2}\alpha^2=2b\beta+b^2\\
&\iff \alpha\neq 0,\ \beta\neq -b \text{ y } \quad \beta=\frac{b}{2a^2}\alpha^2-\frac{b}{2}
\end{aligned}$$ 1.0

Es decir la ecuación del lugar geométrico es 1.0

$$y=\frac{b}{2a^2}x^2-\frac{b}{2},\qquad x\neq 0.$$

La ecuación cuadrática corresponde a una parábola de vértice $(0,-\frac{b}{2})$, eje de simetría $x=0$, foco $F(0,\frac{a^2-b^2}{2b})$, directriz $D: y=-\frac{a^2+b^2}{2b}$. 1

Esta parábola pasa por $(\pm a,0)$ donde corta a la elipse.

El lugar geométrico es la parábola SIN ~~en~~ el vértice. 0,5

Solución Alternativa 2

Sean (x_0, y_0) las coordenadas del punto P que se mueve sobre la elipse, donde $x_0 \neq 0$.

La ecuación de la recta OP es: $y = \frac{y_0}{x_0}x$. 0.5

La ecuación de la recta AP es: $y = \frac{y_0 - b}{x_0}x + b$. 0.5

La recta AP intersecta al eje OX en el punto de coordenadas $x_Q = \frac{bx_0}{b - y_0}$. 0.5

Notemos que como $x_0 \neq 0$ entonces $y_0 \neq b$.

La recta vertical por Q corta a la recta OP en el punto

$$M\Big(\frac{bx_0}{b - y_0}, \frac{by_0}{b - y_0}\Big).$$

Es decir, el Lugar geométrico se encuentra en aquellos puntos de la forma

$$x = \frac{bx_0}{b - y_0}, \qquad y = \frac{by_0}{b - y_0}$$

1.5

con (x_0, y_0) en la elipse.

Eliminación de x_0, y_0:

Claramente de la expresión $y(b - y_0) = by_0$, se puede despejar y_0 como

$$y_0 = \frac{by}{b + y}.$$

luego,

$$(b - y_0) = \frac{b^2}{b + y}$$

y

$$x_0 = (b - y_0)\frac{x}{b} = \frac{bx}{b + y}$$

1.5

Como (x_0, y_0) pertenece a la elipse, se tiene que

$$\left(\frac{bx}{b + y}\right)^2 b^2 + \left(\frac{by}{b + y}\right)^2 a^2 = a^2b^2$$

Es decir, reordenando, la ecuación del lugar geométrico es

$$y = \frac{b}{2a^2}x^2 - \frac{b}{2}, \qquad x \neq 0.$$

La ecuación cuadrática corresponde a una parábola de vértice $(0, -\frac{b}{2})$, eje de simetría $x = 0$, foco $F(0, \frac{a^2 - b^2}{2b})$, directriz $D : y = -\frac{a^2 + b^2}{2b}$. 1.0

Esta parábola pasa por $(\pm a, 0)$ donde corta a la elipse.

El lugar geométrico es la parábola SIN en vértice. 0.5

P2) Estudie completamente la función real de variable real definida por la asignación

$$f(x) = \frac{x}{|x|+1}.$$

Indique dominio, ceros, paridad, crecimiento, acotamiento, asíntotas, conjunto imagen y gráfico aproximado. Además, encuentre la función inversa restringiendo apropiadamente el dominio y codominio si corresponde.

Solución P2

0.6 Dominio: $\mathbb{R}$.

0.6 Ceros: $f(x) = 0$ ssi $x = 0$.

Paridad: $f(-x) = \frac{-x}{|-x|+1} = -\frac{x}{|x|+1} = -f(x)$. Luego la función es IMPAR.

0.6 Basta con seguir estudiando f en $\mathbb{R}_+$, donde vale:

$$f(x) = \frac{x}{x+1} \qquad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

Crecimiento: Claramente si $x > 0$, se tiene que $f(x) = \frac{1}{1+1/x}$. Como $1/x$ decrece en R_+^*, se tiene que $1 + 1/x$ decrece y por lo tanto f es creciente en R_+^*.

0.7 Por simetría, f es estrictamente creciente en su dominio.

Acotamiento: Si $x > 0$ se tiene que $\frac{x}{x+1} < 1$. Por lo anto por simetría, f es acotada superiormente por 1 e inferiormente por -1.

0.7

Asíntotas: Si $x > 0$ tenemos que $f(x) = \frac{x}{x+1}$ que corresponde a una función racional con asíntota horizontal $y = 1$. LA función racional tiene además asíntota vertical en $x = -1$ pero allí la fórmula de f no es válida.

0.7 Por simetría, cuando $x < 0$ la función tiene la asíntota horizontal $y = -1$.

Conjunto Imagen: Resolvamos para $x \geq 0$ la ecuación $f(x) = y$. Tenemos que

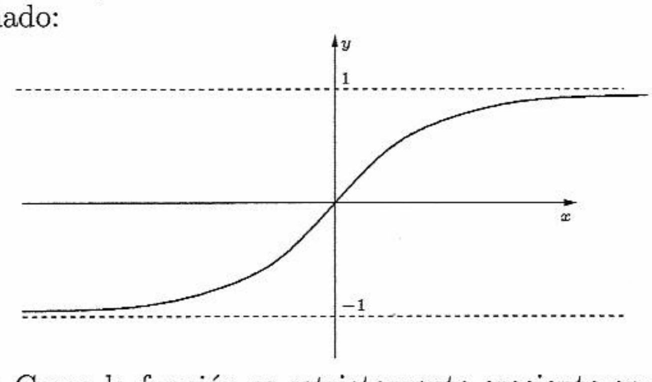
$$\begin{aligned} x \geq 0 \quad \wedge \quad \frac{x}{x+1} = y \quad &\iff \quad x \geq 0 \quad \wedge \quad x = xy + y \\ &\iff \quad x \geq 0 \quad \wedge \quad x = \frac{y}{1-y} \geq 0 \end{aligned}$$

Vemos que x es despejable si $y \neq 1$. Además el despeje entrega $x \geq 0$ cuando $\frac{y}{1-y} \geq 0$, lo que corresponde a una inecuación con solución $y \in [0, 1)$.

0.7 Por lo tanto, El conjunto imagen de f restringida a R_+ es $[0, 1)$.

Por simetría (imparidad), el conjunto imagen de toda la función es el intervalo $(-1, 1)$.

Gráfico Aproximado:



0.7

Función Inversa: Como la función es estrictamente creciente en todo su dominio, es inyectiva. Para que sea biyectiva, basta restringir el codominio al intervalo $(-1, 1)$.

0.7 Si $y \in [0, 1), f^{-1}(y) = \frac{y}{1-y}$ (despeje de más arriba). Si $y \in (-1, 0]$ se debe despejar de la fórmula para $x < 0$, obteniéndose $f^{-1}(y) = \frac{y}{1+y}$.

En una línea:

$$f^{-1}(y) = \frac{y}{1-|y|}, \qquad \forall y \in (-1,1)$$

Control 3, MA1001 Introducción al Cálculo
Departamento de Ingeniería Matemática, FCFM, U. de Chile
Semestre 2008/1 (26 de Abril)

P.1) Considere la función real de variable real definida por la ley $f(x) = \dfrac{2x}{1-|x|}$.

a) (*2.0 ptos.*) Encuentre Dominio, ceros y paridad de f.

Solución

Dominio: $x \in \mathrm{Dom}\,(f)$ ssi $1-|x| \neq 0$. Esto último ocurre ssi $x \notin \{-1,1\}$. Por lo tanto

$$\mathrm{Dom}\,(f) = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty).$$

.... 0.7 ptos.

Ceros: $f(x) = 0$ ssi $2x = 0$. Es decir, la función tiene su cero en $x = 0$. .... 0.6 ptos.

Paridad: $f(-x) = \dfrac{2(-x)}{1-|(-x)|} = -\dfrac{2x}{1-|x|} = -f(x)$. Por lo tanto la función es **impar.** .. 0.7 ptos.

b) (*2.0 ptos.*) Determine asíntotas verticales y horizontales de f.

Indicación: Analice la función en $\mathbb{R}_+$ y use simetrías.

Solución

En $\mathbb{R}_+$ la función es $f(x) = \dfrac{2x}{1-x}$ que tiene una asíntota vertical en $x = 1$ y una asíntota horizontal a la altura $y = -2$. .... 1.0 ptos.

Por imparidad, se deduce que todas las asíntotas verticales de f están en $x = -1$ y $x = 1$ (Los puntos fuera del dominio).

Todas las asíntotas horizontales son $y = 2$ en $\mathbb{R}_+$ y además $y = -2$ en $\mathbb{R}_-$. .... 1.0 ptos.

c) (*2.0 ptos.*) Demuestre que $\forall y > 0$ existe $x \in (0,1)$ tal que $y = f(x)$. Use este resultado para deducir que f restringida al dominio $(-1,1)$ es epiyectiva en $\mathbb{R}$.

