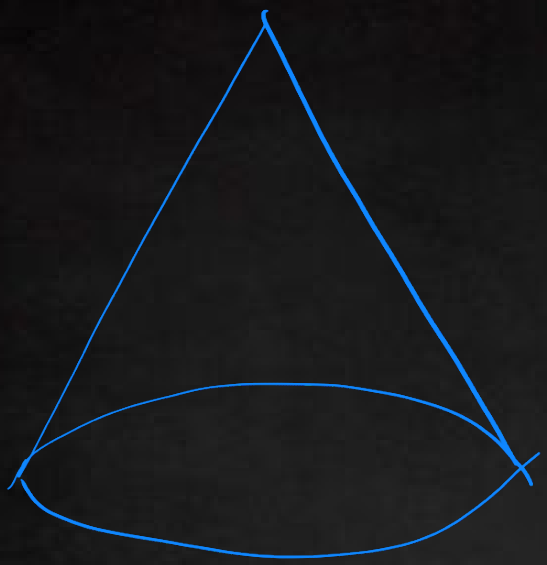


$ax^2+bx+c-y$ U

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$) (

$$\rightarrow \frac{x^2+y^2}{a^2\ b^2}=1$$

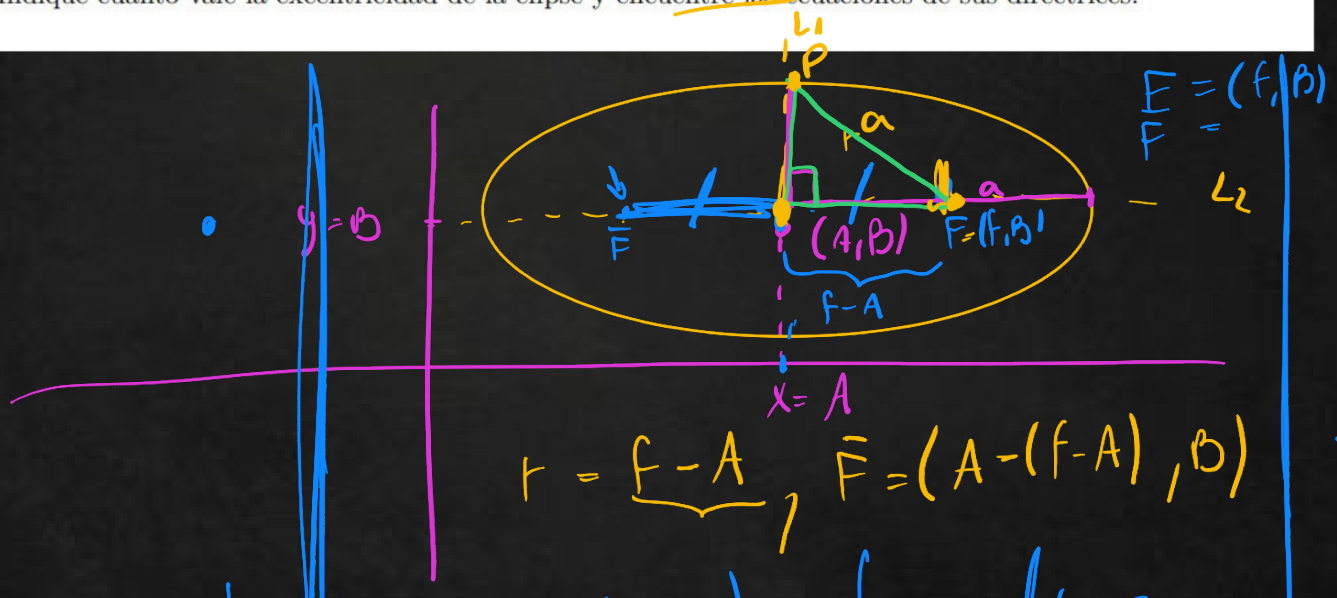
$$x^2+y^2=r^2$$

P2. **[Elipses y rectas] C2-MA1001-2015.P1**

Considere las rectas $L_1 : x = A$, $L_2 : y = B$ y el punto $F(f, B)$ sobre la recta L_2, donde $f > A$ .Si $\bar{F}$ es el simétrico de F con respecto a la recta L_1, encuentre la ecuación de la elipse cuyos focos son F y $\bar{F}$ y cuyo semieje mayor mide a, donde $a > f - A$

Indique cuánto vale la excentricidad de la elipse y encuentre las ecuaciones de sus directrices.

