$X_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$

índice = contador

X_n acotado $\iff \forall n \in \mathbb{N}, \exists M > 0, |X_n| \leq M$

Convergencia

$X_n \to \ell \iff \lim\limits_{n \to +\infty} X_n = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, |X_n - \ell| < \varepsilon$

Supremo como el menor de las cotas superiores

Ínfimo el mayor de las cotas inferiores

Recordemos que el axioma del supremo

Si un conjunto es no vacío y acotado superiormente entonces tiene supremo

---

MAX y de min, cuando $\sup(A) \in A$

$\Rightarrow \max\{A\} = \sup(A)$

cuando $\inf(A) \in A \Rightarrow \min\{A\} = \inf(A)$

P1 d) Pruebe n^2+1 diverge

¡Contradicción.

$$\lim_{n\to\infty} \boxed{\max\left\{ \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{\star}, \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{n}}_{\flat} \right\}} = l \quad \text{Calcule el límite y demuéstrelo}$$

$\max\{2,5\} = 5$

$\max\{n, n+1\} = n+1$, $n \neq 0$

$\dfrac{(-1)^n}{n}$

$n=1 \Rightarrow \dfrac{(-1)^1}{1} = -1$

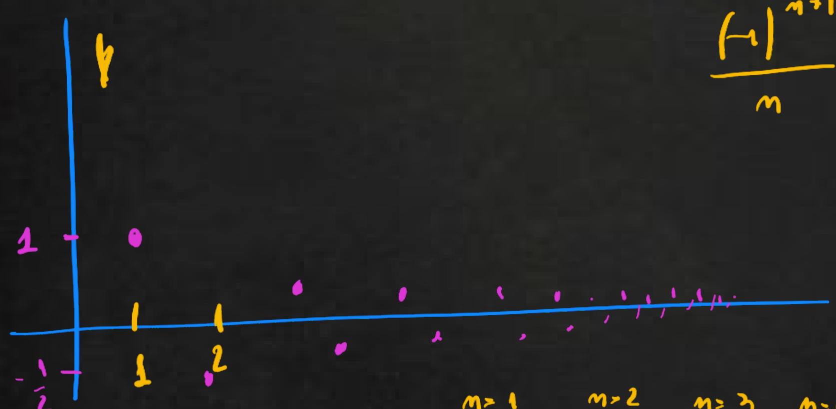
$n=2 \Rightarrow \dfrac{(-1)^2}{2} = \dfrac{1}{2}$

$n=3 \Rightarrow \dfrac{(-1)^3}{3} = \dfrac{-1}{3}$

$\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$

$n=1 \Rightarrow \dfrac{(-1)^{1+1}}{1} = 1$

$n=2 \Rightarrow \dfrac{(-1)^3}{2} = \dfrac{-1}{2}$



$n=1 \quad n=2 \quad n=3 \quad n=4 \quad n=5$

$\star \left\{ \dfrac{(-1)^n}{n} \right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{ -1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{5}, \ldots \dfrac{(-1)^n}{n} \right\}$

$\flat \left\{ \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}_{n\in\mathbb{N}} = \left\{ 1, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{5}, \ldots \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} \right\}$

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots$$

$$= \frac{1}{n}$$

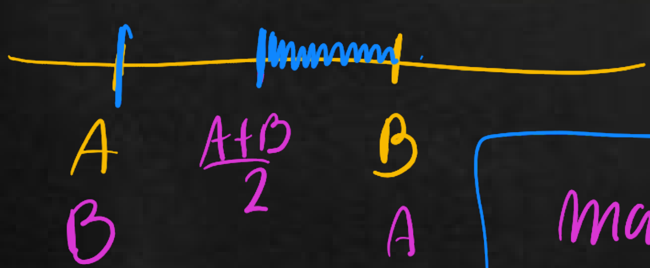
POG

$$\max\left\{\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\} = \frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

$$\max\{A, B\} = \frac{A+B}{2} + \frac{|A-B|}{2}$$

$$\max\{5, 7\} = \frac{5+7}{2} + \frac{|5-7|}{2}$$

$$= 6 + 1 = 7$$



$$\boxed{\begin{aligned} \max\{A, B\} &= \frac{A+B}{2} + \frac{|A-B|}{2} \\ \min\{A, B\} &= \frac{A+B}{2} - \frac{|A-B|}{2} \end{aligned}}$$

$$\max\Big\{\underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{A},\ \underbrace{\frac{(-1)^{n+1}}{n}}_{B}\Big\}$$

$(-1)^n(-1)$

$$= \frac{A+B}{2} + \frac{|A-B|}{2} = \frac{\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^{n+1}}{n}}{2} + \frac{\left|\frac{(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|}{2}$$

$$= \cancel{\frac{(-1)^n}{2n}\left[1-1\right]}^{\,0} + \frac{\left|\frac{(-1)^n}{n}\left[1+1\right]\right|}{2}$$

$$= \frac{\left|\frac{(-1)^n}{n}\right|\cancel{|2|}}{\cancel{2}} = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

$$\left|\frac{-1}{1}\right|, \left|\frac{1}{2}\right|, \left|\frac{-1}{3}\right|, \left|\frac{1}{4}\right|, \left|\frac{-1}{5}\right| \ldots$$