Solución

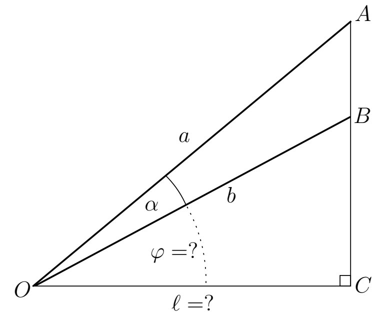
Dado $y > 0$ veamos si existe $x \in (0,1)$ tal que $f(x) = y$.

$y = f(x)$ ssi $y = \frac{2x}{1-x}$ ssi $(1-x)y = 2x$ ssi $y = (2+y)x$ ssi $x = \frac{y}{2+y}$. .... 1.0 ptos.

Esta última ecuación tiene solución para todo $y > 0$. Además su solución $\in (0,1)$ ya que $y < y+2$. .... 0.5 ptos.

Este resultado dice que $f\big((0,1)\big) = \mathbb{R}_+^*$. Por imparidad resulta que $f\big((-1,0)\big) = \mathbb{R}_-^*$ y por lo tanto $f\big((-1,1)\big) = \mathbb{R}$. .... 0.5 ptos.

P.2) En la figura, OAC es un triángulo rectángulo en C y B es un punto interno del lado AC.



Si se conocen solamente los largos de los trazos OA y OB (que valen a y b respectivamente) y el ángulo α formado entre ellos, se desea calcular el largo ℓ del trazo OC.

Para ello introduzca el ángulo auxiliar φ y realice lo siguiente:

a) (*2.5 ptos.*) Use los triángulos OAC y OBC para escribir dos expresiones del lado ℓ en términos de a, b, φ y $\alpha + \varphi$. Use estas expresiones para demostrar que

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{a\cos\alpha - b}{a \operatorname{sen}\alpha}.$$

Solución

En el triángulo OAC se tiene que $\ell = a\cos(\alpha+\varphi)$. .... 0.5 ptos.

En el triángulo OBC se tiene que $\ell = b\cos\varphi$ .... 0.5 ptos.

Igualando estas expresiones se tiene que
$b\cos\varphi = a\cos(\alpha+\varphi) = a\cos\alpha\cos\varphi - a\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi$ .... 1.0 ptos.

Despejando se obtiene que $(a\cos\alpha - b)\cos\varphi = a\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\varphi$, de donde se obtiene la relación pedida. .... 0.5 ptos.

b) (*1.5 ptos.*) Si x, p y q son reales tales que $\operatorname{tg} x = \frac{p}{q}$, demuestre que

$$|\cos x| = \frac{|q|}{\sqrt{p^2+q^2}}.$$

Solución

Si $\operatorname{tg} x = \frac{p}{q}$ entonces $p = q\operatorname{tg} x$ y por lo tanto $p^2+q^2 = q^2(1+\operatorname{tg}^2 x) = q^2\sec^2 x$ .... 0.5 ptos.

Con esto, $\sqrt{p^2+q^2} = |q||\sec x|$. .... 0.5 ptos.

Despejando de aquí y recordando que $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, se obtiene la relación pedida. ...... 0.5 ptos.

c) (*2.0 ptos.*) Usando los resultados anteriores, deduzca que

$$\ell = \frac{ab \operatorname{sen} \alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}.$$

Solución

Como ya sabemos que $\ell = b\cos\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{a\cos\alpha - b}{a \operatorname{sen}\alpha}$, usando la parte **(b)** se tiene que

$$\ell = \frac{ab \operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{(a\cos\alpha - b)^2 + (a \operatorname{sen}\alpha)^2}}$$

. . . . 1.0 ptos.

Desarrollando el cuadrado del denominador y usando que $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$ se obtiene el resultado pedido.

$$\ell = \frac{ab \operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}.$$

. . . . 1.0 ptos.

Control 3

P1. Para las constantes $A, B, C \in \mathbb{R}$, con $A > B$ se definen las funciones reales f, g, h, en todo $x \in \mathbb{R}$, como sigue:

$$
\begin{aligned}
f(x) =& A\cos^2(x) + B\operatorname{sen}^2(x) - 2C\operatorname{sen}(x)\cos(x)\\
g(x) =& A\operatorname{sen}^2(x) + B\cos^2(x) + 2C\operatorname{sen}(x)\cos(x)\\
h(x) =& (A-B)\operatorname{sen}(x)\cos(x) + C(\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x)).
\end{aligned}
$$

Se pide:

(i) (1,5 ptos.) Probar que si $C = 0$, h alcanza su valor máximo para $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) (1,5 ptos.) Demostrar que el conjunto de los ceros de h es

$$\left\{ x \in \mathbb{R} / \tan(2x) = \frac{2C}{B-A} \right\}$$

(iii) (3,0 ptos.) Demostrar que $\forall x \in \mathbb{R}$ los puntos $P(f(x), h(x))$ y $Q(g(x), -h(x))$ conservan una distancia constante entre ellos y que el punto medio del trazo $\overline{PQ}$ es un punto fijo.

P2. Considere la función f definida por $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$. Se pide:

(i) (2,0 ptos.) Encontrar dominio, ceros, signos, paridad y asíntotas de todo tipo.

(ii) (2,0 ptos.) Demostrar que $\forall x_1, x_2 \in \operatorname{Dom}(f)$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{(x_1 - x_2)(1 + x_1 x_2)}{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)}.$$

Use este resultado para estudiar el crecimiento de f indicando en qué intervalos esta función es creciente y en cuales decreciente.

(iii) (1,0 pto.) Calcule $f((1,\infty))$ y pruebe que la función

$$
\begin{aligned}
\tilde{f} : (1,\infty) &\longrightarrow f((1,\infty))\\
x &\longmapsto \tilde{f}(x) := f(x)
\end{aligned}
$$

es biyectiva y determine su inversa.

(iv) (1,0 pto.) Bosqueje el gráfico de f.

25 de abril de 2009
Sin consultas
Tiempo: 1:15 hrs.

Control 3 Introducción al Cálculo MA 1001

Pauta Problema 1

Las funciones $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son

$$f(x) = A\cos^2 x + B\,\text{sen}^2 x - 2C\,\text{sen}\,x\cos x$$
$$g(x) = A\,\text{sen}^2 x + B\cos^2 x + 2C\,\text{sen}\,x\cos x$$
$$h(x) = (A-B)\,\text{sen}\,x\cos x + C(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)$$

donde $A, B, C \in \mathbb{R}$ son constantes con $A > B$

i) Probar que si $C = 0$, h alcanza su valor máximo para $x = k\pi + \pi/4$, $k \in \mathbb{Z}$

En efecto, si $C = 0$, $h(x) = (A-B)\,\text{sen}\,x\cos x = \frac{A-B}{2}\,\text{sen}\,2x$

(1.0) $A > B \Rightarrow \frac{A-B}{2} > 0$, así, $h(x)$ será máximo si $\text{sen}\,2x = 1$ es decir si $2x = \pi/2$, pero según el periodo 2π de la función seno.

(0.5) $2x = 2k\pi + \pi/2 \Rightarrow x = k\pi + \pi/4$

ii) Demuestre que el conjunto de los ceros de h es $\{x \in \mathbb{R} / \text{tg}\,2x = \frac{2C}{B-A}\}$

En efecto, $h(x) = 0 \Rightarrow (A-B)\,\text{sen}\,x\cos x + C(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{A-B}{2}\,\text{sen}(2x) + C\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \frac{A-B}{2}\,\text{sen}(2x) = -C\cos 2x$$

(1.5) $$\Rightarrow \text{tg}(2x) = -\frac{C}{A-B/2} = \frac{2C}{B-A}$$

iii) Demuestre que $\forall x \in \mathbb{R}$ los puntos $P(f(x), h(x))$ y $Q(g(x), -h(x))$ conservan una distancia constante entre ellos y que el punto medio del trazo $\overline{PQ}$ es un punto fijo.