$a > \frac{f-A}{2}$



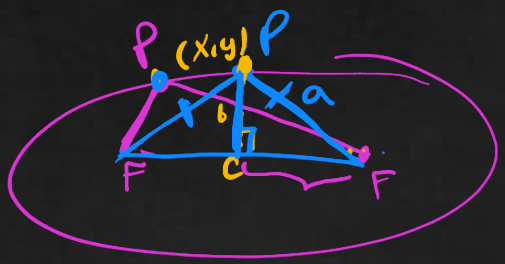
$r = f-A$, $\bar{F} = (A-(f-A), B)$

Busco la ecuación de la elipse
Para eso solo basta ocupar a y b,
conocemos el valor de a.

$\bar{F} = (2A-f, B)$ y subiamos

$F = (f, B)$

Propiedad



$$\boxed{P\bar{F} + PF = 2a}$$

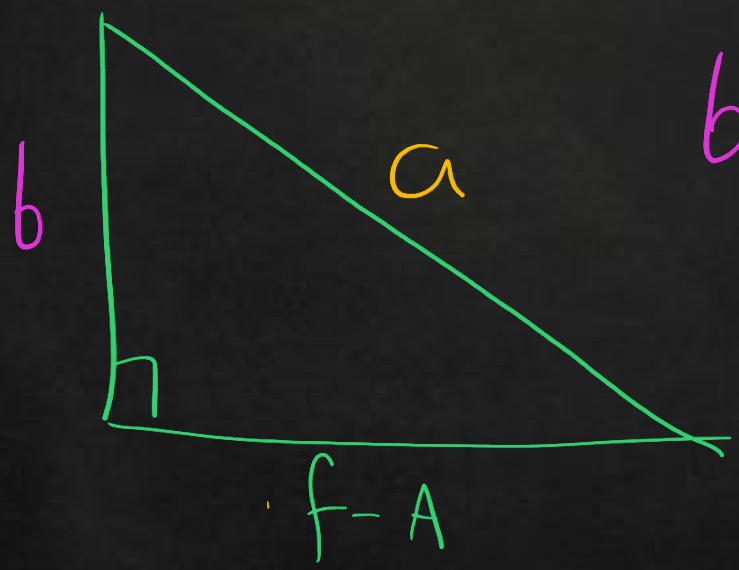
donde a es semieje mayor.

$P\bar{F} = PF$

$$P\bar{F} + P\bar{F} = 2a$$

$$2P\bar{F} = 2a$$

$$\boxed{P\bar{F} = a}$$



$$b^2 + (f-A)^2 = a^2$$

$$b = \sqrt{a^2 - (f-A)^2}$$

tenemos la ecuación de la elipse $C = (A, B)$ ✓

a conocido

$b = \sqrt{a^2 - (f-A)^2}$ conocido

$b^2 = a^2 - (f-A)^2$

$$\frac{(x-A)^2}{a^2} + \frac{(y-B)^2}{\left(\sqrt{a^2-(f-A)^2}\right)^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-A)^2}{a^2} + \frac{(y-B)^2}{a^2-(f-A)^2} = 1 \quad ✓$$

excentricidad, directrices?

PDQ $0 < e < 1$, $e \in (0,1)$, $f - A > 0$

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - (a^2 - (f-A)^2)}}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$$

