

MA1101-10 Introducción al Cálculo**Profesor:** Pedro Pérez.**Auxiliar:** Patricio Yáñez A.**Consultas:** pyanez@dim.uchile.cl**Auxiliar 12: Sucesos entre sus sesiones de sucesiones****P1. [Definición Convergencia]** Demuestre utilizando definición de convergencia.

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n} + 1} = 1$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3}{3n - 1} = \frac{2}{3}$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 + 1$ diverge
- d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \max\left\{\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$ calcule su límite y demuéstrela.

P2. [Trabajemos con un poco más de teoría]Sea (a_n) una sucesión tal que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot a_n$. Demuestre que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.**Indicación:** Probar que si $x_n \rightarrow l$ y se tiene $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(n) \geq n$, entonces $x_{f(n)} \rightarrow l$ **P3. [Sucesión y función]**Sea (x_n) una sucesión convergente a $l \in \mathbb{R}$, y sea $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente.a) Pruebe que la sucesión $(x_{f(n)})$ es convergente a l .b) Calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 2}{n^2 + 1}\right)^{n^2}$ **P4. [Recurrencia]**

Considere la sucesión definida mediante la recurrencia:

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} \cdot (1 + a_{n-1}^2), \text{ con } a_0, a_1 \in (0, 1)$$

a) Demuestre que $(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2), a_n \in (0, 1)$.b) Muestre que a_n es convergente.

c) Calcule el límite.

Notitas:

1. P1) Esta pregunta busca que comprendan la definición de convergencia, para esto es recomendable tener la definición y desglosar cada conectivo lógico o cuantificador y ver que hace para el conjunto dado, estudien los casos $\frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N}$

- $X_n \rightarrow l \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = l \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (\forall n \geq n_0) |X_n - l| < \varepsilon$

$\forall n \geq n_0$ Si EMPRE!

- X_n nula si $X_n \rightarrow 0$

- X_n acotada si $(\exists M > 0) (\forall n \in \mathbb{N}) |X_n| \leq M$

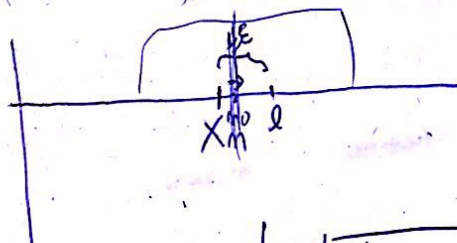
$$\Leftrightarrow -M \leq X_n \leq M$$

• Teorema: Si (S_n) es una sucesión que converge a $l_1 \in \mathbb{R}$
 y también $l_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow l_1 = l_2$

P1)

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{n} + 1} = 1$$

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists n_0 \in \mathbb{N}) (|X_n - l| \leq \varepsilon, \forall n \geq n_0) \quad \left. \vphantom{(\forall \varepsilon > 0)} \right\} \text{Definición}$$



$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \left| \sqrt{\frac{1}{n} + 1} - 1 \right| \leq \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

$$\sqrt{d} \geq 0 \quad \forall d \in [0, \infty +]$$

$$d = \frac{1}{n} + 1 \Rightarrow \sqrt{\frac{1}{n} + 1} \geq 0 + 1$$

Además $\frac{1}{n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$

Toda raíz es $\oplus$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{n} + 1} \geq 1 \geq 0$$

/ + (-1) Sumo AMBOS
LADOS -1,

y tomo la desigualdad
de la Izq

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{n} + 1} - 1 \geq 0$$

Entonces

$$\left| \sqrt{\frac{1}{n} + 1} - 1 \right| \leq \varepsilon$$

lo que está dentro
de | | siempre ≥ 0 .

$n \neq 0$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{n} + 1} - 1 \leq \varepsilon$$

/ + 1

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{1}{n} + 1} \leq \varepsilon + 1$$

/ ()² Por que?

$$f(n) = \sqrt{\frac{1}{n} + 1} \geq 0 \wedge \varepsilon + 1 \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} + 1 \leq (\varepsilon + 1)^2$$

$$\Rightarrow g(x) = x^2 / g: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \leq \underbrace{(\varepsilon + 1)^2 - 1}_{\geq 0}$$