La distancia $\overline{PQ}$ será: $\overline{PQ} = \sqrt{(f(x) - g(x))^2 + (2h(x))^2}$

donde $f(x) - g(x) = A(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) + B(\text{sen}^2 x - \cos^2 x) - 4C\,\text{sen}\,x\cos x$

(1.0) Es decir $f(x) - g(x) = A\cos 2x - B\cos 2x - 2C\,\text{sen}\,2x = (A-B)\cos 2x - 2C\,\text{sen}\,2x$

(0.5) Además $h(x) = \frac{A-B}{2}\,\text{sen}\,2x + C\cos 2x \Rightarrow 2h(x) = (A-B)\,\text{sen}\,2x + 2C\cos 2x$

Así $\overline{PQ} = \sqrt{[(A-B)\cos 2x - 2C\,\text{sen}\,2x]^2 + [(A-B)\,\text{sen}\,2x + 2C\cos 2x]^2}$

$$= \sqrt{(A-B)^2\underbrace{(\cos^2 2x + \text{sen}^2 2x)}_{1} + 4C^2\underbrace{(\text{sen}^2 2x + \cos^2 2x)}_{1}}$$

(1.0) Sigue que $\overline{PQ} = \sqrt{(A-B)^2 + 4C^2} = \text{constante}$

El punto medio M de $\overline{PQ}$ es tal que

$$x_M = \frac{x_P + x_Q}{2} = \frac{f(x) + g(x)}{2} = \frac{A(\cos^2 x + \text{sen}^2 x) + B(\text{sen}^2 x + \cos^2 x)}{2}$$

$$\Rightarrow x_M = \frac{A+B}{2}$$

$$y_M = \frac{h(x) + (-h(x))}{2} = 0$$

(0.5) Así $M\left(\frac{A+B}{2}, 0\right)$ es punto fijo (independiente de x)

Pauta Problema 2

La función está definida por $f(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$. Se pide

i) Dominio, ceros, signos, paridad y asíntotas.

- Dominio: $\mathbb{R} - \{-1,1\} = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty)$

(0.5) - Ceros: $x=0$ único cero.

(0.5) - Paridad: $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2-1} = -\dfrac{x}{x^2-1} = -f(x) \Rightarrow f$ es impar.

y por lo tanto simétrica c/r el origen.

(1.0) - Asíntotas: Presenta asíntotas verticales $x=1$ y $x=-1$ y asíntota horizontal $y=0$ (eje OX)

ii) Demuestre que $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{Dom} f$: $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{(x_1-x_2)(1+x_1x_2)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}$

Use este resultado para estudiar el crecimiento de f, indicando en que intervalos esta función es creciente y en cuales decreciente.

Sean $x_1, x_2 \in \mathrm{Dom} f$. $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{x_2}{x_2^2-1} - \dfrac{x_1}{x_1^2-1}$

$$= \frac{x_2(x_1^2-1) - x_1(x_2^2-1)}{(x_2^2-1)(x_1^2-1)} = \frac{x_2x_1^2 - x_1x_2^2 - x_2 + x_1}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)} = \frac{x_1x_2(x_1-x_2)+(x_1-x_2)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}$$

(1.0) Sigue que $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{(x_1-x_2)(1+x_1x_2)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}$

Como f es impar, bastará estudiar crecimiento en $\mathbb{R}^+$

Así, si $x_1, x_2 \in (0,1)$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{(<0)(>0)}{(<0)(<0)} < 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

es decir f decrece en $(0,1)$

Si $x_1, x_2 \in (1,\infty)$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{(<0)(>0)}{(>0)(>0)} < 0 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

de donde f también decrece en $(1,\infty)$

Usando la imparidad, en $(-\infty,-1)$ f decrece, en $(-1,0)$ f decrece,

(1.0) en $(0,1)$ f decrece y en $(1,\infty)$ f decrece.

iii) Calcule $f((1,\infty))$ y pruebe que $\tilde{f}:(1,\infty) \longrightarrow f((1,\infty))$, $x \longrightarrow \tilde{f}(x) = f(x)$

es biyectiva y determine su inversa.

Si $x \in (1,\infty) \Rightarrow f(x) = \dfrac{x}{x^2-1} > 0$ y además en $x=1$ hay

(0.5) asíntota vertical. Se sigue que $f((1,\infty)) = (0,\infty)$

Así $\tilde{f}:(1,\infty) \longrightarrow f((1,\infty)) = (0,\infty)$, $x \longrightarrow \tilde{f}(x) = f(x)$

$\tilde{f}$ es por definición sobreyectiva

Para la inyectividad, sean $x_1, x_2 \in (1,\infty)$ tales que $\tilde{f}(x_1) = \tilde{f}(x_2)$

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = 0$ y usando la propiedad en (ii) se tiene.

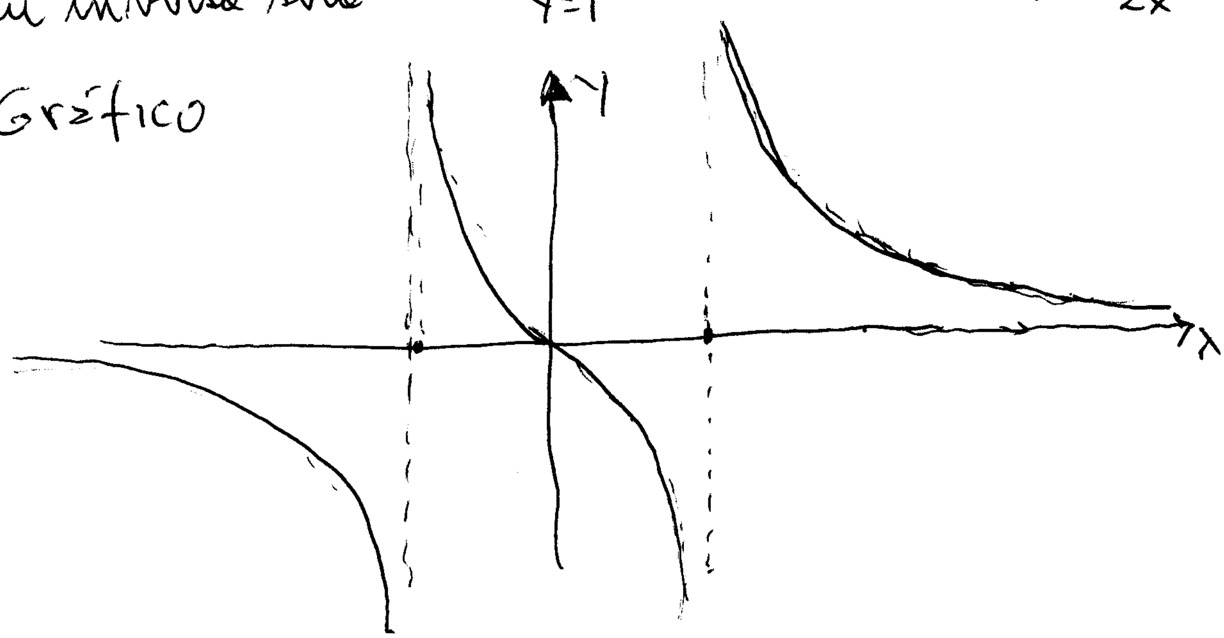
$$\frac{(x_1-x_2)(1+x_1x_2)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)} = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \Rightarrow \tilde{f} \text{ es inyectiva}$$

Sigue que $\tilde{f}$ es biyectiva

(0.5) y su inversa será $x = \dfrac{y}{y^2-1} \Rightarrow xy^2 - y - x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{1+\sqrt{1+4x^2}}{2x}$

iv) Gráfico

(1.0)



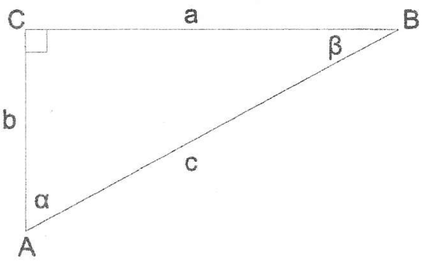
Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA1001 Introducción al Cálculo 10-1

Control 3

P1.

(a) (3.0 ptos.) Determinar el valor de $\cos x$, para $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, sabiendo que $\forall y \in \mathbb{R}$ se verifica la igualdad $\operatorname{sen} y + \operatorname{sen}(x-y) + \operatorname{sen}(2x+y) = \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(2x-y)$

(b) (3.0 ptos.) Demuestre que en el triángulo ABC de la figura, rectángulo en C, con catetos a, b, hipotenusa c y ángulos agudos α y β, se verifica que: $\sec(2\beta) + tg(2\beta) = \frac{a+b}{a-b}$



P2. Considere la función f definida por: $f(x) = \frac{x}{x^2 - |x|}$

(i) (2.0 ptos.) Encontrar dominio, ceros, paridad, signos de f y asíntotas de todo tipo.

(ii) (2.0 ptos.) Estudie el crecimiento de f indicando, si corresponde, en que intervalos la función es creciente y en cuales decreciente.

es un conjunto

(iii) (1.0 pto.) Calcule $f((1,\infty))$ y pruebe que la función

Dom Rec.

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f} : (1,\infty) & \to & f((1,\infty)) \\ x & \to & \tilde{f}(x) = f(x) \end{array}$$ es biyectiva y determine su inversa .

(iv) (1.0 pto.) Bosqueje el gráfico de f.

Tiempo: 1.15 horas.

Pauta Control 3

P1.