$$e = \frac{\sqrt{(f-A)^2}}{a} = \frac{f-A}{a} \in (0,1)$$

$$0 < \frac{f-A}{a} < 1$$

directo

por enunciado

directrices, $\boxed{x = A \pm \frac{a}{e}}$

$$x = A \pm \frac{a}{\frac{f-A}{a}}$$

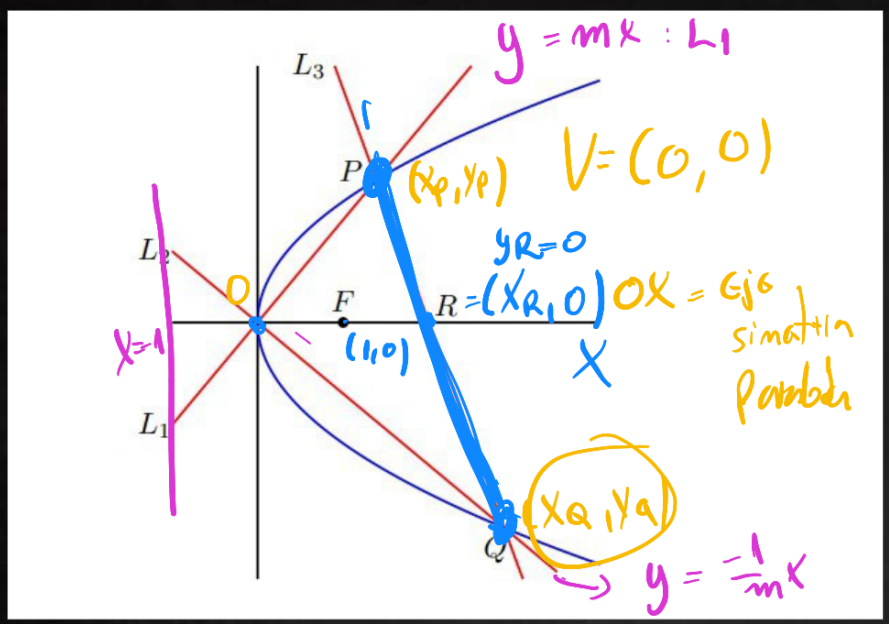
$$x = A \pm \frac{a^2}{f-A}$$

$f, 0$

$y = x^2$

Por el vértice de la parábola $y^2 = 4x$ se trazan dos rectas perpendiculares que cortan en P y Q a la parábola, $P \neq Q$. PQ corta al eje de simetría de la parábola en R. Probar que el foco divide al trazo OR en la razón $1:3$.

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE



las rectas pasan por el origen.

$V = (0,0)$

$V = \left(\frac{-b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ ∪

$V = \left(\frac{-\Delta}{4a}, \frac{-b}{2a}\right)$ ⊂

$y^2 = 4x \Rightarrow \frac{1}{4}y^2 + 0 \cdot y + 0 = x$

$ay^2 + by + c = x$

$a = \frac{1}{4}, b = 0, c = 0, V = \left(\frac{-\Delta}{4a}, \frac{-b}{2a}\right)$

$\Rightarrow V = \left(\frac{-(0^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 0)}{4 \cdot \frac{1}{4}}, \frac{-0}{2 \cdot \frac{1}{4}}\right)$

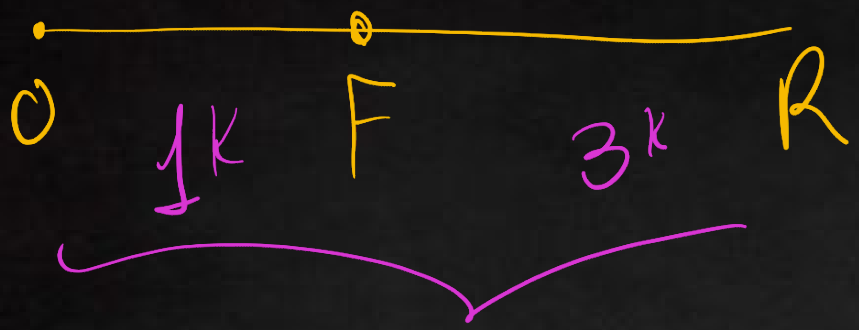
$ax^2 + bx + c = 0$

$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = -\frac{\Delta}{4a}$

$a \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(\frac{-b}{2a}\right) + c = 0$ $\quad \Delta = b^2 - 4ac$

$\frac{b^2}{4a} - \frac{b^2 2}{2a2} + c \cdot \frac{4a}{4a} = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} = -\frac{\Delta}{4a}$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE



$$4 \quad \frac{OF}{FR} = \frac{1}{3}$$

$$y^2 = 4x \Rightarrow \frac{1}{4}y^2 = x \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$p = \frac{1}{4a} = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{4}} = 1, \quad F = (x_v + p, y_v)$$