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5}$$

Probamos

$$\max\Big\{\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{n}\Big\} = \frac{1}{n} \ \Big/ \lim_{n\to+\infty}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \max\Big\{\frac{(-1)^n}{n}, \frac{(-1)^{n+1}}{n}\Big\} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$$

PDQ! $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

Sea $\varepsilon > 0$

Veamos que $\left|\frac{1}{n} - 0\right|$

$= \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n} < \varepsilon \iff V$

$\boxed{1 < n \cdot \varepsilon}$ Prop Arq $\iff V$

Observación: Las siguientes expresiones son equivalentes a la anterior:

$$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ \ell - \varepsilon \leq s_n \leq \ell + \varepsilon$$
$$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ |s_n - \ell| \leq \varepsilon$$
$$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)\ |s_n - \ell| < \varepsilon$$
$$\iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \geq n_0)\ |s_n - \ell| \leq \varepsilon \iff s_n \to \ell$$

Observación: El intervalo $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$ suele llamarse en el contexto de la Topología, *vecindad en torno a* ℓ. Luego, decir que $s_n \to \ell$ es equivalente a decir que a partir de cierto natural n_0 (es decir, para todo $n \geq n_0$), los términos s_n están todos dentro de esta vecindad en torno a ℓ.

El factor $|s_n - \ell|$ es la *distancia entre* s_n *y* ℓ, luego decir que $s_n \to \ell$ es equivalente a decir que a partir de cierto n_0 la distancia entre s_n y ℓ es menor o igual que ε. Como esto último debe ocurrir $\forall \varepsilon$, se concluye que cuando $s_n \to \ell$, la distancia entre s_n y ℓ puede hacerse tan pequeña como se desee.

Cuando una sucesión no converge a real alguno, se dice que es una **sucesión divergente.**

Supremo

$A \subseteq B \Rightarrow \inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)$

P5. *[Té Supremo* ***HIERBA LIMÓN FRAMBUESA****]*
Sean $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado y sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función decreciente. Demuestre que el conjutno $f(\mathbb{A}) = \{f(x)/x \in \mathbb{A}\}$ tiene ínfimo y supremo, y que:

$f(A) = \{f(x), x \in A\}$ $\quad f \searrow$

$$f(\mathbf{sup}(\mathbb{A})) \leq \mathbf{inf}(f(\mathbb{A})) \leq \mathbf{sup}(f(\mathbb{A})) \leq f(\mathbf{inf}(\mathbb{A}))$$

$\forall x \in A, \exists M > 0, |x| \leq M \iff$ Acotado

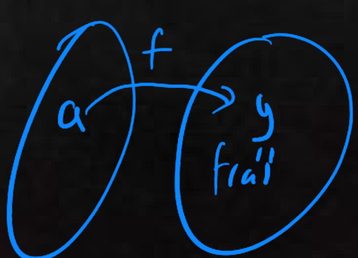
$A \neq \phi$ y como A Acotado $\Rightarrow$ acotado superiormente
$\Rightarrow$ acotado inferiormente

Ax. Supremo, como $A \neq \phi$ acotado superiormente
$\Rightarrow \exists \sup(A)$
como $A \neq \phi$ y acotado inferiormente
$\Rightarrow \exists \inf(A)$ Veamos como se comporta
$f(A)$ como conjunto $\quad \boxed{A \subseteq \mathbb{R}}$

Como $A \neq \phi$, f está bien definida ($f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$)
$f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

si $\exists a \in A \Rightarrow \exists f(a) \Rightarrow f(a) \in f(A) \neq \phi$

$f(A) = \{y \in \mathbb{R} / \exists x \in A, f(x) = y\}$ $\leftarrow$



Como $f(A) \neq \emptyset$ $\quad A \subseteq \mathbb{R}$

$\forall x \in A \quad \inf(A) \le x \le \sup(A)$,

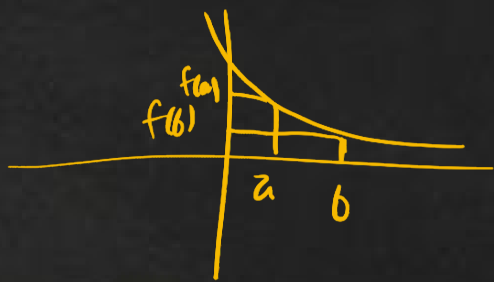
$\Rightarrow \underset{\mathbb{R}}{\inf(A)} \le \underset{\mathbb{R}}{x} \wedge \underset{\mathbb{R}}{x} \le \underset{\mathbb{R}}{\sup(A)}$, f está bien definida en $\mathbb{R}$

f era una función de qué tipo?