(a) $\forall y \in \mathbb{R}$ se verifica $\operatorname{sen} y+\operatorname{sen}(x-y)+\operatorname{sen}(2x+y) = \operatorname{sen}(x+y)+\operatorname{sen}(2x-y)$. Desarrollando y cancelando

$$\operatorname{sen} y+\cancel{\operatorname{sen} x\cos y}-\operatorname{sen} y\cos x+\cancel{\operatorname{sen} 2x\cos y}+\operatorname{sen} y\cos 2x = \cancel{\operatorname{sen} x\cos y}+\operatorname{sen} y\cos x+\cancel{\operatorname{sen} 2x\cos y}-\operatorname{sen} y\cos 2x$$

(1.0 puntos)

queda $\operatorname{sen} y - 2\operatorname{sen} y\cos x + 2\operatorname{sen} y\cos 2x = 0$
entonces $\operatorname{sen} y(2\cos 2x - 2\cos x + 1) = 0$ se cumple $\forall y \in \mathbb{R}$, en particular si $\operatorname{sen} y \neq 0$, con lo cual
$2\cos 2x - 2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow 2(2\cos^2 x - 1) - 2\cos x + 1 = 0$ (1.0 puntos)

de donde $4\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$.
Resolviendo $\cos x = \frac{2\pm\sqrt{4+16}}{8} = \frac{2\pm2\sqrt{5}}{8} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{4}$

Para $x \in \left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ se concluye que $\cos x = \frac{1-\sqrt{5}}{4}(<0)$ (1.0 puntos)

(b) Demostrar que en el triángulo rectángulo (en C) de la figura se verifica que: $sec(2\beta) + tg(2\beta) = \frac{a+b}{a-b}$

En efecto, $sec(2\beta)+tg(2\beta) = \frac{1}{\cos(2\beta)} + \frac{\operatorname{sen}(2\beta)}{\cos 2\beta} = \frac{1+\operatorname{sen}(2\beta)}{\cos(2\beta)} = \frac{1+2\operatorname{sen}\beta\cos\beta}{2\cos^2\beta-1}$ (1.0 puntos)

Del triángulo $\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{c}$ y $\cos\beta = \frac{a}{c}$
Sigue que $sec(2\beta)+tg(2\beta) = \frac{1+2\frac{b}{c}\cdot\frac{a}{c}}{2\frac{a^2}{c^2}-1} = \frac{c^2+2ab}{2a^2-c^2}$ (1.0 puntos)

y $c^2 = a^2+b^2$.

Así, $sec(2\beta)+tg(2\beta) = \frac{a^2+b^2+2ab}{2a^2-(a^2+b^2)} = \frac{(a+b)}{a^2-b^2} = \frac{(a+b)^2}{(a+b)(a-b)}$.

Se concluye $sec(2,\beta)+tg(2\beta) = \frac{a+b}{a-b}$ (1.0 puntos)

P2. La función está definida por: $f(x) = \frac{x}{x^2-|x|}$

(i) Dominio ceros, paridad, signos de f y asíntotas.

Dominio: $\mathbb{R}-\{-1,0,1\} = (-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,1)\cup(1,\infty)$ (0.4 puntos)

Ceros: f no tiene ceros ($0 \notin$ Dom f) (0.2 puntos)

Paridad: $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-|-x|} = -\frac{x}{x^2-|x|} = -f(x)$, entonces f es función impar y por lo tanto simétrica con respecto al origen. (0.4 puntos)

Signos: bastará estudiar los signos de f en $\mathbb{R}^+ - \{1\}$ donde $f(x) = \frac{x}{x^2-x} = \frac{1}{x-1}$. Así, para $x \in (0,1)$, $f(x) < 0$ y para $x \in (1,\infty)$, $f(x) > 0$. Por la imparidad, para $x \in (-\infty,-1), f(x) < 0$ y para $x \in (-1,0)$, $f(x) > 0$. (0.6 puntos)

Asíntotas: Presenta asíntotas verticales $x = 1$ y $x = -1$
y asíntota horizontal $y = 0$ (Eje $0X$). (0.4 puntos)

(ii) Como f es impar, bastará estudiar crecimientos en $\mathbb{R}^+ - \{1\}$.
Sean $x_1, x_2 \in (0,1)$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 < 0 \Rightarrow$
$1 - x_1 > 1 - x_2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{1-x_1} < \frac{1}{1-x_2} \Rightarrow \frac{1}{x_1-1} > \frac{1}{x_2-1}$ es decir $f(x_1) > f(x_2)$.
En consecuencia f decrece en $(0,1)$ y decrece en $(-1,0)$. (1.2 puntos)

Para $x_1, x_2 \in (1,\infty)$ con $x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow \frac{1}{x_1-1} > \frac{1}{x_2-1}$
es decir $f(x_1) > f(x_2)$, por lo tanto, f decrece en $(1,\infty)$ y en $(-\infty,-1)$ (0.8 puntos)

(iii) $f((1,\infty))$: Si $x \in (1,\infty)$, $f(x) = \frac{1}{x-1} > 0$ y $x = 1$ es asíntota vertical,
por lo tanto $f((1,\infty)) = (0,\infty)$. (0.3 puntos)

$$\begin{array}{rcl} \text{Así, } \tilde{f} : (1,\infty) & \to & f((1,\infty)) = (0,\infty) \\ x & \to & \tilde{f}(x) = f(x). \end{array}$$

$\tilde{f}$ es por definición sobreyectiva.
También $\tilde{f}$ es inyectiva. Sean $x_1, x_2 \in (1,\infty)$ tales que
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{x_1-1} = \frac{1}{x_2-1} \Rightarrow x_1 = x_2$ (0.2 puntos)

Se concluye que $\tilde{f}$ es biyectiva y admite inversa $\tilde{f}^{-1}(x)$ tal que
$(\tilde{f} \circ \tilde{f}^{-1})(x) = id(x) = x$
Sigue que $\frac{1}{\tilde{f}^{-1}(x)-1} = x$, de donde $\tilde{f}^{-1}(x) = \frac{1}{x} + 1 = \frac{x+1}{x}$. (0.3 puntos)

Gráfico de f

tendencias asintóticas (0.5 puntos)

gráfico completo (0.5 puntos)

Control 3, MA-1001 Introducción al cálculo
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2011/1 (25 de Abril)

Nota: El control tiene dos problemas independientes. Cada uno se califica con nota entre 1.0 *y* 7.0*, redondeada a un decimal, que se obtiene por la fórmula* $N = 1.0 + P$*, donde* P *es el puntaje obtenido el cada problema. Algunas partes tienen su puntaje indicado en paréntesis.*

Problema 1

a) (*2ptos.*) Demuestre que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\cos^2(\beta) - \overset{2}{\operatorname{sen}}(\alpha) = \cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta).$$

b) (*4ptos.*) Demuestre que si $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ son dos ángulos que satisfacen la relación

$$\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2\cos\alpha)} + \frac{\operatorname{sen}(2\beta)}{2\cos\beta)} = 1$$

entonces se tiene que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Indicación: Puede usar(a) donde corresponda.

Problema 2

Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x| - 1} & \text{si } |x| > 1 \\ [x]\sqrt{1 - x^2} & \text{si } |x| \leq 1, \end{cases}$$

donde $[x]$ denota a la parte entera de x (sólo se usa para $|x| \leq 1$).

Se pide:

a) Estudie el crecimiento de f por separado en los intervalos $[-1, 0)$ y $[0, 1]$.

b) Estudie el crecimiento de f por separado en los intervalos $(1, \infty)$ y $(-\infty, -1)$.

c) Demuestre que $\forall x \in (1, \infty)$ se cumple $f(x) > 1$.

d) Encuentre Asíntotas de todo tipo de f.

e) Indique paridad, ceros e inyectividad de f.

f) Usando lo anterior, indique $\operatorname{Im}(f)$ y grafique f esquemáticamente, indicando los puntos importantes.

Control 3, MA-1001 Introducción al cálculo
Escuela de Ingeniería, FCFM, U. de Chile
Semestre 2011/1 (25 de Abril)

Problema 1

a) (*2ptos.*) Demuestre que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple

$$\cos^2(\beta) - \operatorname{sen}^2(\alpha) = \cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta).$$

b) (*4ptos.*) Demuestre que si $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ son dos ángulos que satisfacen la relación

$$\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2\cos\alpha)} + \frac{\operatorname{sen}(2\beta)}{2\cos\beta)} = 1$$

entonces se tiene que $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

Solución

(a) Sabemos que

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \operatorname{sen}(\alpha)\operatorname{sen}(\beta) \end{aligned}$$ .... 1.0 ptos.

Multiplicando ambas expresiones queda:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta) &= \cos^2(\alpha)\cos^2(\beta) - \operatorname{sen}^2(\alpha)\operatorname{sen}^2(\beta) \\ &= \left(1 - \operatorname{sen}^2(\alpha)\right)\cos^2(\beta) - \operatorname{sen}^2(\alpha)\operatorname{sen}^2(\beta) \\ &= \cos^2(\beta) - \operatorname{sen}^2(\alpha)\left(\cos^2(\beta) + \operatorname{sen}^2(\beta)\right) \\ &= \cos^2(\beta) - \operatorname{sen}^2(\alpha) \end{aligned}$$ .... 1.0 ptos.

