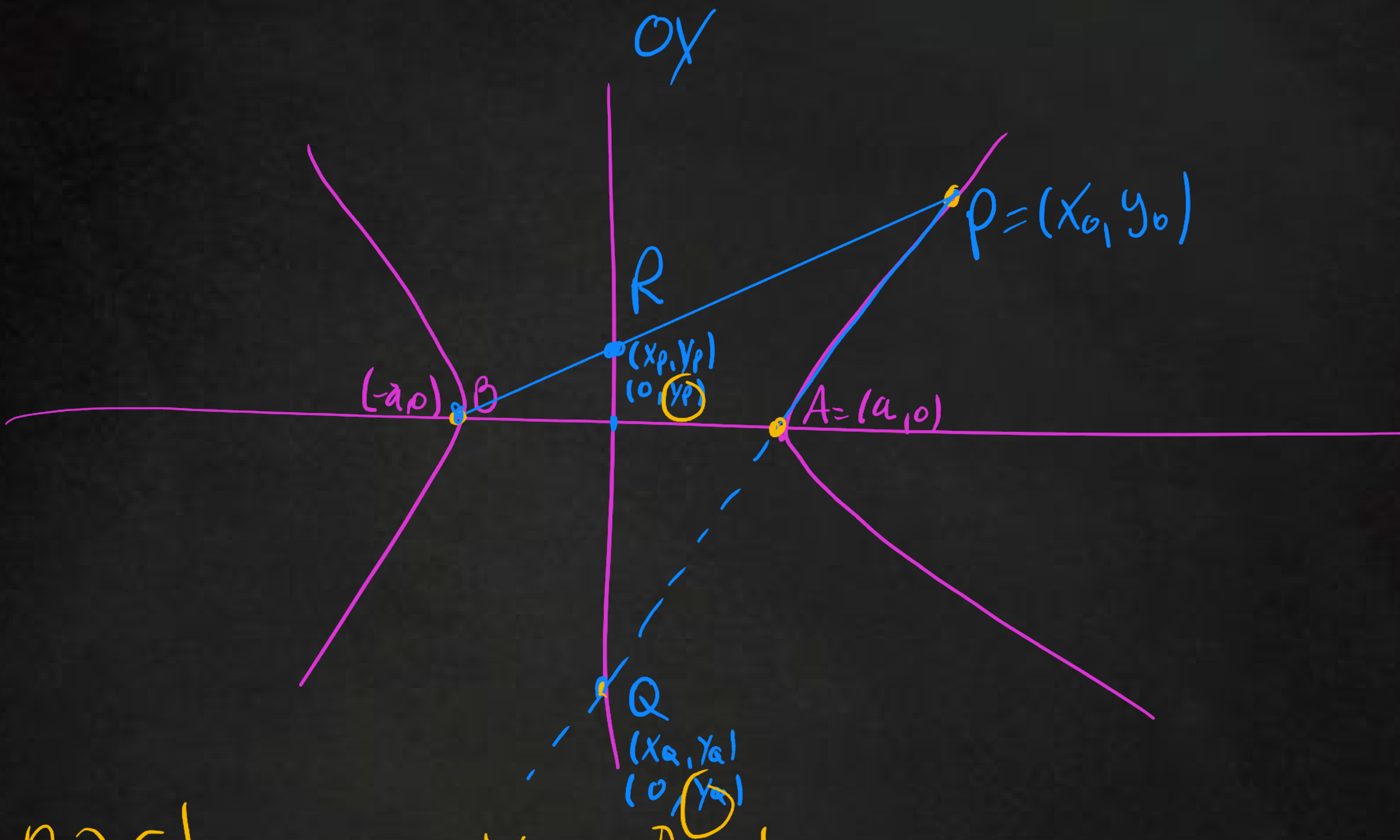
Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



