Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
01 de Mayo del 2009

Pauta Guía Problemas: Semana 7

Profesor: Jorge San Martin H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Resolver la ecuación trigonométrica:

$$\operatorname{sen} 2x = \cos\frac{x}{2}.$$

Graficar las soluciones en el círculo geométrico y determinar si $\frac{3\pi}{5}$ es solución.

Solución

Primero recordemos que $\operatorname{sen}\alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$, entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} 2x = \cos\frac{x}{2} &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos\frac{x}{2}\\ &\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \cos\frac{x}{2} = 0.\end{aligned}$$

Ahora, veamos que $\cos x - \cos y$ se puede escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\cos x - \cos y &= \cos\left(\left(\frac{x+y}{2}\right) + \left(\frac{x-y}{2}\right)\right) - \cos\left(\left(\frac{x+y}{2}\right) - \left(\frac{x-y}{2}\right)\right)\\ &= -2\operatorname{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

Donde la última expresión, se obtiene después de aplicar las fórmulas ya conocidas para calcular el coseno de sumas y restas de ángulos, según corresponda.

Con esto, volvemos al problema, y reescribimos:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) - \cos\frac{x}{2} = 0 &\Leftrightarrow -2\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 2x + \frac{x}{2}}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\frac{\pi}{2} - 2x - \frac{x}{2}}{2}\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi - 3x}{4}\right)}_{(1)}\underbrace{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi - 5x}{4}\right)}_{(2)} = 0.\end{aligned}$$

Lo que vale si y sólo si $(1) = 0 \vee (2) = 0$. Resolviendo las ecuaciones por separado tenemos

$$\begin{aligned}(1) = 0 &\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi - 3x}{4}\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{\pi - 3x}{4} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow \frac{3x}{4} = \frac{\pi}{4} - k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi(1-4k)}{3}.\end{aligned}$$

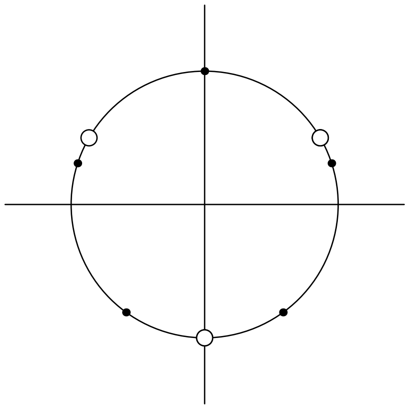
y para (2)

$$\begin{aligned}(2) = 0 &\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi - 5x}{4}\right) = 0\\ &\Leftrightarrow \frac{\pi - 5x}{4} = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow \frac{5x}{4} = \frac{\pi}{4} - k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow x = \frac{\pi(1-4k)}{5}.\end{aligned}$$

Para ver si $\frac{3\pi}{5}$ es solución, debemos encontrar, en las soluciones de (2), un $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{\pi(1-4k)}{5} \equiv_{4\pi} \frac{3\pi}{5}$. Esto equivale a encontrar $k, \ell \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{\pi(1-4k)}{5} = \frac{3\pi}{5} + 4\ell\pi$. Esto pues la función $\operatorname{sen} 2x - \cos\frac{x}{2}$ es 4π-periódica. Resolvamos

$$\begin{aligned}\frac{3\pi}{5} - \frac{\pi(1-4k)}{5} = \frac{3\pi}{5} + 4\ell\pi &\Leftrightarrow 3 - 1 + 4k = 20\ell\\ &\Leftrightarrow 2 + 4k = 20\ell\\ &\Leftrightarrow 1 + 2k = 10\ell\end{aligned}$$

Lo que es imposible. Concluimos que $\frac{3\pi}{5}$ no es solución.
Para graficar las soluciones, notemos que como la función es 4π-periódica, entonces en el circulo unitario veremos aparentemente soluciones que no lo son, por ejemplo $\frac{3\pi}{5}$, pues $\frac{3\pi}{5} \equiv_{2\pi} \frac{-7\pi}{5}$ y sabemos que $\frac{-7\pi}{5}$ es solución. Entonces lo que haremos será hacer el cambio $x = 2\alpha$ (para obtener una función 2π-periódica y graficaremos para α.



P2. **(a)** Demostrar que $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$.

Solución

Primero notemos que, sumando un cero adecuado, tenemos

$$\alpha = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right), \quad \beta = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Entonces

$$\cos\alpha + \cos\beta = \cos\left[\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right] + \cos\left[\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]$$

Recordemos ahora que $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$. Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}\cos\alpha + \cos\beta &= \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cancel{- \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\\ &+ \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \cancel{+ \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\\ &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).\end{aligned}$$

(b) Utilizar lo anterior para resolver la ecuación $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$.