(b)
Si se cumple la relación entonces:

$$\frac{2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha}{2\cos\alpha} + \frac{2\operatorname{sen}\beta\cos\beta\operatorname{sen}\beta}{2\cos\beta} = 1.$$ .... 1.0 ptos.

Es decir:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \operatorname{sen}^2\beta = 1.$$ .... 0.5 ptos.

Ordenando queda:

$$\cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\alpha = 0.$$ .... 1.0 ptos.

Usando la parte (a) la igualdad anterior se puede escribir como:

$$\cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta) = 0.$$ .... 0.5 ptos.

Aquí el producto es cero ssi alguno de sus términos es cero. Es decir

$$\cos(\alpha - \beta) = 0 \vee \cos(\alpha + \beta) = 0.$$ .... 0.5 ptos.

Como $\alpha, \beta \in (0, \pi/2)$ entonces $\alpha - \beta \in (-\pi/2, \pi/2)$ y $\alpha + \beta \in (0, \pi)$.
En esos intervalos cos solo se anula en $\pi/2$, por lo tanto solo es posible que

$$\alpha + \beta = \pi/2.$$ .... 0.5 ptos.

Problema 2

Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|-1} & \text{si } |x| > 1 \\ [x]\sqrt{1-x^2} & \text{si } |x| \leq 1, \end{cases}$$

donde $[x]$ denota a la parte entera de x (sólo se usa para $|x| \leq 1$).
Se pide:

a) Estudie el crecimiento de f por separado en los intervalos $[-1, 0)$ y $[0, 1]$.
b) Estudie el crecimiento de f por separado en los intervalos $(1, \infty)$ y $(-\infty, -1)$.
c) Demuestre que $\forall x \in (1, \infty)$ se cumple $f(x) > 1$.
d) Encuentre Asíntotas de todo tipo de f.
e) Indique paridad, ceros e inyectividad de f.
f) Usando lo anterior, indique $\mathrm{Im}(f)$ y grafique f esquemáticamente, indicando los puntos importantes.

Solución

(a) En $[-1, 0)$ se tiene que $[x] = -1$, luego la función aquí vale $f(x) = -\sqrt{1-x^2}$. Esta función es decreciente en este intervalo. .... 0.5 ptos.
En $[0, 1)$ se tiene que $[x] = 0$, luego la función aquí vale $f(x) = 0$. Además, en $x = 1$ la raíz es cero. Esta función es creciente y decreciente (constante) en este intervalo. .... 0.5 ptos.

(b) En $(1, \infty)$ la función vale $f(x) = \frac{x}{x-1}$ que corresponde a una función racional. Es claro que ella decrece desde su asíntota vertical hasta la horizontal. Sin embargo (no es necesario para tener el puntaje), se puede hacer el siguiente cálculo: si $1 < x_1 < x_2$ se tiene que

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{x_2}{x_2 - 1} - \frac{x_1}{x_1 - 1} = \frac{-(x_2 - x_1)}{(x_2 - 1)(x_1 - 1)} < 0.$$

De donde se obtiene el mismo resultado. .... 0.5 ptos.
Como la función restringida a $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ es impar, resulta ser decreciente en $(-\infty, -1)$ 0.5 ptos.

(c) Formalmente se tiene que en $(1, \infty)$:

$$f(x) - 1 = \frac{x}{x-1} - 1 = \frac{1}{x-1} > 0.$$ .... 1.0 ptos.

(También puede argumentarse que la función decrece hacia su asíntota horizontal $y = 1$.)

(d) Las asíntotas corresponden a la parte racional de la función:
Verticales: $x = \pm 1$ .... 0.5 ptos.
Horizontales: $y = \pm 1$ ($y = +1$ en $1, \infty)$ y $y = -1$ en $(-\infty, -1)$. .... 0.5 ptos.

(e) La función no es par ni impar ya que en $[0, 1]$ es constantemente cero y en $[1, 0]$ no. .... 0.3 ptos.
En $[0, 1]$ la función es constantemente cero. Son parte de sus ceros. En $[-1, 0)$ $f(x) = -\sqrt{1-x^2} = 0$ solo para $x = -1$. En el resto del dominio la función es racional no nula.
Ceros(f)=$\{-1\} \cup [0, 1]$. .... 0.4 ptos.
La función no es inyectiva por tener más de un cero. .... 0.3 ptos.

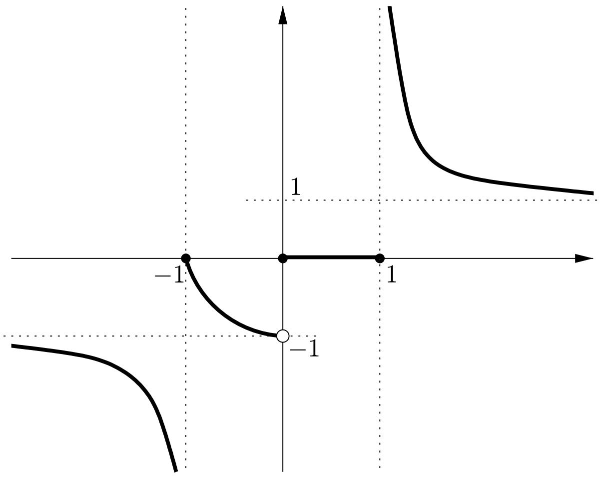
(f) En $[0,1]$ $f(x) = 0$ .... 0.1 ptos.

En $[-1,0)$ $f([-1,0)) = (-1,0]$ .... 0.1 ptos.

En $(1,\infty)$ $f((1,\infty)) = (1,\infty)$ .... 0.2 ptos.

En $(-\infty,-1)$ $f((-\infty,-1)) = (-\infty,-1)$. .... 0.1 ptos.

Gráfico:



.... 0.5 ptos.

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introducción al Cálculo 12-1

Control 3

P1. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por: $f(x) = \dfrac{|x|-6}{|x|-2}$. Se pide:

(i) (1,0 pto.) Determine $A = \mathrm{Dom}(f)$, ceros, signos y paridad

(ii) (0,5 ptos.) Determine asíntotas verticales y horizaontales, si es que existen.

(iii) (1,5 ptos.) ~~Determine los intervalos~~ de crecimiento y decrecimiento de f (puede aprovechar la paridad, si la hay).

(iv) (1,5 ptos.) Determine $f(A)$, la imagen de A por f, y explique por qué f no es inyectiva ni sobreyectiva.

(v) (1,0 pto.) Encuentre un subconjunto B de A tal que $f|_B : B \to f(B)$ sea biyectiva y determine explícitamente su inversa.

(vi) (0,5 ptos.) Bosqueje el gráfico de f (use la información obtenida).

P2. a (i) (1,0 pto.) Demuestre la identidad

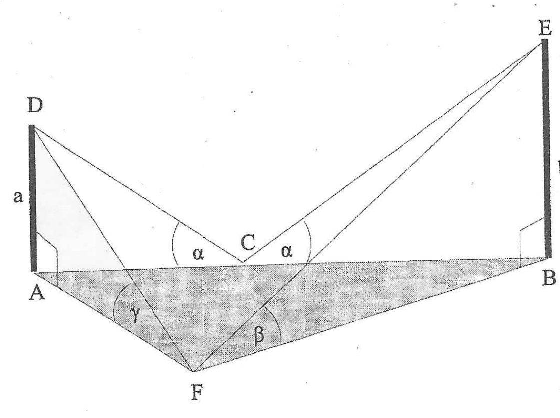
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{sen}^4(\alpha) + 4\cos^2(\alpha) = (1+\cos^2(\alpha))^2$$

(ii) (2,0 ptos.) Use (i) para probar la identidad

$$\left(\sqrt{\operatorname{sen}^4(\alpha) + 4\cos^2(\alpha)} - \cos(2\alpha)\right)^2 = \cos^4(\alpha) + 4\operatorname{sen}^2(\alpha).$$

b (3,0 ptos.) En la figura se tienen dos postes verticales cuyas alturas son $AD = a$ y $BE = b$. Desde el punto C, ubicado en el trazo AB que une los pies de los postes, ambos se ven con un ángulo de elevación α y desde el punto F del plano horizontal tal que $\angle BFA = \pi/2$ los ángulos de elevación de los postes BE y AD son β y γ respectivamente. Demostrar que

$$a^2\cot^2(\gamma) + b^2\cot^2(\beta) = (a+b)^2\cot^2(\alpha).$$



Consultas sólo al auxiliar
Justifique cada uno de sus pasos
Tiempo: 1:15

Introducción al Cálculo - Control 3

Pauta Problema 1

$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{|x|-6}{|x|-2}$

i) Determinar Dom f, ceros, signos y paridad.

$\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R} / |x| = 2\} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Ceros $= \{x \in \mathbb{R} / |x| = 6\} = \{-6, 6\}$

0.5 Paridad: $f(-x) = \dfrac{|-x|-6}{|-x|-2} = \dfrac{|x|-6}{|x|-2} = f(x)$, así, f es función par y por lo tanto simétrica con respecto al eje OY

Signos: Por la paridad, basta estudiar signos de f en $\mathbb{R}^+$ $(x>0)$

Para $x>0$, $f(x) = \dfrac{x-6}{x-2} > 0$ si $x \in (0,2) \cup (6,\infty)$ y $f(x)<0$ si $x \in (2,6)$

0.5 Análogamente para $x<0$, $f(x)>0$ si $x \in (-\infty,-6) \cup (-2,0)$ y $f(x)<0$ si $x \in (-6,-2)$

ii) Asíntotas verticales y horizontales.

0.5 Claramente $x=-2$ y $x=2$ son asíntotas verticales y $Y=1$ asínt. horizontal

iii) Crecimiento: Sea $x \in (0,2)$ y $0 < x_1 < x_2 < 2$

Entonces $f(x_1) - f(x_2) = \dfrac{x_1-6}{x_1-2} - \dfrac{x_2-6}{x_2-2} = \dfrac{\cancel{x_1x_2} - 2x_1 - 6x_2 + \cancel{12} - \cancel{x_1x_2} + 6x_1 + \cancel{12}\ldots}{(x_1-2)(x_2-2)}$

$\Rightarrow f(x_1) - f(x_2) = \dfrac{4(x_1-x_2)}{(x_1-2)(x_2-2)} = \dfrac{4(<0)}{(<0)(<0)} < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

1.0 Así, f es creciente en $(0,2)$ y análogamente, en $(2,\infty)$

0.5 Por la paridad, f es decreciente en $(-\infty,-2)$ y en $(-2,0)$.

iv) Imagen de $f = f(A)$.

Como f es creciente en $[0,2)$ y $f(0) = 3 \Rightarrow f([0,2)) = [3,\infty)$

además f es creciente en $(2,\infty)$ y $Y=1$ es asíntota horizontal, entonces

$f((2,\infty)) = (-\infty, 1)$

Sigue que, aprovechando la paridad.

1.0 $\longrightarrow$ $f(A) = \operatorname{Im} f = (-\infty, 1) \cup [3, \infty)$

f no es inyectiva pués es par, es decir, $f(x) = f(-x)$ pero $x \neq -x$

0.5 $\longrightarrow$ f no es sobreyectiva pués $f(A) = (-\infty, 1) \cup [3, \infty) \neq \mathbb{R}$.

v) Encuentre $B \subseteq A$ tal que $f_{|B} : B \longrightarrow f(B)$ sea biyectiva y determine su inversa.

B puede ser $[0,2) \subseteq A$, por ejemplo, y entonces

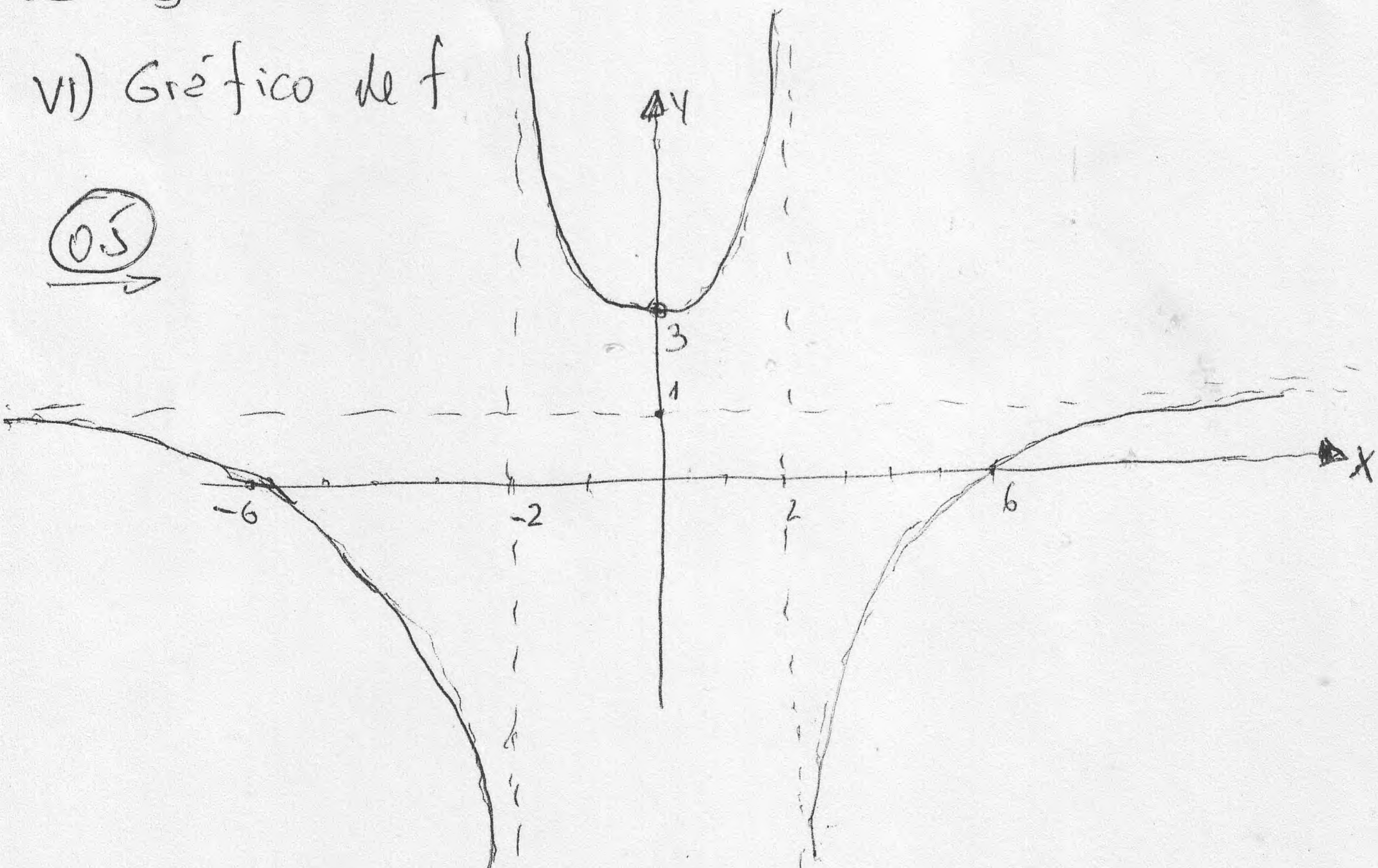
0.5 $\longrightarrow$ $f : [0,2) \longrightarrow f([0,2)) = [3, \infty)$ es biyectiva y su inversa

será $x = \dfrac{f^{-1}(x) - 6}{f^{-1}(x) - 2} \Rightarrow x f^{-1}(x) - 2x = f^{-1}(x) - 6 \Rightarrow f^{-1}(x) = 2\dfrac{x-3}{x-1}$

0.5 $\longrightarrow$

vi) Gráfico de f

0.5 $\longrightarrow$



Pauta Problema 2

a) i) Demostrar la identidad $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \operatorname{sen}^4\alpha + 4\cos^2\alpha = (1+\cos^2\alpha)^2$

En efecto, $(1+\cos^2\alpha)^2 = 1+2\cos^2\alpha + \cos^4\alpha = 1+2\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$

0.5 $= 1+2\cos^2\alpha + \cos^2\alpha(1-\operatorname{sen}^2\alpha) = 1+3\cos^2\alpha - \cos^2\alpha\operatorname{sen}^2\alpha$

$= 1+3\cos^2\alpha - (1-\operatorname{sen}^2\alpha)\operatorname{sen}^2\alpha = 3\cos^2\alpha + \underbrace{1-\operatorname{sen}^2\alpha}_{\cos^2\alpha} + \operatorname{sen}^4\alpha$

0.5 $= \operatorname{sen}^4\alpha + 4\cos^2\alpha$

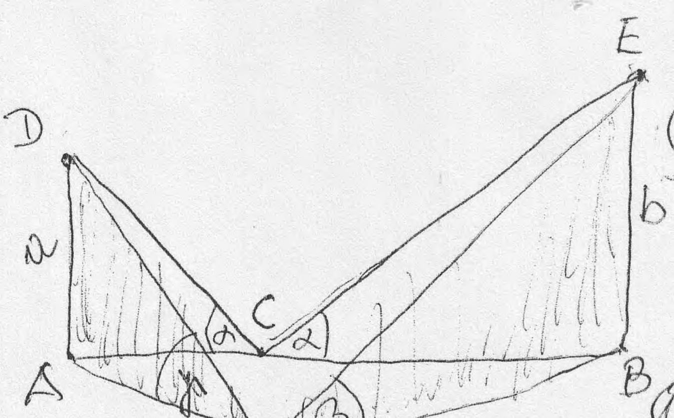
ii) Probar $\left[\sqrt{\operatorname{sen}^4\alpha + 4\cos^2\alpha} - \cos(2\alpha)\right]^2 = \cos^4\alpha + 4\operatorname{sen}^2\alpha$