PDQ

$y_Q \cdot y_P = cte$ no depende de x_0, y_0

L_1 como Ec P y A $\left(\begin{matrix}(x_0, y_0)\\(x_2, y_2)\end{matrix}, \begin{matrix}(a, 0)\\(x_1, y_1)\end{matrix} \right)$

$$y - y_1 = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1)$$

$$y-0=\frac{y_0-0}{x_0-a}(x-a)$$

$$L_1: \; y=\frac{y_0}{x_0-a}(x-a)$$

(x_0, y_0) $\quad (-a, 0)$

(x_2, y_2) $\quad x_1, y_1$

$$L_2: \; y-y_1=\frac{(y_2-y_1)}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-0=\frac{y_0-0}{x_0-(-a)}(x-(-a))$$

$$L_2: \; y=\frac{y_0}{x_0+a}(x+a)$$

L_1 coloco $x=0$

$$L_1: \; y=\frac{y_0}{x_0-a}(x-a) \Rightarrow y_Q=\frac{y_0(-a)}{x_0-a}$$

L_2 coloco $x=0$

fcfm Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

$$L_2 : y = \frac{y_0}{x_0+a}(x+a)$$

$$x=0$$

$$y_R = \frac{y_0}{x_0+a}(0+a) = \frac{y_0 \cdot a}{x_0+a}$$

$$y_Q \cdot y_R = \frac{y_0(-a)}{(x_0-a)} \cdot \frac{y_0 \cdot a}{x_0+a}$$

$$y_Q \cdot y_R = \frac{-y_0^2 a^2}{x_0^2 - a^2} = \frac{-\cancel{y_0^2} \cdot \cancel{a^2}}{\cancel{y_0^2} \cdot \frac{\cancel{a^2}}{b^2}} = -b^2 = cte$$

$(x_0, y_0) \in$ Hiperbola

$$\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x_0^2}{a^2} = 1 + \frac{y_0^2}{b^2} \quad / \cdot a^2$$

$$x_0^2 = a^2 + y_0^2 \cdot \frac{a^2}{b^2}$$

$$\boxed{x_0^2 - a^2 = y_0^2 \cdot \frac{a^2}{b^2}}$$

P1) a) Encuentre

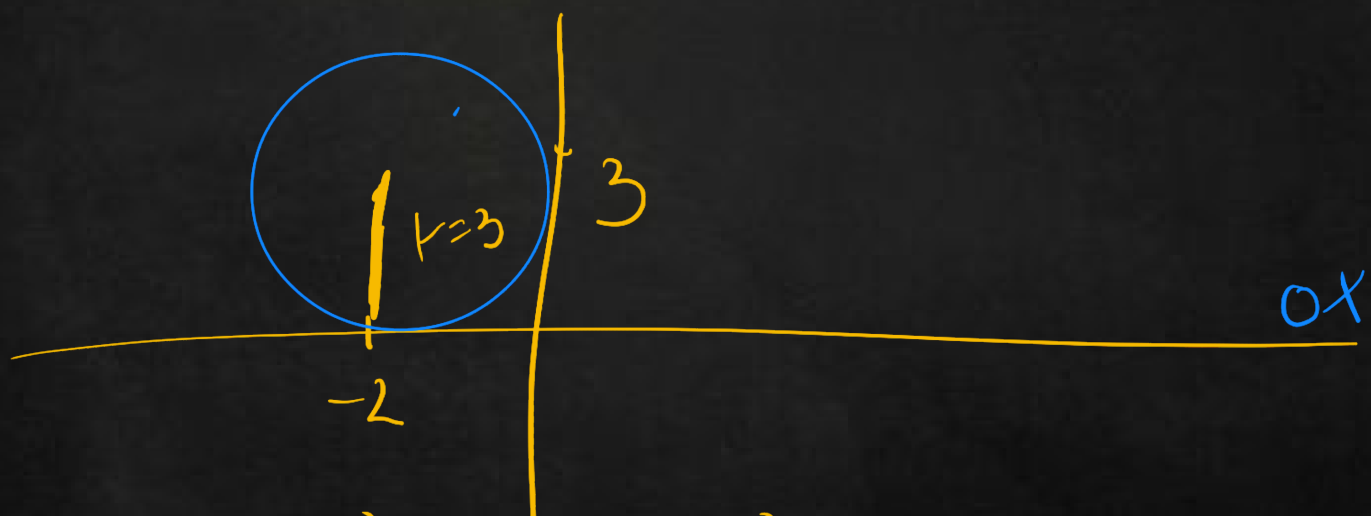
Ecuación ⊙ tangente a OX cuyo centro está en el vértice

$x^2+4x+7=y$, $f(-2)=4+4(-2)+7$

$$\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)=\left(\frac{-4}{2\cdot 1}, f(-2)\right)$$

$$V=(-2,3)$$

$$C=(-2,3)$$

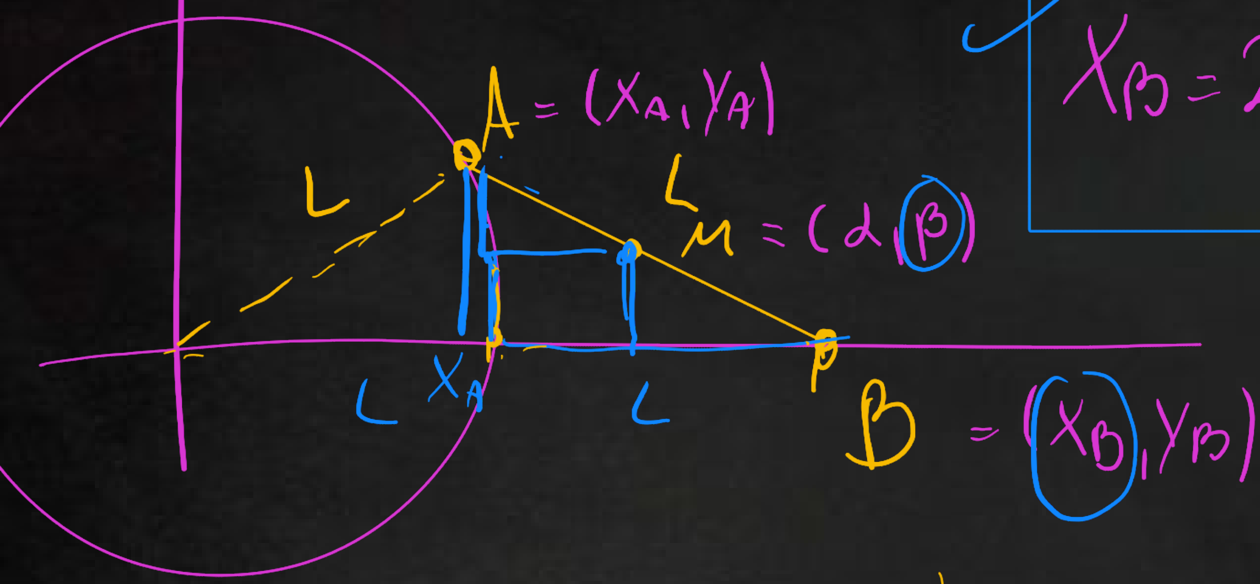


$$(x-(-2))^2+(y-3)^2=9$$

$$(x+2)^2+(y-3)^2=3$$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

$$x^2 + y^2 = L^2$$



$$\boxed{x_B = 2x_A = \frac{4}{3}\alpha}$$

$$\alpha = M_x = \frac{x_A + x_B}{2}$$

$$\alpha = \frac{x_A + 2x_A}{2} = \frac{3x_A}{2}$$

$$\frac{4\alpha}{3} = 2x_A$$

$$x_A = \frac{2}{3}\alpha, \quad y_A = 2\beta$$

$$(x_A, y_A) \in \bigcirc$$

$$x_A^2 + y_A^2 = L^2$$

$$\left(\frac{2}{3}\alpha\right)^2 + (2\beta)^2 = L^2$$

$$\frac{4\alpha^2}{9} + 4\beta^2 = L^2$$

$$\frac{\alpha^2}{\left(\frac{3L}{2}\right)^2} + \frac{\beta^2}{\left(\frac{1\cdot L}{2}\right)^2} = 1$$

$C = (0,0)$

$a = \frac{3}{2}L$

$b = \frac{1}{2}L$

$$e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

$$e = \frac{\sqrt{\frac{9}{4}L^2 - \frac{L^2}{4}}}{\frac{3L}{2}} = \frac{\cancel{L}\sqrt{\frac{8}{4}}}{\frac{3\cancel{L}}{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot 2}{3} \quad //$$

$$C = (0,0)$$

$$\text{Foco} = (X_0 \pm a\cdot e, 0)$$

$$= \left(0 \pm \frac{\cancel{3}L}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot\cancel{2}}{\cancel{3}}, 0\right)$$

$$= (\sqrt{2}L, 0) \quad //$$

Directriz

$$x = \pm \frac{a}{e} = \pm \frac{\frac{3L}{2}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \pm \frac{9L}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$= \pm \frac{9L\sqrt{2}}{8} \quad //$$

fcfm
Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

P2) $f(x) = \sqrt{1 - \dfrac{2}{|x|+1}}$

$$f(x) = \sqrt{\frac{|x|-1}{|x|+1}}, \quad |x| \neq -1$$

$$\frac{|x|-1}{|x|+1} \geq 0$$

$x > 0$

$\dfrac{x-1}{x+1} \geq 0$

	$-\infty$ … -1	-1 … 1	1 … $+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
	$+$	$-$	$+$

$S_1 = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$

$SF_1 = S_1 \cap (0, +\infty)$

$SF_1 = [1, +\infty)$

$x \leq 0$

$\dfrac{-x-1}{-x+1} \geq 0$

	$-\infty$ … -1	-1 … 1	1 … $+\infty$
$-x-1$	$+$	$-$	$-$
$-x+1$	$+$	$+$	$-$
	$+$	$-$	$+$

$S_2 = (-\infty, -1] \cup (1, +\infty)$

$SF_2 = S_2 \cap (-\infty, 0]$

$SF_2 = (-\infty, -1]$

$$\mathrm{Dom}(f) = SF_1 \cup SF_2$$
$$= (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) = \mathbb{R} - (-1, 1)$$

fcfm Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

$$f(x) = \sqrt{\frac{|x|-1}{|x|+1}} \qquad |x| = |-x|$$

$$f(-x) = \sqrt{\frac{|-x|-1}{|x|+1}} = \sqrt{\frac{|x|-1}{|x|+1}} = f(x)$$

$\therefore$ Es par.

$$-f(-x) = -\sqrt{\frac{|x|-1}{|x|+1}} = f(x) \quad \therefore \text{ No impar}$$

$$y = f(x) = \sqrt{1-\frac{2}{|x|+1}}$$

$$0 \le \sqrt{1-\frac{2}{|x|+1}} < \sqrt{1-0} = 1$$

$$0 \le \underbrace{\sqrt{1-\frac{2}{|x|+1}}}_{y} < 1$$

Imagen

$f(x_2) - f(x_1), \quad x > 0$

$|x_1| = x_1$

$|x_2| = x_2$

$$\parallel$$

$$\left(\sqrt{\frac{x_2-1}{x_2+1}} - \sqrt{\frac{x_1-1}{x_1+1}}\right)\frac{\left(\sqrt{\bigcirc}+\sqrt{\square}\right)}{\left(\sqrt{\bigcirc}+\sqrt{\square}\right)}$$

$$= \left(\frac{x_2-1}{x_2+1} - \frac{x_1-1}{x_1+1}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\bigcirc}+\sqrt{\square}}$$

$$= \frac{2(\overset{(+)}{x_2 - x_1})}{\underset{(+)}{(x_2+1)}\underset{(+)}{(x_1+1)}} \cdot \frac{1}{\underbrace{\sqrt{\bigcirc}+\sqrt{\square}}_{(+)}} \geq 0$$