Directriz

$$x = x_v - p$$

$$\Rightarrow F = (0+1, 0)$$

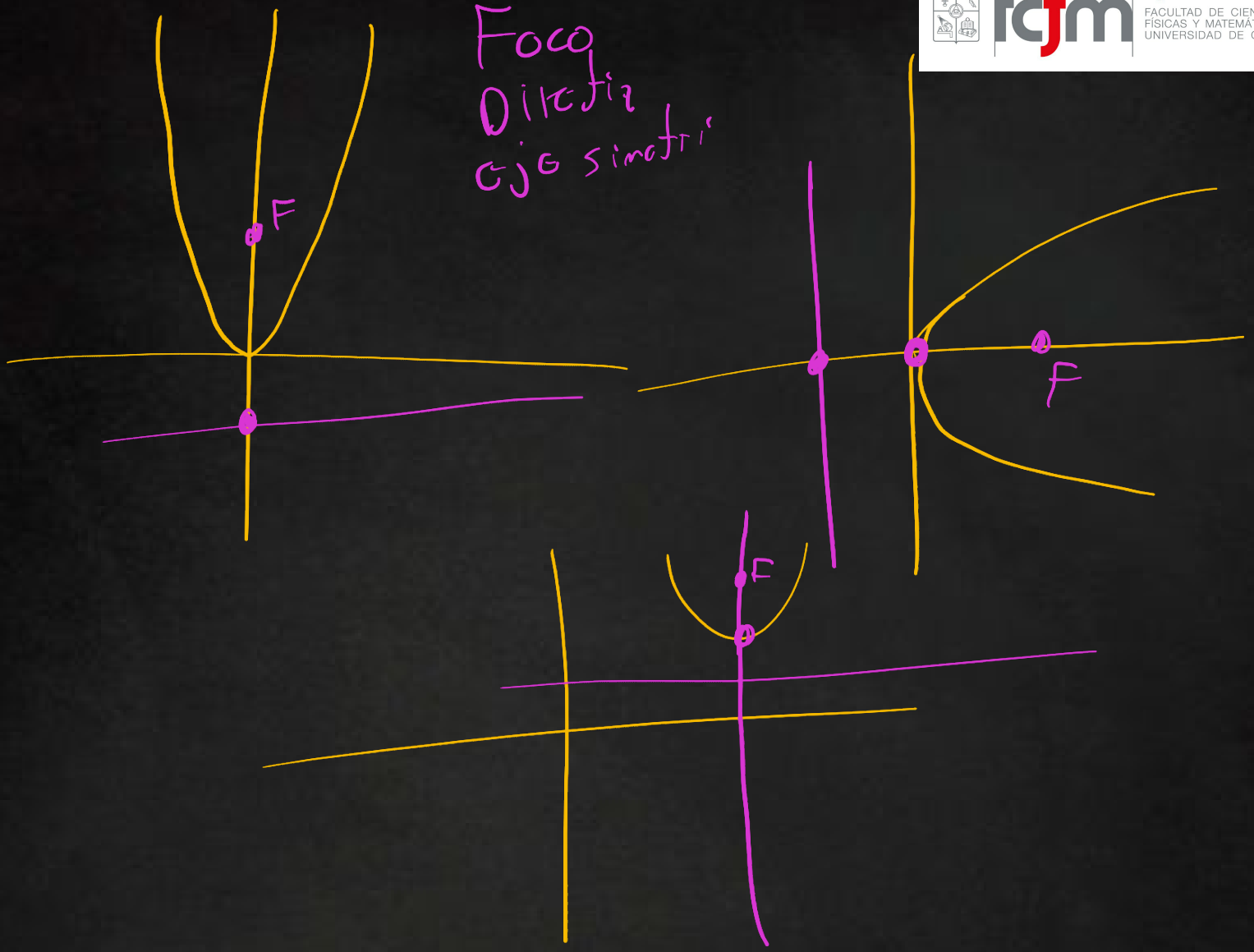
$$F = (1, 0)$$

$$D: x = 0 - 1 = -1$$

$$p = \frac{1}{4a}$$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Foco
Directriz
eje simetría