f es decreciente

$a < b$ /f

$f(b) \le f(a)$



tenemos $\inf(A) \le x \wedge x \le \sup(A)$

tomo f a ambos lados pues está definida

$\boxed{f(x)} \le f(\inf(A)) \wedge f(\sup(A)) \le \boxed{f(x)}$

Huadringo

$\Rightarrow f(\sup(A)) \le f(x) \le f(\inf(A)) \quad \forall x \in A$,

$\Rightarrow$ cota inf $\qquad$ cota sup

$\Rightarrow f(A) = \{f(x), x \in A\}$ es Acotado, $\forall x \in A$

Ax supremo como $f(A) \neq \emptyset$
y acotado $\Rightarrow \exists \sup(f(A))$
y $\inf(f(A))$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

P5. *[Té Supremo HIERBA LIMÓN FRAMBUESA]*
Sean $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío y acotado y sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función decreciente. Demuestre que el conjutno $f(\mathbb{A}) = \{f(x)/x \in \mathbb{A}\}$ tiene ínfimo y supremo, y que:

$$f(\mathbf{sup}(\mathbb{A})) \leq \mathbf{inf}(f(\mathbb{A})) \leq \mathbf{sup}(f(\mathbb{A})) \leq f(\mathbf{inf}(\mathbb{A}))$$

1) $\inf(f(A)) \leq \sup(f(A))$
2) $f(\sup(A)) \leq \inf(f(A))$
3) $\sup(f(A)) \leq f(\inf(A))$
4) $f(\sup(A)) \leq f(\inf(A))$

1) $\forall y \in f(A)$
$\inf(f(A)) \leq y \leq \sup(f(A))$
$\Rightarrow \inf(f(A)) \leq \sup(f(A))$ ▨

$f(x) = y$

Hachamingo

3) $\forall x \in A$, $f(\sup(A)) \leq f(x) \leq f(\inf(A))$

$\forall y \in f(A)$, $\underbrace{\boxed{f(\sup(A))}}_{\text{cota inferior}} \leq y \leq \underbrace{\boxed{f(\inf(A))}}_{\text{cota superior}}$

$y \in f(A)$

Pero $\sup(f(A))$ es la menor de los cotas superiores de $f(A)$ — cota sup de $f(A)$

$\Rightarrow \sup(f(A)) \leq f(\inf(A))$ — 3)
$\Rightarrow f(\sup(A)) \leq \inf(f(A))$ — 2)

PDQ 4) $f(\sup(A)) \leq f(\inf(A))$

con 1), 2), 3), 4)

$\Rightarrow$

$$f(\sup(A)) \leq \inf(f(A)) \leq \sup(f(A)) \leq f(\inf(A))$$

4,0 Felicidades !! :)

$$\boxed{A \subseteq B \Rightarrow \inf(B) \leq \inf(A) \leq \sup(A) \leq \sup(B)}$$

$[-1,1]$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\sin(n!)+2n^2)}{(3n^2+4)} \cdot \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sin(n!)}^{\,0} + 2}{3+4\cdot\cancel{\frac{1}{n^2}}^{\,0}} = \frac{2}{3}$$

$\frac{1}{n}$ es nula luego $\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2}$ es nula

$\frac{1}{n^2}$ nula, $\frac{1}{n^2}\cdot\sin(n!) =$ nula porque nula x acotada

$\sin(x) \in [-1,1] \Leftrightarrow |\sin(x)| \leq 1 = M$

$\frac{1}{n^2}\cdot \sin(n!)$ es nula

sucesión costante $X_n = c$, $c \in \mathbb{R}$

$|X_n| \leq c = M \iff$ Acotada

$$\lim n\cdot\left(1-\sqrt{1+\frac{3}{n}}\right)\frac{\left(1+\sqrt{1+\frac{3}{n}}\right)}{\left(1+\sqrt{1+\frac{3}{n}}\right)}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(\cancel{1}-\left(\cancel{1}+\frac{3}{n}\right)\right)}{1+\sqrt{1+\frac{3}{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-3}{1+\sqrt{1+\frac{3}{n}}} = \frac{-3}{2}$$

$\star$ $\underbrace{\sqrt{1+\frac{3}{n}} \to 1}$, $1+\sqrt{1+\frac{3}{n}} \to 2 \neq 0$

PDQ $\lim \underbrace{\sqrt{1+\frac{3}{n}}}_{X_n} = \underbrace{1}_{\ell}$

$\forall \varepsilon>0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \left|\sqrt{1+\frac{3}{n}} - 1\right| < \varepsilon$

Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario

$$\left|\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}-1\right)\cdot\frac{\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}{\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1\right)}\right|$$

$$=\frac{\frac{3}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+1} \leq \frac{\frac{3}{n}}{\sqrt{1}+1} \leq \frac{3}{2n} < \varepsilon$$

basta

$$n_0=\left[\frac{3}{2\varepsilon}\right]+1 \in \mathbb{N} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \sqrt{1+\frac{3}{n}} \to 1 \quad //$$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE