MA1101-10 Introducción al Cálculo
Profesor: Pedro Pérez.
Auxiliar: Patricio Yáñez A.
Consultas: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 8: Trigo x1000

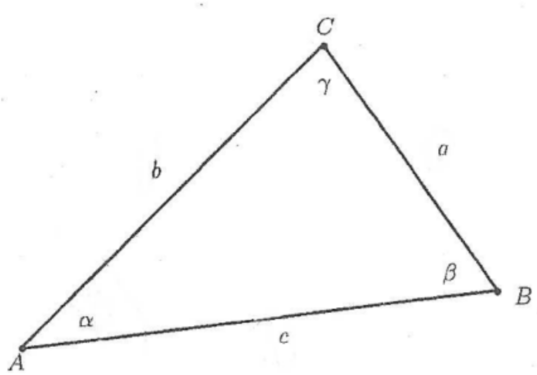
7 de Mayo de 2024

P1. Demuestre la siguiente propiedad.

$$\frac{1}{2} \cdot sin(x) \cdot sec^2(\frac{x}{2}) + cos(x) \cdot tan(\frac{x}{2}) - sin(x) = 0$$

$$tan(4x) = \frac{4tan(x) - 4tan^3(x)}{1 - 6tan^2(x) + tan^4(x)}$$

P2. Consideremos el triangulo ABC de ángulos respectivos.



si $\alpha = 2 \cdot \beta \Rightarrow a^2 = b \cdot (b + c)$

P3. Demuestre:
$sin(x) + sen(y) = 2 \cdot sin(\frac{x+y}{2}) \cdot cos(\frac{x-y}{2})$

P4. ***[Más de funciones]***
Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1 + \text{sen}(x)}{1 - \cos(x)}$$

Encuentre dominio, ceros, paridad, signos, periodicidad e inyectividad.

P5. ***[Más para pensar]*** Para las constantes $A, B, C \in \mathbb{R}$, con $A > B$, se definen las funciones reales f, gh en todo $x \in \mathbb{R}$ como se detalla a continuación:

$$f(x) = Acos^2(x) + Bsen^2(x) - 2Csen(x)cos(x)$$
$$g(x) = Asen^2(x) + Bcos^2(x) - 2Csen(x)cos(x)$$
$$h(x) = (A - B)sen(x)cos(x) + C(cos^2(x) - sen^2(x))$$

Se pide lo siguiente:

a) Pruebe que si $C = 0$, h alcanza su valor máximo para $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

b) Demuestre que el conjunto de los ceros de h es $Ceros(h) = \left\{x \in \mathbb{R} tan(2x) = \frac{2C}{B - A}\right\}$.

c) Estudie f y g

Identidades.

1. $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
2. $\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$
3. $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x$
4. $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$
5. $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$ y $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
6. $|\operatorname{sen} \frac{x}{2}| = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos x)}$ y $|\cos \frac{x}{2}| = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos x)}$
7. $|\tan \frac{x}{2}| = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$, $\tan \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$ y $\tan \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$
8. $\operatorname{sen} x \pm \operatorname{sen} y = 2 \operatorname{sen}(\frac{x \pm y}{2}) \cos(\frac{x \mp y}{2})$
9. $\cos x + \cos y = 2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$
10. $\cos x - \cos y = -2 \operatorname{sen}(\frac{x+y}{2}) \operatorname{sen}(\frac{x-y}{2})$
11. $\tan x \pm \tan y = \frac{\operatorname{sen}(x \pm y)}{\cos x \cos y}$

1. Consideremos la ecuación $\operatorname{sen} x = a$ donde $a \in \mathbb{R}$

   a) Si $|a| > 1$, entonces no existe solución.

   b) Si $|a| \leq 1$, es fácil encontrar una solución $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$, que corresponde a $\alpha = \arcsin a$.

   Sin embargo como la función sen no es epiyectiva, esta solución no es única. La solución general suele escribirse de la siguiente forma:

   $$x = k\pi + (-1)^k \alpha$$

   donde $k \in \mathbb{Z}$. Así tomamos todos los posibles valores de x dada la periodicidad de sen.

2. Consideremos la ecuación $\cos x = a$ donde $a \in \mathbb{R}$

   a) Si $|a| > 1$, entonces no existe solución.

   b) Si $|a| \leq 1$, es fácil encontrar una solución $\alpha \in [0, \pi]$, que corresponde a $\alpha = \arccos a$.

Sin embargo como la función cos no es epiyectiva, esta solución no es única. La solución general suele escribirse de la siguiente forma:

$$x = 2k\pi \pm \alpha$$

donde $k \in \mathbb{Z}$. Así tomamos todos los posibles valores de x dada la periodicidad de cos.

3. Consideremos la ecuación $\tan x = a$ donde $a \in \mathbb{R}$.

   $\forall a \in \mathbb{R}$, es fácil encontrar una solución $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$,que corresponde a $\alpha = \arctan a$.

   Sin embargo como la función tan no es epiyectiva, esta no es la única solución.

   La solución general suele escribirse en la ecuación

   $$x = k\pi + \alpha \quad \text{donde } k \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplos:

1. $\operatorname{sen} 2x + \cos x = 0$
2. $1 + \operatorname{sen} x + \cos x + \operatorname{sen} 2x + \cos 2x = 0$
3. $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$