Usando (i) $\left(\sqrt{\operatorname{sen}^4\alpha + 4\cos^2\alpha} - \cos(2\alpha)\right)^2 = \left[\sqrt{(1+\cos^2\alpha)^2} - \cos(2\alpha)\right]^2$

1.5 $= \left[1+\cos^2\alpha - (2\cos^2\alpha - 1)\right]^2 = (2-\cos^2\alpha)^2 = 4-4\cos^2\alpha + \cos^4\alpha$

0.5 $= 4-4(1-\operatorname{sen}^2\alpha) + \cos^4\alpha = \cancel{4-4} + 4\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^4\alpha = \cos^4\alpha + 4\operatorname{sen}^2\alpha$

b) Los triángulos ABF, CAD, CBE, FBE y FAD son todos rectángulos. Entonces $\overline{FA}^2 + \overline{FB}^2 = (\overline{AC} + \overline{CB})^2$



Donde $\overline{FA} = a\cot\gamma$

$\overline{FB} = b\cot\beta$

2.0 $\overline{AC} = a\cot\alpha$, $\overline{CB} = b\cot\alpha$

Entonces $a^2\cot^2\gamma + b^2\cot^2\beta = (a\cot\alpha + b\cot\alpha)^2$

1.0 $\Rightarrow a^2\cot^2\gamma + b^2\cot^2\beta = (a+b)^2\cot^2\alpha$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
Introducción al Cálculo 13-1

Control 3

P1. (a) (3,0 ptos.) Sean $\alpha, \beta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

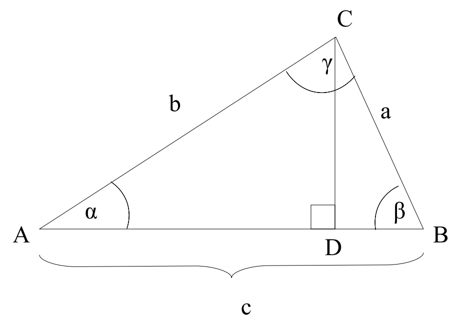
(i) Demuestre que

$$\tan(\alpha) - \tan(\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$$

(ii) Use (i) para probar que $\tan(x)$ es estríctamente creciente en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(b) (3,0 ptos.) El triángulo ABC de la figura tiene lados a, b, c, ángulos interiores α, β, γ y área A.

Demuestre que $a^2 \operatorname{sen}(2\beta) + b^2 \operatorname{sen}(2\alpha) = 4A$.



P2. (a) (4,0 ptos.) Estudie completamente las funciones

$$f(x) = x^2 + 4x + 3 \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x}{2-x}.$$

indicando en cada caso (si corresponde): dominio, ceros, intersecciones con eje OY, imagen, paridad, asíntotas, crecimiento y gráfico.

(b) (2,0 ptos.) Usando la información obtenida en (a), grafique la función h definida por

$$h(x) = \begin{cases} x^2 + 4x + 3 & \text{si } x < 0 \\ \left[\frac{x}{2-x}\right] & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ (parte entera)} \\ \frac{x}{x-2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Justifique cada uno de sus pasos
Tiempo: 1:15

MA 1001 Control 3 (13-1)

Pauta Problema 1

a) (i) Demostrar que $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

En efecto $\dfrac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta} = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cancel{\cos\beta}} - \dfrac{\operatorname{sen}\beta\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{\cos\alpha}\cos\beta}$

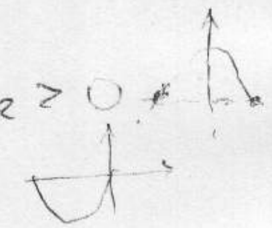
(1.0) $\Rightarrow \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$

ii) Probar que $\operatorname{tg} x$ es estrictamente en $(-\pi/2, \pi/2)$

Sean $x_1, x_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{matrix} -\pi/2 < x_1 < \pi/2 \\ -\pi/2 < x_2 < \pi/2 \end{matrix}$ y sea $x_1 < x_2$

(0.5) Así $\begin{matrix} -\pi/2 < x_1 < \pi/2 \\ -\pi/2 < -x_2 < \pi/2 \end{matrix} \Rightarrow -\pi < x_1 - x_2 < 0$

Sigue que $x_1, x_2 \in (-\pi/2, \pi/2) \Rightarrow \cos x_1 > 0$, $\cos x_2 > 0$



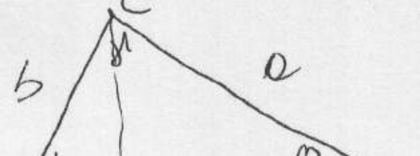
y $x_1 - x_2 \in (-\pi, 0) \Rightarrow \operatorname{sen}(x_1 - x_2) < 0$

Entonces $\operatorname{tg}(x_1) - \operatorname{tg}(x_2) = \dfrac{\overbrace{\operatorname{sen}(x_1-x_2)}^{<0}}{\underbrace{\cos x_1}_{>0}\underbrace{\cos x_2}_{>0}} < 0$ (según i))

(1.5) Así $x_1 < x_2 \Rightarrow \operatorname{tg}(x_1) < \operatorname{tg}(x_2)$ en $(-\pi/2, \pi/2)$

b) Demostrar que $a^2\operatorname{sen}(2\beta) + b^2\operatorname{sen}(2\alpha) = 4A$.

$\overline{AD} + \overline{DB} = b\cos\alpha + a\cos\beta = c$



y el area del Δ es

$A = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen}\gamma$

$A = \frac{1}{2} ac \operatorname{sen}\beta \Rightarrow a\operatorname{sen}\beta = \frac{2A}{c}$

$A = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow b\operatorname{sen}\alpha = \frac{2A}{c}$

(1.0)

Entonces $a^2\operatorname{sen}2\beta + b^2\operatorname{sen}2\alpha = 2a^2\operatorname{sen}\beta\cos\beta + 2b^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

$= 2a\operatorname{sen}\beta \cdot a\cos\beta + 2b\operatorname{sen}\alpha\, b\cos\alpha =$

$= 2\,\frac{2A}{c}\, a\cos\beta + 2\,\frac{2A}{c}\, b\cos\alpha = \frac{4A}{c}\big(\overbrace{a\cos\beta + b\cos\alpha}^{c}\big) = \frac{4A}{\cancel{c}}\cancel{c}$

(2.0) Sigue que $a^2\operatorname{sen}2\beta + b^2\operatorname{sen}2\alpha = 4A$

Pauta Problema 2

a) $f(x) = x^2+4x+3$

$D_f: \mathbb{R}$, Ceros $= \{x \in \mathbb{R} / x^2+4x+3=0\} = \{-3,-1\}$, $\cap$ eje OY: $(0,3)$

$\text{Im} f: [-1, \infty)$, no par

Es una parábola con vértice $V(-2,-1)$, ni impar, no tiene asíntotas, f decrece en $(-\infty,-2)$ y crece en $(-2,\infty)$

1.5

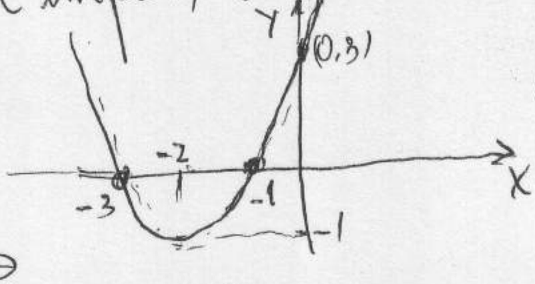


Gráfico $f(x)$

0.5

$g(x) = \dfrac{x}{2-x}$ $\quad$ Dom g: $\mathbb{R}-\{2\}$, cero en $x=0$, $\cap$ eje OY: $(0,0)$

$f(-x) = -\dfrac{x}{2+x} \neq f(x)$, $\neq -f(x)$ $\quad$ No es par ni impar, Asíntota vertical $x=2$

asíntota horizontal $y=-1$ $\quad$ (Importante: $g(1)=1$), Im g: $\mathbb{R}-\{-1\}$