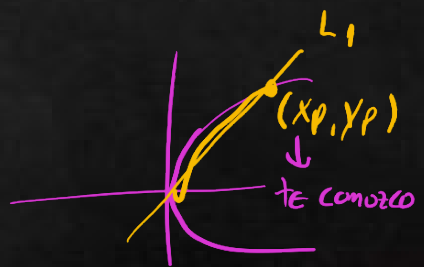


$L_1 : y = \boxed{m}x \quad , \; m \neq 0$

$L_2 : y = \boxed{-\frac{1}{m}}x \Rightarrow L_1 \perp L_2$

$P \in$ Parábola $\quad y_p^2 = 4x_p$

$(x_p, y_p) \longrightarrow y^2 = 4x$



$C\ y_p^2 = 4x_p \ \wedge \ y_p = m x_p : L_1 / (\cdot)^2$

$y_p^2 = m^2 x_p^2$

$4x_p = m^2 x_p^2$

$0 = m^2 x_p^2 - 4x_p$

$0 = x_p (m^2 x_p - 4)$

$x_p = 0 \ \vee \ m^2 x_p - 4 = 0$

$m^2 x_p = 4$

$x_p = \frac{4}{m^2}$

$P = (x_p, y_p)$

no puede pasar, pues $P \neq (0,0)$

$y = m \cdot x$

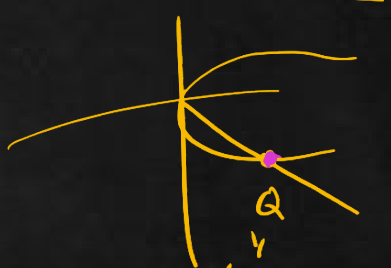
$L_1 : y_p = m \cdot x_p$

$P = (x_p, y_p) \in L_1$

$y_p = m \cdot \frac{4}{m^2} = \frac{4}{m}$

$P = (x_p, y_p) = \left(\frac{4}{m^2}, \frac{4}{m}\right) = P$

$L_2 : y = -\frac{1}{m} \cdot x \quad y \quad C : y^2 = 4x$



$\rightarrow /^2 \quad y_Q = -\frac{1}{m} x_Q \ \wedge \ y_Q^2 = 4x_Q$

$y_Q^2 = \frac{1}{m^2} \cdot x_Q^2 \ \wedge \ y_Q^2 = 4x_Q$

$$\frac{1}{m^2} x_Q^2 = 4 x_Q$$

$$\frac{1}{m^2} x_Q^2 - 4 x_Q = 0$$

$$x_Q \left(\frac{1}{m^2} x_Q - 4 \right) = 0$$

1) $x_Q = 0$ descartado pues L_2 existe

2) $\frac{1}{m^2} x_Q - 4 = 0$

$$\frac{1}{m^2} \cdot x_Q = 4$$

$$x_Q = 4 \cdot m^2$$

$Q \in L_2 \iff (x_Q, y_Q) \in L_2$

$y = -\frac{1}{m} x \Rightarrow y_Q = -\frac{1}{m} \cdot x_Q$

$$y_Q = -\frac{1}{m} \cdot 4m^2 = -4m$$

$$Q = (x_Q, y_Q) = (4m^2, -4m)$$

$$P = (x_P, y_P) = \left(\frac{4}{m^2}, \frac{4}{m} \right)$$

Ecuación recta pasa por 2 puntos de $(x_Q, y_Q) = Q$

$(x_P, y_P) = P$

$$y - y_P = \frac{(y_Q - y_P)}{x_Q - x_P}(x - x_P)$$

$$y - \frac{4}{m} = \left(\frac{-4m - \frac{4}{m}}{4m^2 - \frac{4}{m^2}} \right) \left(x - \frac{4}{m^2} \right)$$

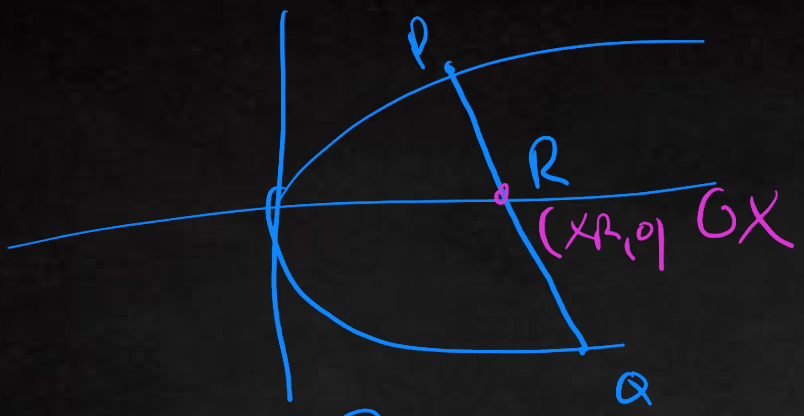
$$y - \frac{4}{m} = \left(\frac{\frac{-4m^2 - 4}{m}}{\frac{4m^4 - 4}{m^2}} \right) \left(x - \frac{4}{m^2} \right) \quad / \quad m \neq 0$$

$$y - \frac{4}{m} = \frac{-4(m^2+1)}{m} \cdot \frac{m^2}{4(m^4-1)} \left(x - \frac{4}{m^2} \right)$$

$$L_3 : \; y - \frac{4}{m} = -\frac{m(m^2+1)}{m^4 - 1} \left(x - \frac{4}{m^2} \right)$$