Solución

Notemos que $\cos 0 = 1$, entonces reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned}
\cos 2x + 1 + \overbrace{\cos 3x + \cos x}^{(a)} = 0 &\Leftrightarrow \overbrace{\cos x + \cos 0}^{(a)} + 2\cos 2x \cos x = 0\\
&\Leftrightarrow \cancel{2}\cos^2 x + \cancel{2}\cos 2x \cos x = 0\\
&\Leftrightarrow \cos x(\overbrace{\cos 2x + \cos x}^{(a)}) = 0\\
&\Leftrightarrow \cancel{2}\underbrace{\cos x}_{(1)}\underbrace{\cos\frac{3x}{2}}_{(2)}\underbrace{\cos\frac{x}{2}}_{(3)} = 0.
\end{aligned}$$

Ahora tenemos 3 ecuaciones para x: $(1) = 0, (2) = 0, (3) = 0$. Resolviendo por separado:

- (1)=0:

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi.$$

- (2)=0:

$$\begin{aligned}
\cos\frac{3x}{2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{3x}{2} = 2k\pi\\
&\Leftrightarrow x = \frac{4k\pi}{3}.
\end{aligned}$$

- (3)=0:

$$\begin{aligned}
\cos\frac{x}{2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{x}{2} = 2k\pi\\
&\Leftrightarrow x = 4k\pi.
\end{aligned}$$

con $k \in \mathbb{Z}$.

P3. Resolver la ecuación

$$\sqrt{3}\cos x + \operatorname{sen} x = 1.$$

Solución

Un camino posible para solucionar el problema, es aplicar un método visto en cátedra, haciendo el cambio de variables $a = \cos x$, $b = \operatorname{sen} x$, y resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
a\sqrt{3} + b = 1\\
a^2 + b^2 = 1
\end{aligned}$$

Donde la última expresión, nace del hecho de que $(\cos x, \operatorname{sen} x)$ es un punto perteneciente a la circunferencia unitaria. A continuación, mostraremos otra solución, un poco más "'elegante"', notando que si multiplicamos la igualdad por $\frac{1}{2}$ obtenemos que

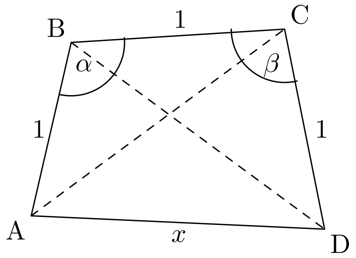
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}.$$

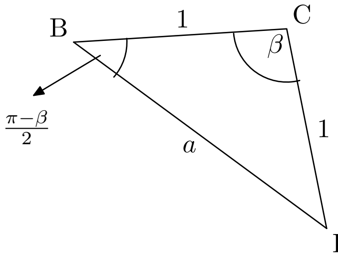
Recordemos que $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y que $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Entonces

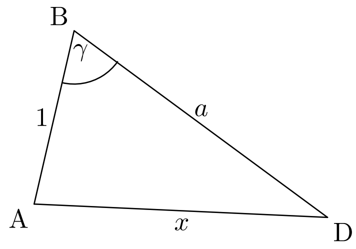
$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\cos x + \cos\frac{\pi}{3}\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}.$$

Y aplicando la fórmula $\operatorname{sen}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$ tenemos

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) = \frac{1}{2} &\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = k\pi + (-1)^k \overbrace{\operatorname{arcsen}\frac{1}{2}}^{\frac{\pi}{6}}\\
&\Leftrightarrow x = \left(k - \frac{1}{3}\right)\pi + (-1)^k\frac{\pi}{6}.
\end{aligned}$$







P4. En un cuadrilátero $ABCD$, conocemos los ángulos ABC, BCD, α y β respectivamente. Además se sabe que la longitud de los lados AB, BC y CD es 1.
Probar que la longitud del lado DA es igual a $\sqrt{3 - 2\cos\alpha - 2\cos\beta + 2\cos(\alpha+\beta)}$.
Solución
Tenemos la siguiente situación.

Consideremos los triángulos BCD y ABD.

En primer lugar, notemos que en el triangulo ABD, tenemos la relación $\gamma + \frac{\pi-\beta}{2} = \alpha$. Luego, usando el Teorema del Coseno en el triangulo BCD, tenemos que

$$\begin{aligned} 1 = 1 + a^2 - 2a\cos\left(\frac{\pi-\beta}{2}\right) &\Leftrightarrow 0 = a^2 - 2a\,\mathrm{sen}\,\frac{\beta}{2} \\ &\Leftrightarrow 0 = a\left(a - 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\beta}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow a = 0 \vee a = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

Descartamos el caso a=0, pues no presenta interés para el problema.
Haciendo lo análogo en el triangulo ABD

$$\begin{aligned} x^2 = 1 + 4\,\mathrm{sen}^2\,\frac{\beta}{2} - 4\,\mathrm{sen}\,\frac{\beta}{2}\,\mathrm{sen}\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) &= 1 + 2(1-\cos\beta) - 4\,\mathrm{sen}\,\frac{\beta}{2}\,\mathrm{sen}\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right) \\ &= 1 + 2(1-\cos\beta) - 4\,\mathrm{sen}\,\frac{\beta}{2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\alpha+\beta}{2}\right). \end{aligned}$$

En el problema **P1.** demostramos que $\cos x - \cos y = -2\,\mathrm{sen}\left(\frac{x+y}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{x-y}{2}\right)$, entonces tenemos la siguiente identidad

$$\cos(\alpha+\beta) - \cos\alpha = -2\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\alpha+\beta}{2}\right)\mathrm{sen}\,\frac{\beta}{2}.$$

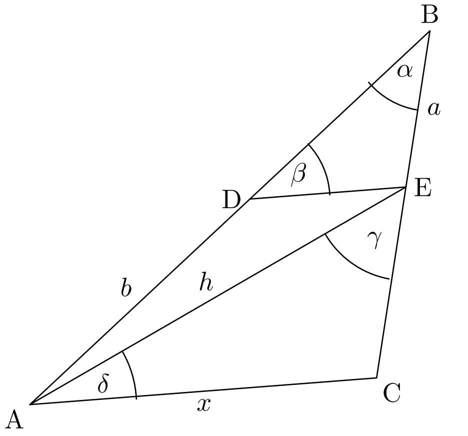
y entonces obtenemos que

$$\begin{aligned} x^2 = 1 + 2(1-\cos\beta) + 2(\cos(\alpha+\beta) - \cos\alpha) &\Leftrightarrow x^2 = 3 - 2\cos\beta - 2\cos\alpha + 2\cos(\alpha+\beta) \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{3 - 2\cos\beta - 2\cos\alpha + 2\cos(\alpha+\beta)}. \end{aligned}$$

P5. Considere la siguiente figura

(a) Encontrar d en términos de α, β y a.
Solución
Usando el Teorema del Seno en el triangulo DEB:

$$\frac{\mathrm{sen}\,\beta}{a} = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{d} \Leftrightarrow d = a \cdot \frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{\mathrm{sen}\,\beta}$$



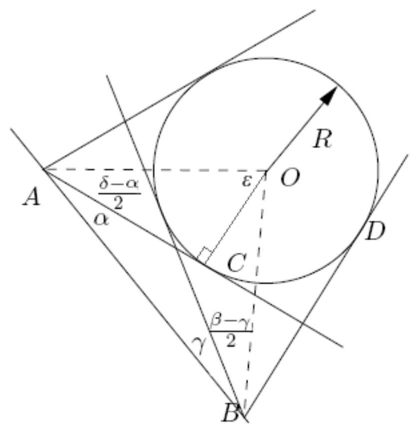
(b) Encontrar h en términos de α, β, b y d.
Solución
Usando el Teorema del Coseno en el triangulo ADE:

$$h^2 = d^2 + b^2 - 2bd\cos(\pi - \beta) \Rightarrow h = \sqrt{a^2\frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\beta} + b^2 + 2ab\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}\cos\beta}$$

(c) Determinar el valor de x.
Solución
Usando el Teorema del Seno en el triangulo ACE:

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi - \delta - \gamma)}{h} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{x} \Leftrightarrow \frac{\operatorname{sen}(\delta + \gamma)}{h} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{x}$$
$$\Leftrightarrow x = h \cdot \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\operatorname{sen}(\delta + \gamma)}$$

P6. Se quiere medir el radio R de un estadio de forma circular, para lo cual se dispone de la distancia L entre los puntos A y B y los ángulos α, β, γ, δ entre las rectas tangentes a la circunferencia que pasan por A y B y el trazo $\overline{AB}$, como se muestra en la figura. Exprese R en términos de $L = \overline{AB}$ y α, β, γ, δ.



Solución
Como el triangulo ACO es recto, tenemos, por definición, que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\delta - \alpha}{2}\right) = \frac{R}{\overline{OA}}$$

Luego, podemos calcular $\overline{OA}$ como sigue:

Si nos fijamos en el triangulo AOB, observamos que

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \pi - \left(\alpha - \frac{\delta-\alpha}{2} + \gamma - \frac{\beta-\gamma}{2}\right) \\ &= \pi - \left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\right).\end{aligned}$$

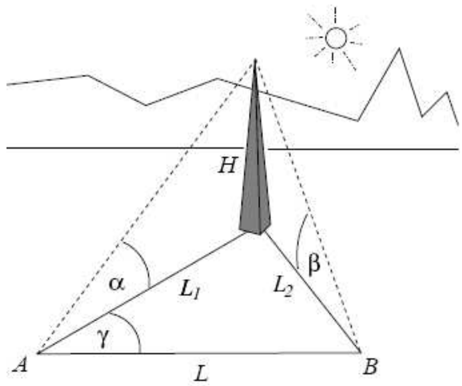
Y luego usando el Teorema del Seno en el triangulo AOB

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sen}\left(\pi - \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\right)}{L} &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\overline{OA}} \\ \Leftrightarrow \overline{OA} &= \frac{L\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\right)}\end{aligned}$$

Y por lo tanto

$$R = \overline{OA}\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\delta-\alpha}{2}\right) = \frac{L\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\frac{\delta-\alpha}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}\right)}.$$

P7. La altura H de la torre de la figura es desconocida. Se conocen los ángulos de elevación α y β medidos desde dos puntos A y B del suelo, separados por una distancia $L > 0$ y formando con la base de la torre un ángulo γ. Sabiendo que la torre es vertical respecto del suelo, calcule H en términos de L, α, β, γ en los casos $\alpha > \beta$, $\alpha = \beta$ y $\alpha < \beta$.
(Nota: $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $-\pi < \gamma < \pi$).
Solución



Directamente de la figura tenemos que

$$L_1 = \frac{H}{\operatorname{tg}\alpha}, \quad L_2 = \frac{H}{\operatorname{tg}\beta}$$

Luego, del Teorema del Coseno tenemos que

$$\begin{aligned}L_2^2 = L_1^2 + L^2 - 2LL_1\cos\gamma &\Leftrightarrow \frac{H^2}{\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{H^2}{\operatorname{tg}^2\alpha} + L^2 - 2\frac{LH\cos\gamma}{\operatorname{tg}\alpha} \\ &\Leftrightarrow H^2(\operatorname{cotg}^2\beta - \operatorname{cotg}^2\alpha) + 2LH\operatorname{cotg}\alpha\cos\gamma - L^2 = 0\end{aligned}$$

Aquí, si imponemos $\alpha = \beta$, obtenemos un valor para H dado por

$$H = \frac{L\operatorname{tg}\alpha}{2\cos\gamma}$$

Supongamos ahora que $\alpha \neq \beta$, entonces resolviendo la cuadrática para H

$$H = \frac{-2L\operatorname{cotg}\alpha\cos\beta \pm \sqrt{4L^2\operatorname{cotg}^2\alpha\cos^2\beta + 4(\operatorname{cotg}^2\beta - \operatorname{cotg}^2\alpha)L^2}}{2(\operatorname{cotg}^2\beta - \operatorname{cotg}^2\alpha)}$$

Notemos que dependiendo del signo de $\operatorname{cotg}^2\beta - \operatorname{cotg}^2\alpha$ tenemos dos casos, pues solo nos interesa una solución positiva.

- Caso 1 ($\alpha < \beta$): Aquí tenemos que $\operatorname{tg}\alpha < \operatorname{tg}\beta \Rightarrow \operatorname{cotg}^2\alpha > \operatorname{cotg}^2\beta$ y entonces nos quedamos con la solución
$$H = \frac{-2L\operatorname{cotg}\alpha\cos\beta - \sqrt{4L^2\operatorname{cotg}^2\alpha\cos^2\beta + 4(\operatorname{cotg}^2\beta - \operatorname{cotg}^2\alpha)L^2}}{2(\operatorname{cotg}^2\beta - \operatorname{cotg}^2\alpha)}$$
por ser positiva.
- Caso 2 ($\alpha > \beta$): Análogamente al caso anterior, nos quedamos con la solución
$$H = \frac{-2L\operatorname{cotg}\alpha\cos\beta + \sqrt{4L^2\operatorname{cotg}^2\alpha\cos^2\beta + 4(\operatorname{cotg}^2\beta - \operatorname{cotg}^2\alpha)L^2}}{2(\operatorname{cotg}^2\beta - \operatorname{cotg}^2\alpha)}$$
por ser positiva.