Biyección, sólo cuando
cumpla esto puedo
ELEVAR AL CUADRADO

$$\frac{1}{(\varepsilon + 1)^2 - 1} \leq n$$

Una vez que tengo
una cota de n , puedo
encontrar un m_0 a partir
del cual converge

basta tomar

$$\left\lfloor \frac{1}{(\varepsilon + 1)^2 - 1} \right\rfloor + 1 = m_0$$

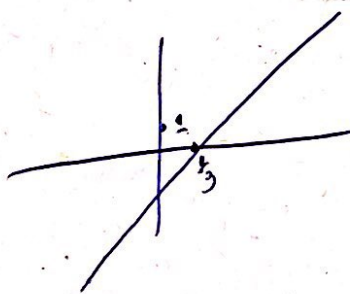
la función cajón me asegura que es
natural y el + 1 me asegura
que se cumple, te cot de mos que
es a partir de allí

PDG: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3n-1} = \frac{2}{3}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 \left| \frac{2n+3}{3n-1} - \frac{2}{3} \right| \leq \varepsilon$ } Definición

$\frac{2n+3}{3n-1} - \frac{2}{3} = \frac{2(3n+1)}{3(3n-1)} = \frac{3(2n+3) - 2n - 2}{3(3n-1)}$ tomo lo de adentro para ver como

$= \frac{1}{3(3n-1)}$ } $\oplus$ se comporta.



$\oplus$ $\forall n \geq 1$ Es una función lineal que es positiva a partir de $\frac{1}{3}$.

Pues en particular $n \geq 1 \geq \frac{1}{3}$

Por lo que si: $n \geq 1 \Rightarrow \frac{2n+3}{3n-1} - \frac{2}{3} \geq 0$

$\Rightarrow \left| \frac{2n+3}{3n-1} - \frac{2}{3} \right| \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow \frac{2n+3}{3n-1} - \frac{2}{3} \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3(3n-1)} \leq \varepsilon$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3n+1} \leq \frac{3\varepsilon}{11}$ $\Leftrightarrow 11 \leq 3\varepsilon(3n+1) \Leftrightarrow$

$3n+1 \geq 0$, si $n \geq \frac{1}{3}$

$$L \Rightarrow 11 \leq 3\varepsilon(3m+1)$$

$$L \Rightarrow \frac{11}{3\varepsilon} - 1 \leq 3m$$

$$L \Rightarrow \frac{11 - 3\varepsilon}{9\varepsilon} \leq m \quad \text{Encontré una cota.}$$

$\in \mathbb{N}$ $m \in \mathbb{N}$ asegura que se tiene.

basta tomar $\left\lceil \frac{11 - 3\varepsilon}{9\varepsilon} \right\rceil + 1 = m_0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{3n+1} = \frac{2}{3} \quad \text{tomamos la convergencia}$$

iii) [CONTRADICCIÓN]
Supongamos que converge! Para demostrar.
 PDG $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2+1 = x_n$ diverge

Si converge $\exists l \in \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq m_0 \quad |n^2+1 - l| \leq \varepsilon \quad \text{Definición de convergencia}$$

Como es $\forall \varepsilon > 0$

en particular $\varepsilon = 1$ debe cumplir $\neq$ Todos los elementos del conjunto lo cumplen.

$$n^2+1 - l \leq 1 \quad \forall n \geq m_0$$

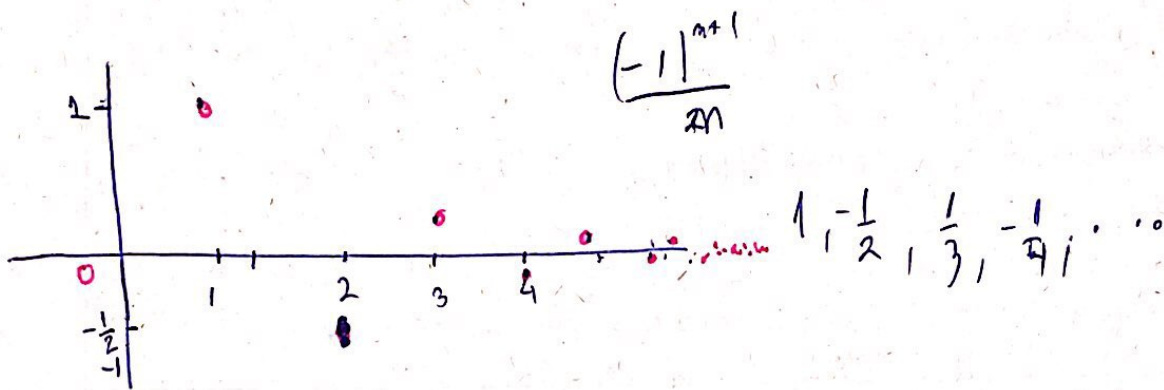
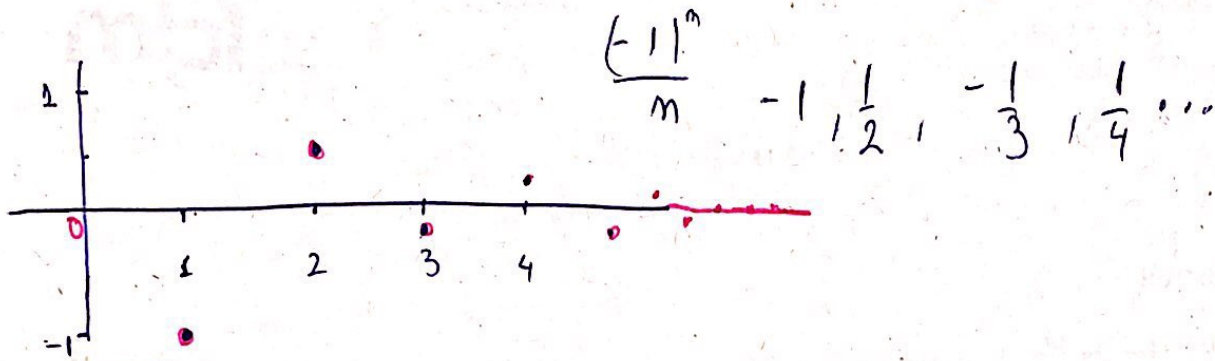
$$L \Rightarrow n^2 \leq l \quad / \quad \forall n \geq m_0 \quad l > 0 \quad / \quad \sqrt{\quad} \Rightarrow \text{Bi y o d m}$$

$$\Rightarrow n \leq \sqrt{l} \quad , \quad \forall n \geq m_0$$

Los naturales son acotados

Sea $M = \max\{x_1, x_2, \dots, x_{m_0}, \sqrt{l}\}$ $\forall n \geq m_0, n \leq M$ ✗

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \max \left\{ \frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$ $n \neq 0$ veamos su comportamiento.



$$\max \left\{ \frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$$

$n=1$ $\left\{ \max \left\{ -1, 1 \right\}, \max \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\}, \max \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}, \dots \right\}$

$n=2$ $\left\{ \max \left\{ -1, 1 \right\}, \max \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\}, \max \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}, \dots \right\}$

$n=3$ $\left\{ \max \left\{ -1, 1 \right\}, \max \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\}, \max \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right\}, \dots \right\}$

$= \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\} = \frac{1}{n}$

su lim conocido y convergencia igual

pero esto es sólo la intuición.

Golazo de media cancha

$$\max \{ A, B \} = \frac{A+B}{2} + \frac{|A-B|}{2}$$

Propiedad que nos permite calcular el máximo de manera algebraica. $\min \{ A, B \} = \frac{A+B}{2} - \frac{|A-B|}{2}$

$$\max \left\{ \frac{(-1)^m}{m}, \frac{(-1)^{m+1}}{m} \right\}$$

$$= \frac{\frac{(-1)^m}{m} + \frac{(-1)^{m+1}}{m}}{2} + \frac{\left| \frac{(-1)^m}{m} - \frac{(-1)^{m+1}}{m} \right|}{2}$$

$$= \frac{(-1)^m}{2m} \left[\cancel{1} - 1 \right] + \frac{\left| (-1)^m \right|}{2m} [1 + 1]$$

$$= \frac{\left| (-1)^m \right| \cdot 2}{2m} = \frac{1}{m} \quad \square$$

$\rightarrow \left| (-1)^m \right| = \{ -1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots \}$
 Si $\frac{1}{m}$ tomo valor absoluto siempre

su límite y convergencia lo tenemos de un comienzo, por prop. aritmética.

[Si y es un número real y $x > 0$
 Existe un entero positivo n tal que $n \cdot x > y$]

Cualquier número por grande que sea existe un natural que es multiplicado por un positivo x
 Es mayor! El caso del punto es el caso particular de $y = 1$.

P31

Sea (a_n) se que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Dem $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

#Indicación

Si $X_n \rightarrow l$, y se toma $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \setminus f(m) \geq m \Rightarrow X_{f(m)} \rightarrow l$

$$f(m) = \bar{m} \geq m \geq m_0 \Rightarrow \rightarrow l$$

#Indicación

Si $X_n \rightarrow l$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m_0 \in \mathbb{N} / \forall m \geq m_0, |X_m - l| < \varepsilon$

① Definición

Veamos que si $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(m) \geq m$
 $\Rightarrow X_{f(m)} \rightarrow l$, $\hookrightarrow$ creciente como

$m+1$
 m^2+1000
 etc.