Si $R = (x_R, y_R)$ intersecta al eje X

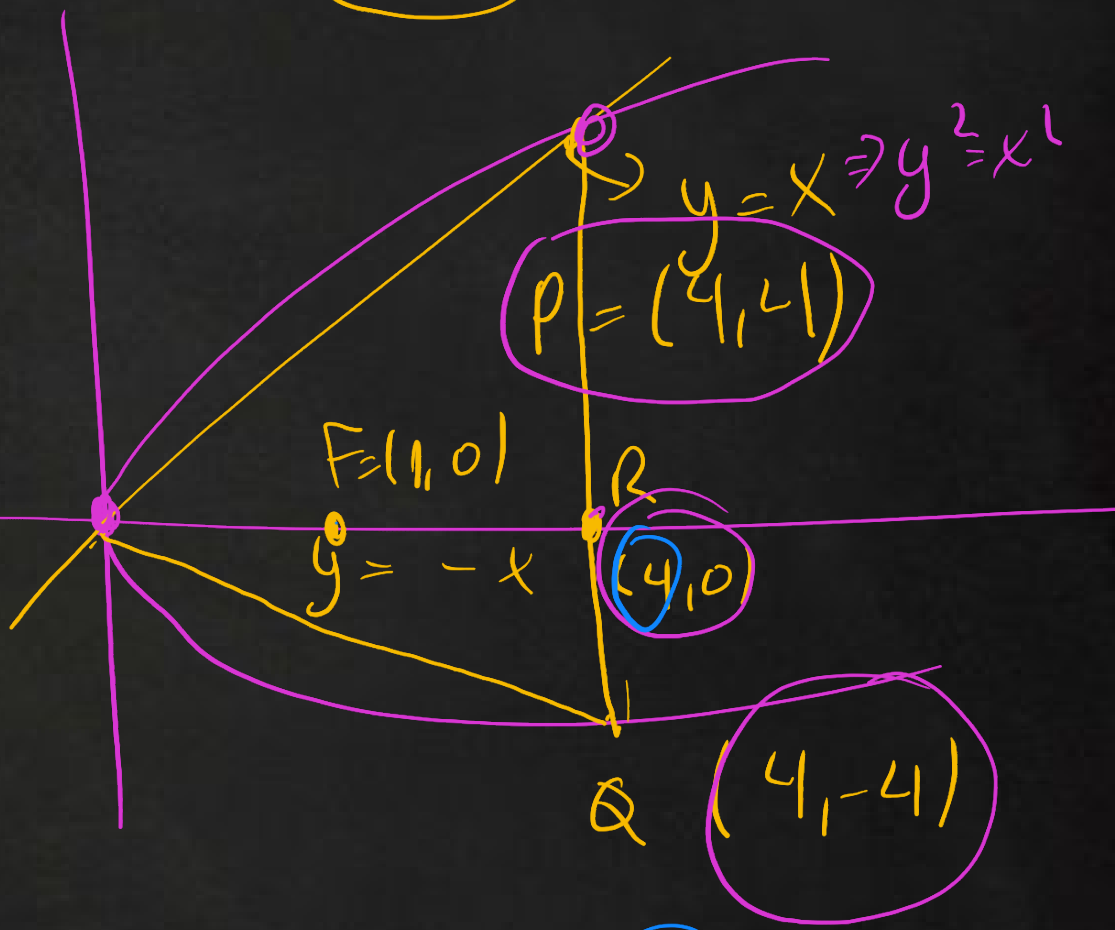
$\Rightarrow y_R = 0$

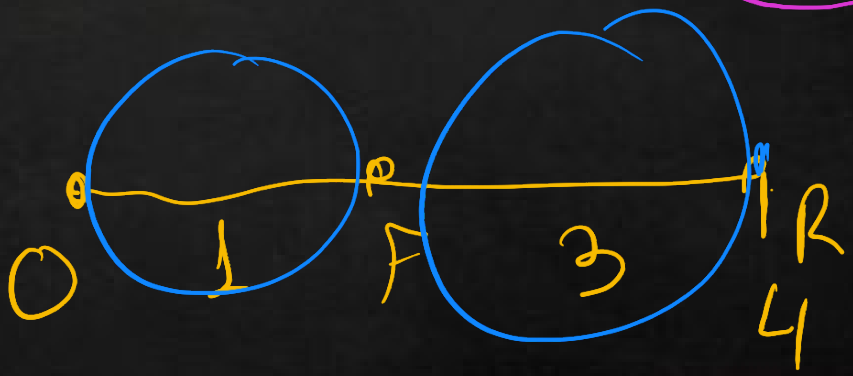


$$y_R - \frac{4}{m} = -\frac{m(m^2+1)}{m^4-1}\left(x_R - \frac{4}{m^2}\right)$$

$m = 1$

$y^2 = 4x$





análogo para $m = -1$

Vamos $m \neq \pm 1$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

$$y_R - \frac{4}{m} = -\frac{m(m^2+1)}{m^4-1}\left(x_R - \frac{4}{m^2}\right)$$

$y_R = 0$

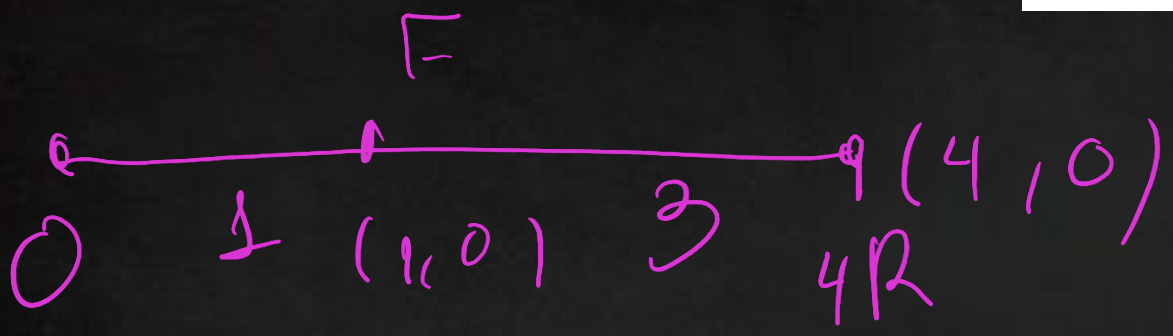
$$\frac{4}{m}\cdot\frac{(m^4-1)}{m(m^2+1)} = x_R - \frac{4}{m^2}$$

$$\frac{4}{m^2}\left(\frac{(m^4-1^4)}{m^2+1}\right) + \frac{4}{m^2} = x_R$$

$$\frac{4\left((m^2-1)(m^2+1)\right)}{m^2(m^2+1)} + \frac{4}{m^2}$$