$\underline{\text{SPG}}$ $\Big|$ $x_1 < x_2, \quad x_1, x_2 > 0$

$(-\infty,-1] \cup \boxed{[1,+\infty)}, \quad x_1, x_2 \in [1,+\infty)$

$\Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0$

$\Rightarrow f$ creciente $x \in [1,+\infty)$ //

como f par $\Rightarrow$ decreciente $x \in (-\infty,-1]$ //

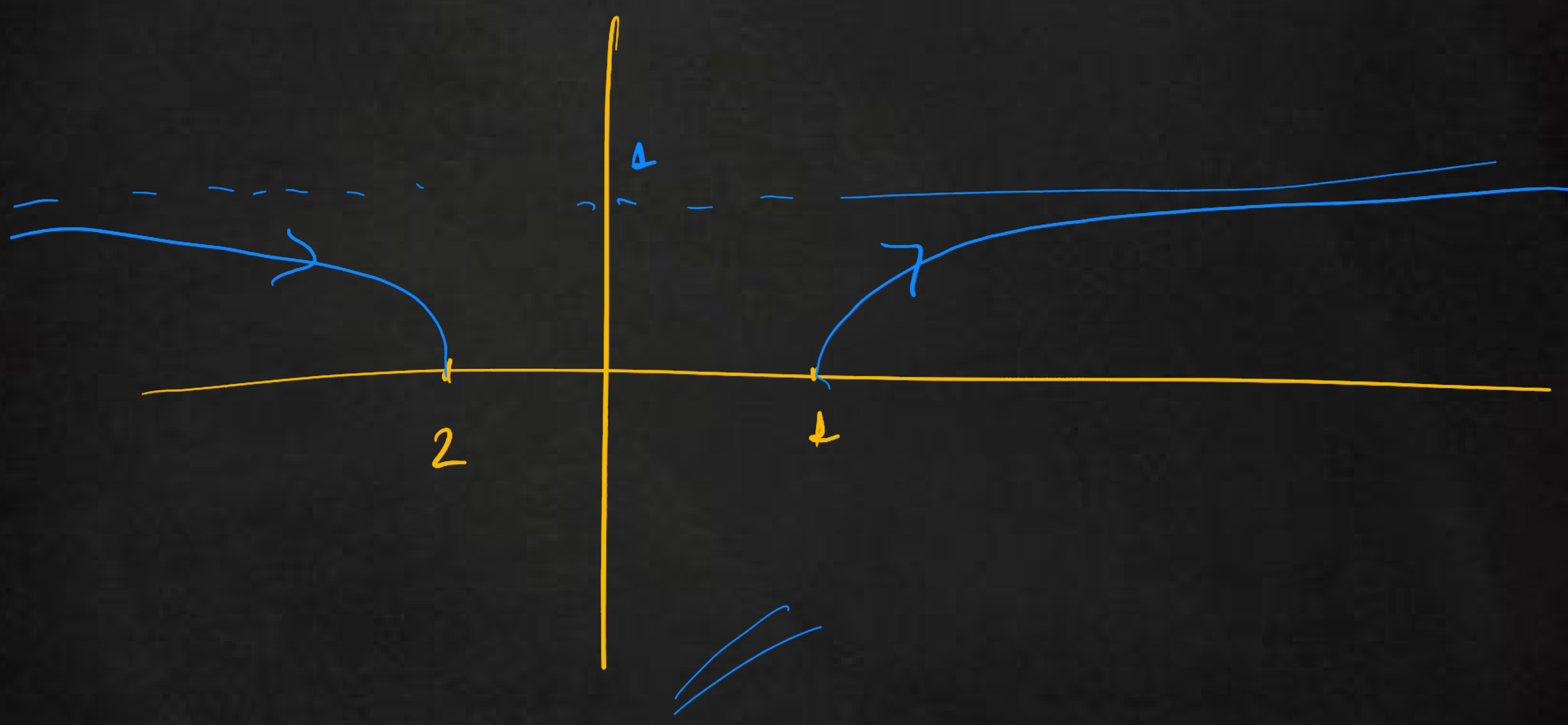
$y \in [0,1)$

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{|x|-1}{|x|+1} = 0$$

$$\Rightarrow |x| - 1 = 0$$

$$\Rightarrow |x| = 1$$

$$x = \pm 1 \Rightarrow f(x) = 0$$



Crecimiento $\quad f(x_2) - f(x_1)$

$f(x) \in [0,1) \quad , x > 0 \quad x_1, x_2 \in [1, +\infty)$

$$\frac{f(x_2)}{f(x_1)} = \frac{\sqrt{\frac{x_2-1}{x_2+1}}}{\sqrt{\frac{x_1-1}{x_1+1}}} = \sqrt{\frac{(x_2-1)(x_1+1)}{(x_1-1)(x_2+1)}}$$

$=$

$f(x) = x - |x-4| \quad , \quad \boxed{\begin{array}{l} x-4 \geq 0 \\ x \geq 4 \end{array}}$

$$= \begin{cases} 4 & x \geq 4 \\ 2x-4 & x \leq 4 \end{cases}$$

$x - 4 \leq 0$

$x \leq 4$

$x + (x-4)$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

$$g = \frac{4}{f(x)} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right.$$

Ánimo que les

Vaya bonito

Parto nox.

Pauta de corrección Control 2

P1. a) **(3 pts)** Encuentre la ecuación de la circunferencia que es tangente al eje OX y cuyo centro está en el vértice de la parábola $y = x^2 + 4x + 7$.

Solución: Completando cuadrados perfectos se tiene que:

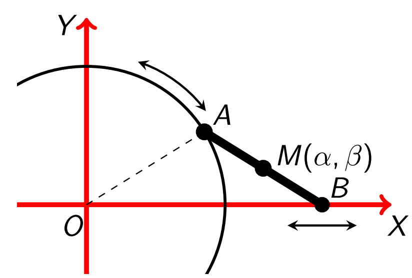
$$\begin{aligned} y = x^2 + 4x + 7 &\iff y = x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 4 + 3 \\ &\iff y - 3 = (x+2)^2 \end{aligned}$$

Es decir, el vértice de la parábola está en $V(-2, 3)$ (Pueden usar fórmula $x_V = -\frac{b}{2a}$) 1.0

La circunferencia tiene centro en $(-2, 3)$ y tiene radio $r = 3$. 1.0

Su ecuación es: $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$. 1.0

b) **(3 pts)** Una barra AB, de longitud fija $\overline{AB} = L > 0$ se mueve en el plano, de modo que su extremo A se mueve sobre la circunferencia $\mathscr{C} : x^2 + y^2 = L^2$ y su extremo B se desliza sobre el eje OX (ver figura). Se pide determinar el Lugar Geométrico del punto medio M de la barra. Identifique el lugar geométrico encontrado indicando todos los parámetros importantes (pendiente, centro, radio, semiejes, excentricidad, focos, directrices, asíntotas, etc. según corresponda).



(*Indicación: Observe que el triángulo OAB es isósceles, por lo cual se cumple que $x_B = 2x_A = \frac{4}{3}\alpha$ y algo similar en la dirección Y.*)

Solución: Sea $M(\alpha, \beta)$ el punto del LG buscado.

Claramente (usando la indicación), $x_A = \frac{2}{3}\alpha$ y $y_A = 2\beta$. 1.0

Pero como $A \in \mathscr{C}$ entonces

$$\left(\frac{2}{3}\alpha\right)^2 + (2\beta)^2 = L^2.$$ 0.5

que simplificado queda:

$$\frac{\alpha^2}{\left(\frac{3L}{2}\right)^2} + \frac{\beta^2}{\left(\frac{L}{2}\right)^2} = 1.$$ 0.5

Es decir, M se mueve sobre una elipse 0.5 de semiejes $a = \frac{3L}{2}$ y $b = \frac{L}{2}$, excentricidad $e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, focos en $(\pm\sqrt{2}L, 0)$ y directrices $x = \pm\frac{9\sqrt{2}L}{8}$. ($a, b, e, f, d \rightarrow 0.1$ c/u) 0.5

P2. Considere la función definida por $f(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{|x|+1}}$

a) **(3 pts)** Determine Dom(f), ceros y paridad de f.

Solución: Dominio:

$$x \in \mathrm{Dom}(f) \iff 1 - \frac{2}{|x|+1} \geq 0 \iff \frac{|x|-1}{|x|+1} \geq 0$$

$$\iff |x| \geq 1 \iff x \in (-\infty, -1] \cup [1, \infty).$$ 1.0

Ceros:

$$f(x) = 0 \iff \frac{|x|-1}{|x|+1} = 0$$

$$\iff |x| = 1 \iff x = 1 \quad \vee \quad x = -1.$$ 1.0

Paridad:

$$f(-x) = \sqrt{1 - \frac{2}{|-x|+1}} = \sqrt{1 - \frac{2}{|x|+1}} = f(x).$$

Es decir, es una función PAR. 1.0

b) **(3 pts)** Estudie intervalos de crecimiento o decrecimiento de f. Determine, justificando apropiadamente, el conjunto imagen (Im(f)=Rec(f)) de f. Bosqueje el gráfico de f.

Solución:
Crecimiento en $[1, \infty)$ (por paridad!!)

$$1 \leq x_1 < x_2 \Rightarrow |x_1| + 1 < |x_2| + 1 \Rightarrow \frac{-2}{|x_1|+1} < \frac{-2}{|x_2|+1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 - \frac{2}{|x_1|+1}} < \sqrt{1 - \frac{2}{|x_2|+1}}.$$

Es decir, en $[1, \infty)$ es estrictamente creciente.

Por paridad, en $(-\infty, -1]$ es estrictamente decreciente. 1.0

Conjunto Imagen: $y \in \mathrm{Im}(f)$

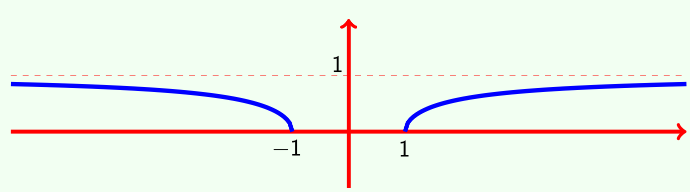
$$\iff \exists x \in Dom(f) : y = \sqrt{1 - \frac{2}{|x|+1}} \iff y \geq 0 \quad \wedge \quad y^2 = 1 - \frac{2}{|x|+1}$$

$$\iff y \geq 0 \quad \wedge \quad |x|(1 - y^2) = 1 + y^2 \iff y \in [0, 1) \quad \wedge \quad |x| = \frac{1+y^2}{1-y^2}$$

Es decir: $\mathrm{Im}(f) = [0, 1)$. 1.0

Alternativamente se puede decir que $y \leq 0$ por ser una raíz cuadrada y $y < 1$ ya que $1 - \frac{2}{|x|+1} < 1$ y la raíz es estrictamente creciente. Es decir $\mathrm{Im}(f) \subseteq [0, 1)$ (Alternativa, incompleta) 0.5

El gráfico es:



1.0

Pauta de corrección Control 2

P1. (6 pts.) Sea $P(x_0, y_0)$ un punto cualquiera de la hipérbola $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ $(a, b > 0)$, con $y_0 \neq 0$.

Se trazan las rectas que unen P con los puntos $A(a, 0)$ y $B(-a, 0)$, las que cortan al eje OY en los puntos Q y R respectivamente.

Demuestre que el producto $y_Q \cdot y_R$ es constante, o sea independiente de la posición de P (y_Q e y_R son las ordenadas de Q y R respectivamente).

Solución: Recta 1: pasa por $P(x_0, y_0)$ y $A(a, 0)$. Tiene por ecuación:

$$L_1 : y = \frac{y_0}{x_0 - a}(x - a).$$

Recta 2: pasa por $P(x_0, y_0)$ y $A'(-a, 0)$. Tiene por ecuación:

$$L_1 : y = \frac{y_0}{x_0 + a}(x + a).$$

2pt

Punto Q: Intersección de L_1 con $x = 0$. Tiene coordenadas

$$Q = \left(0, \frac{-ay_0}{x_0 - a}\right)$$

Punto R: Intersección de L_2 con $x = 0$. Tiene coordenadas

$$R = \left(0, \frac{ay_0}{x_0 + a}\right)$$

2pt

Producto $y_Q \cdot y_R$: Reemplazando queda

$$y_Q \cdot y_R = \frac{-ay_0}{x_0 - a} \cdot \frac{ay_0}{x_0 + a} = -\frac{a^2 y_0^2}{x_0^2 - a^2} = -\frac{y_0^2}{\frac{x_0^2}{a^2} - 1}.$$

1pt

Como $P(x_0, y_0)$ pertenece a la hipérbola queda

$$y_Q \cdot y_R = -\frac{y_0^2}{\frac{x_0^2}{a^2} - 1}. = -\frac{y_0^2}{\frac{y_0^2}{b^2}} = -b^2.$$

1pt

P2. Considere las funciones definidas por $f(x) = x - \left|x - 4\right|$ y $g(x) = \dfrac{4}{f(x)}$.

(a) **(3 pts.)** Para f, determine dominio, ceros, paridad, crecimientos, recorrido ($\mathrm{Im}(f)$) y bosqueje su gráfico.

Solución: Claramente, desarrollando el módulo para x mayor y menor que 4, se obtiene que:

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x \in [4, \infty) \\ 2x - 4 & \text{si } x \in (-\infty, 4) \end{cases}$$

0.5pt

Con esto, se tiene que: $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

0.5 pt

ceros: $x = 2$.

0.3 pt

f no es par ni impar, ya que, por ejemplo, tiene su único cero en $x = 2$ y para -2 se tiene que $f(-2) = -8$

0.2 pt

Por tratarse de dos rectas que se pegan en $x = 4$, se tiene que f es creciente en $\mathbb{R}$. Además es decreciente en $[4, \infty)$.

También, para $x_1 < x_2$ se puede calcular el signo de $m_{12} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, que vale:

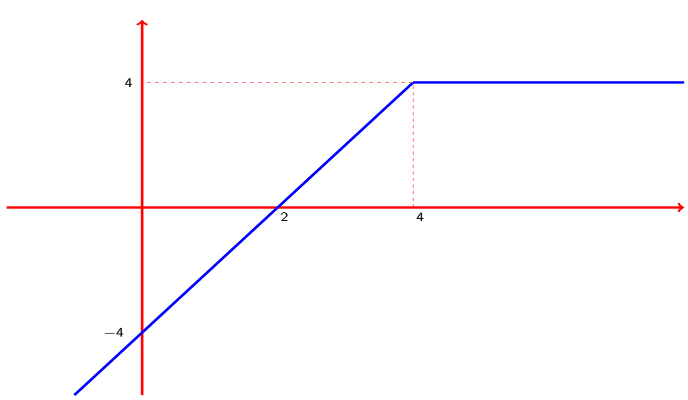
$$\begin{aligned} m_{12} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{x_2 - |x_2 - 4| - x_1 + |x_1 - 4|}{x_2 - x_1} \\ &= 1 - \frac{|x_2 - 4| - |x_1 - 4|}{x_2 - x_1} \\ &= 1 - \frac{(x_2 - 4)^2 - (x_1 - 4)^2}{(x_2 - x_1)(|x_2 - 4| + |x_1 - 4|)} \\ &= 1 - \frac{(x_2 - 4 + x_1 - 4)}{(|x_2 - 4| + |x_1 - 4|)} \geq 0 \qquad ;(= 0 \text{ si } 4 \leq x_1 < x_2) \end{aligned}$$

0.5 pt

El recorrido de f es $(-\infty, 4]$.

0.5 pt

El gráfico es:



0.5 pt

(b) **(3 pts.)** Para g, determine dominio, crecimientos, asíntotas, recorrido ($\mathrm{Im}(g)$) y bosqueje su gráfico.

Solución: Usando la definición de f y dividiendo, resulta que

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [4, \infty) \\ \dfrac{2}{x-2} & \text{si } x \in (-\infty, 4) \end{cases}$$

0.5pt

Con esto, se tiene que: $\mathrm{Dom}(g) = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

0.5pt

En $[4, \infty)$ es creciente y decreciente.

Para $x_1, x_2 \in (2, 4)$ con $x_1 < x_2$, se tiene que $0 < x_1 - 2 < x_2 - 2$. Por lo tanto (tomando recíprocos) que da $g(x_2) > g(x_1)$. O sea g es estrictamente decreciente en $(2, 4)$.

Para $x_1, x_2 \in (-\infty, 2)$ con $x_1 < x_2$, se tiene que $x_1 - 2 < x_2 - 2 < 0$. Por lo tanto (dividiendo por $(x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0$) queda $g(x_2) < g(x_1)$. O sea g es también estrictamente decreciente en $(-\infty, 2)$.

También, para $x_1 < x_2$ se puede calcular el signo de $\widetilde{m_{12}} = \dfrac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1}$, que vale:

$$\begin{aligned} \widetilde{m_{12}} = \frac{g(x_2) - g(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{\frac{4}{f(x_2)} - \frac{4}{f(x_1)}}{x_2 - x_1} = \frac{4f(x_1) - 4f(x_2)}{(x_2 - x_1)f(x_1)f(x_2)} \\ &= \frac{-4m_{12}}{f(x_1)f(x_2)} \end{aligned}$$

que es ≤ 0 en cada intervalo donde f es $>$ o $<$ que 0 (o sea en $(-\infty, 2)$ y $(2, \infty)$).

0.5pt

En $(-\infty, 4)$ g es la función racional $\dfrac{2}{x-2}$, que tiene asíntota vertical en $x = 2$ y asíntota horizontal $y = 0$ (grado del denominador $>$ grado del numerador).

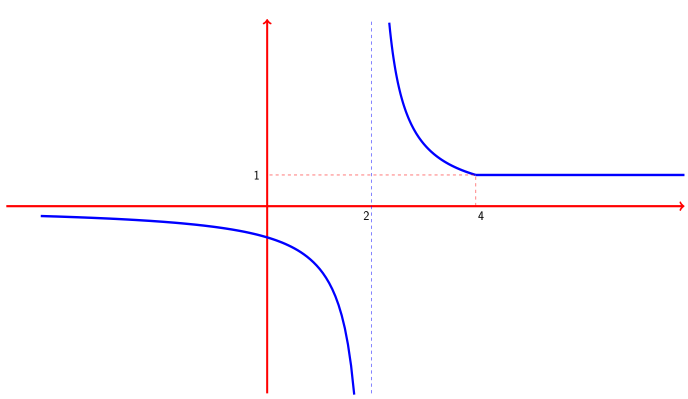
En $(4, \infty)$ g es la función constante 1, que tiene asíntota horizontal $y = 1$.

0.5pt

El recorrido de g en $(-\infty, 4)$ es $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$. Esto junto al valor constante $y = 1$ a la derecha de 4, genera $\mathrm{Im}(g) = (-\infty, 0) \cup [1, \infty)$.

0.5pt

El gráfico es:



0.5pt