P.D.G.
 $(\forall \varepsilon > 0) (\exists m_0' \in \mathbb{N}) (\forall m \geq m_0') (|X_{f(m)} - l| < \varepsilon)$

No nosotros sabemos que dado $\varepsilon > 0$ lo que queremos

$$|X_m - l| < \varepsilon, \forall m \geq m_0$$

②

luego si $m_0' = m_0$

$$\Rightarrow f(m_0') \geq m_0 \Rightarrow |X_{f(m_0')} - l| < \varepsilon$$

Ade más si $m \geq m_0' = m_0$

$$\Rightarrow f(m) \geq m \geq m_0 \Rightarrow f(m) \geq m_0 \Rightarrow |X_{f(m)} - l| < \varepsilon //$$

$$n \cdot a_n \rightarrow l \in \mathbb{R}$$

$$PDQ \quad a_n \rightarrow 0$$

$$(\exists \epsilon > 0) (\forall m \in \mathbb{N}) (\exists n' \geq m) : |a_{n'} - 0| > \epsilon$$

ϵ fijo

$n' = f(m) \geq m$
(Para cada $m \exists n' \geq m$)

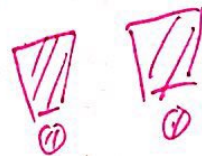
$$|a_{f(m)} - 0| > \epsilon$$

Se tiene $|a_{f(m)}| > \epsilon \quad (\forall m \in \mathbb{N})$

Pero.

$$\underbrace{a_n \cdot n \rightarrow l}_{C_n \rightarrow l} \Rightarrow \underbrace{f(m) \cdot a_{f(m)} \rightarrow l}_{C_{f(m)} \rightarrow l}$$

Acá use la indicación



$$\Rightarrow C_n \text{ acotada pues converge}$$

pero

$$|C_n| = |f(n) \cdot a_{f(n)}| = |f(n)| \cdot |a_{f(n)}| \geq f(n) \cdot \epsilon \geq n \cdot \epsilon$$

$$|C_n| \geq n \cdot \epsilon \rightarrow \infty$$



P6 | Caso base $m=2$.

$$a_1 \in (0, 1)$$

$$a_0 \in (0, 1)$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2} (1 + a_0^2)$$

$$\Rightarrow 0 < a_0 < 1$$

$$0 < a_0^2 < 1 \quad / + 1$$

$$0 < 1 < a_0^2 + 1 < 2 \quad / \cdot \frac{1}{2}$$

$$0 < \frac{a_0^2 + 1}{2} < 1 \quad / \cdot a_1$$

$$0 < \frac{(a_0^2 + 1) a_1}{2} < 1 //$$

Inducción
fuerza

Asumo k cumple

HI | ~~$a_k \in (0, 1)$~~ ~~$a_k^2 \in (0, 1)$~~ $a_{k+1} = \frac{a_k (1 + a_k^2)}{2} \in (0, 1)$
 ~~$a_k \in (0, 1)$~~
 $a_k \in (0, 1)$

$$a_{k+2} = \frac{a_{k+1} (1 + a_k^2)}{2} \quad \left| \begin{array}{l} 0 < 1 < a_k^2 + 1 < 2 \quad / \cdot \frac{1}{2} \\ 0 < \frac{a_k^2 + 1}{2} < 1 \quad / \cdot a_{k+1} \\ 0 < a_{k+1} \frac{(a_k^2 + 1)}{2} < 1 \quad \square \end{array} \right.$$

ii) mostrar

$$a_{n+1} = a_n \frac{a_{n-1}^2 + 1}{2}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a_{n-1}^2 + 1}{2} < \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Leftrightarrow$$



Secuencia decreciente y acotada, por lo que converge.

iii) Como existe límite, yo puedo decir $\lim a_n = l$

$$\Rightarrow \lim a_n = \lim a_{k-1} \frac{1 + a_{k-2}^2}{2}$$

$$l = \lim a_n = \frac{\lim a_{k-1}}{2} + \lim \frac{a_{k-2}^2}{2} \cdot a_{k-1} = \frac{l}{2} + \frac{l^2}{2} \cdot l = \frac{l}{2} + \frac{l^3}{2}$$

$$\Rightarrow l = \frac{l}{2} + \frac{l^3}{2} \Rightarrow 0 = \frac{l}{2} [l^2 + 1 - 1] \Rightarrow 0 = \frac{l}{2} [l^2]$$

$l =$

Es importante estudiar los casos y descartar los demás

$$\Rightarrow l = 0 \quad | \quad l \neq 1 \quad \checkmark \text{ decreciente}$$

$$\Rightarrow l = \pm 1 \quad | \quad \Rightarrow l = 0$$

$$l \neq -1 \quad a_n \notin [0, 1]^c$$