$$\frac{4m^2 - 4 + 4}{m^2} = 4 = x_R$$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE



$$\frac{OF}{FR} = \frac{1}{3}$$

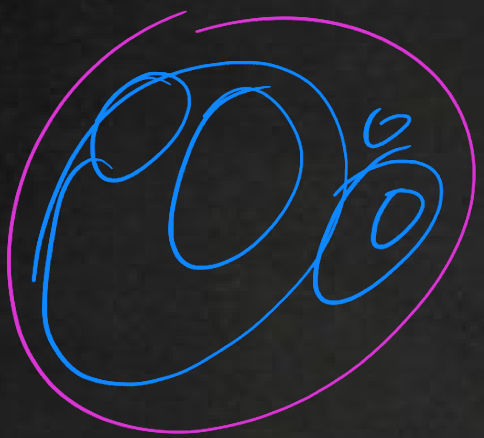
Pausa 20 min

Volvemos 22:25

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Cuando tengo conjunto potencia

$X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq A$



$X \in \mathcal{P}(A) \iff X \subseteq A$

Se dice que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$ es partición de A si se cumple

- $\forall C \in \mathcal{C}, C \neq \emptyset$, $\exists x \in C$, C cualquiera
- $\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}, C_1 \neq C_2 \Rightarrow C_1 \cap C_2 = \emptyset$
- $\bigcup C_i = A$

;