1.5

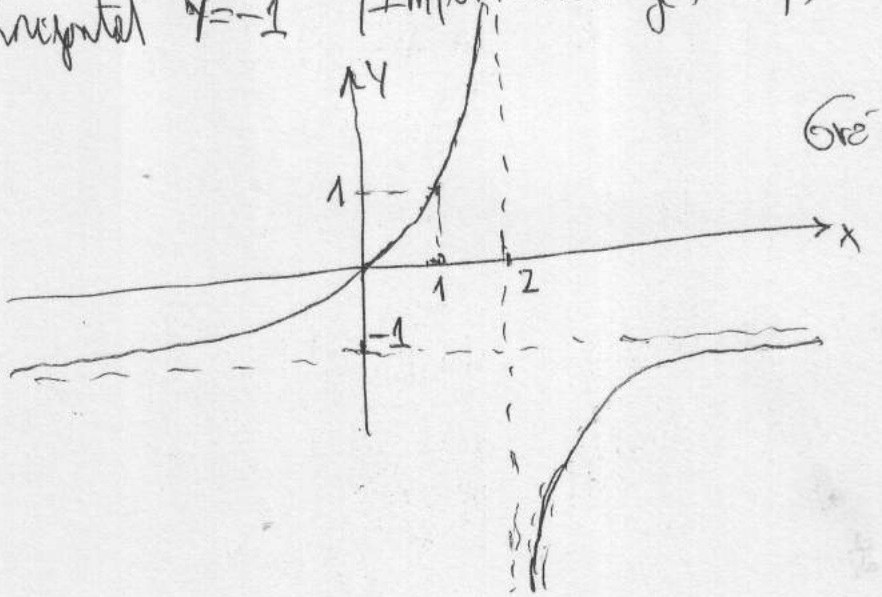


Gráfico $g(x)$

0.5

b)

$$h(x) = \begin{cases} x^2+4x+3 & \text{si } x<0 \\ \left[\dfrac{x}{2-x}\right] & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{x}{x-2} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

1.0

Para el gráfico de $h(x)$, la parábola es igual en $(-\infty,0)$. Para $x \in [0,1]$, $\left[\frac{x}{2-x}\right] = [g(x)]$ y $g(x) \in [0,1]$ según gráfico de $g(x)$, entonces $\left[\frac{x}{2-x}\right] = 0$ si $x \in [0,1)$ y 1 si $x=1$

Finalmente en $(1,\infty)$ el gráfico de $\frac{x}{x-2}$ es el opuesto de g, es decir $\frac{x}{x-2} = -g(x)$ en $(1,\infty)$

1.0

Control 3

P1. (i) (3,0 ptos.) Pruebe que

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(\cos(x+y) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}(x+2y) = \operatorname{sen}(x)).$$

(ii) (3,0 ptos.) Recuerde que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ se cumplen las relaciones

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$
$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

Demuestre que, si en un triángulo de ángulos interiores α, β, γ se verifica que, $\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen} \beta = \cos \alpha + \cos \beta$, entonces el triángulo es rectángulo.

P2. (a) Analice la función dad por $x \to f(x) = \sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}}$ determinando:

(i) (1,0 pto.) Dom(f), signos de f y ceros de f.
(ii) (1,0 pto.) Asíntotas horizontales y verticales, si las hay.
(iii) (1,0 pto.) Intervalos donde f es creciente y/o decreciente.
(iv) (1,0 pto.) Conjunto imagen. Bosqueje el gráfico de f.

(b) (2,0 ptos.) Considere la función $x \to g(x) = [x] + [-x]$, donde $[x]$ es la función parte entera de x.

Determine Dom(g), conjunto imagen de g, ceros de g e indique si g es una función par o impar. Bosqueje el gráfico de g.

Consultas sólo al auxiliar de control
Justifique cada uno de sus pasos
Tiempo: 1:15

Introducción al Cálculo - Control 3 (2014-1)
Pauta Problema 1

i) Probar que $(\forall x, y \in \mathbb{R})\left(\cos(x+y)=0 \Rightarrow \operatorname{sen}(x+2y)=\operatorname{sen}x\right)$

En efecto, $\cos(x+y)=0 \Rightarrow \cos x\cos y - \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y = 0$

(0.5) $\Rightarrow \cos x\cos y = \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$ ⊛

Entonces $\operatorname{sen}(x+2y) = \operatorname{sen}x\underbrace{\cos 2y} + \underbrace{\operatorname{sen}2y}\cos x$

$= \operatorname{sen}x(\cos^2y-\operatorname{sen}^2y) + 2\operatorname{sen}y\underbrace{\cos y\cos x}_{\text{por ⊛}}$

(1.0) $= \operatorname{sen}x\cos^2y - \operatorname{sen}x\operatorname{sen}^2y + 2\operatorname{sen}y\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y$

$= \operatorname{sen}x\cos^2y - \operatorname{sen}x\operatorname{sen}^2y + 2\operatorname{sen}x\operatorname{sen}^2y$

$= \operatorname{sen}x\cos^2y + \operatorname{sen}x\operatorname{sen}^2y = \operatorname{sen}x\underbrace{(\cos^2y+\operatorname{sen}^2y)}_{1} = \operatorname{sen}x$

(1.5) Sigue que $\operatorname{sen}(x+2y) = \operatorname{sen}x$

ii) En el triángulo de ángulos α, β, γ

$\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = \cos\alpha + \cos\beta$

Según las relaciones dadas en el enunciado se cumple:

$\cancel{2}\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cancel{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} = \cancel{2}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cancel{\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$

(1.5) Simplificando $\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = 1$

Sigue que, en el triángulo $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{4}$ (45°).

es decir $\boxed{\alpha+\beta = \pi/2}$ y como $\alpha+\beta+\gamma = \pi$

$\Rightarrow \gamma = \pi - (\alpha+\beta) = \pi - \pi/2 = \pi/2$

(1.5) Así, $\gamma = \frac{\pi}{2}$ (90°) por lo que el Triángulo es Rectángulo.

Pauta Problema 2

a) $f(x)=\sqrt{\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}} = \sqrt{\frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}} = \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}$, $x\neq 1$

i) Para determinar Dom f, es inmediato que $x\neq 1$ y $\frac{x-2}{x+1}\geq 0$

(0.5) de donde $x\in(-\infty,-1)\cup[2,\infty)$

(0.5) Sigue que Dom f $=(-\infty,-1)\cup[2,\infty)$, ceros $=\{2\}$ y $f(x)\geq 0\ \forall x\in$ Dom f

ii) Para valores de x suficientemente grandes $f(x)\approx 1$, de modo

(0.5) que $y=1$ es asíntota horizontal.

Para valores de x cercanos a -1^- f crece sin cota, de modo

(0.5) que $x=-1^-$ es asíntota vertical.

iii) Para $x\in$ Dom f $=(-\infty,-1)\cup[2,\infty)$ $f(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x+1}}=\sqrt{\frac{x+1-3}{x+1}}=\sqrt{1-\frac{3}{x+1}}$

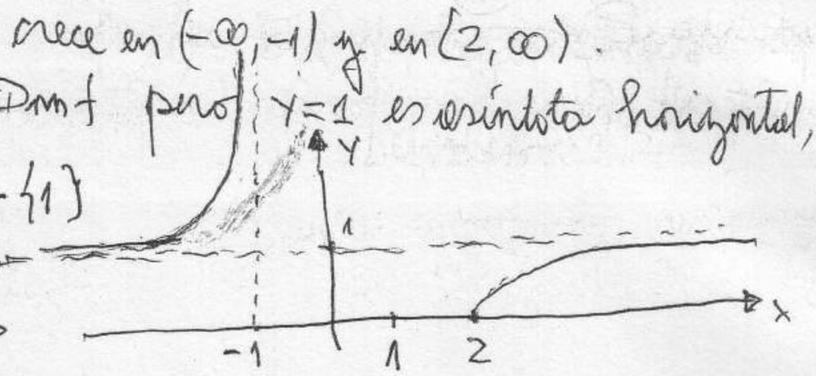
(1.0) Como $x+1$ es creciente $\Rightarrow \frac{3}{x+1}$ decrece $\Rightarrow -\frac{3}{x+1}$ crece $\Rightarrow \sqrt{1-\frac{3}{x+1}}$ crece

Sigue que f crece en $(-\infty,-1)$ y en $[2,\infty)$.

iv) $f(x)\geq 0\ \forall x\in$ Dom f pero $y=1$ es asíntota horizontal, entonces

(0.5) Im f $=[0,\infty)-\{1\}$

(0.5)



b) $g(x)=[x]+[-x]$

Claramente Dom g $=\mathbb{R}$, además, $\forall p\in\mathbb{Z}\subseteq\mathbb{R}$, $[p]+[-p]=p-p=0$

(1.0) Sigue que Ceros de g $=\mathbb{Z}$ (Todos los enteros)

También $\forall x\in\mathbb{R}$, $g(x)=[x]+[-x]=g(-x) \Rightarrow$ g es función PAR

Además, $\forall x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}\ \exists p\in\mathbb{Z}$ tal que $p< x< p+1 \Rightarrow [x]=p$

(1.0) y $-p-1<-x<-p \Rightarrow [-x]=-p-1$. Así $[x]+[-x]=p-p-1=-1=c^{te}$ para

$\forall x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$. Así Recorrido $g=\{0,1\}$