$C_1 \cup C_2 \cup C_3 = A$

$X \in P(A)$ $\Downarrow$ def conj potencia $X \subseteq A$

$y \in P(A)$ $\Downarrow$ $y \subseteq A$

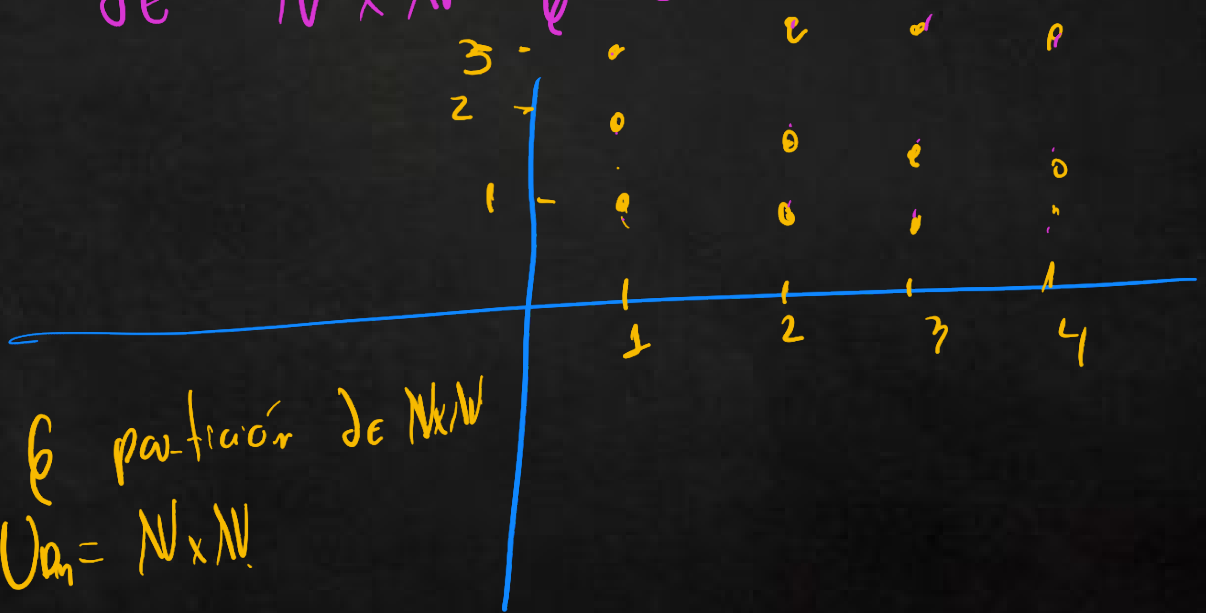
$y \in P(A)$

$n \in \mathbb{N}$

Defino $D_n = \{ (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a+b = n \}$ } forma, propiedad {

POG: $\mathcal{C} = \{ D_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ es partición de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $\bigcup = \bigcup D_n = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$\mathbb{N} = \{0, 1, \ldots\}$



POG) $\mathcal{C}$ partición de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

3) $\bigcup D_n = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

Forma Disp

$\{(x \in \mathbb{R}, x^2 - n = 0\}$

$\{(a,b) \in \mathbb{R}^2, (a,b)^2 = (a,b)\}$

$\{\{$

$\}$ galletaeG, tiene que ser frac frutilla $\{$

. PDQ $\forall C \in G, C \neq \emptyset$

.

.

Basta ver D_n

$n=1$ $D_1 = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, a+b=1\}$

$D_1 = \{(0,1), (1,0)\}$

$D_1 \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ por esto existe par ordenado que suma 1 $\Rightarrow D_n \neq \emptyset$

$$\mathcal{C} = \{ D_n \mid n \in \mathbb{N} \} \neq \emptyset$$

$$D_n \in \mathcal{C}$$

$$D_n \neq \emptyset$$

$$D_1 \neq \emptyset \quad , \quad D_1 \in \mathcal{C} \neq \emptyset$$

PDQ $\forall C \in \mathcal{C}, \; C \neq \emptyset$

Sea $n \in \mathbb{N}$ cualquiera.

$$D_n = \{ (a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \; a+b = n \}$$

basta ver que $(0,n) \in D_n$

$\Rightarrow D_n \neq \emptyset$

$$\mathcal{C} = \{ D_n \mid n \in \mathbb{N} \} \neq \emptyset$$

$D_n \neq \emptyset$

$$\mathcal{C} = \{ D_n \mid n \in \mathbb{N} \}$$

$D_n \in \mathcal{C}$

PDQ | Disjuntos

$\forall C_1, C_2 \in \mathcal{C}$, si $C_1 \neq C_2 \Rightarrow C_1 \cap C_2 = \emptyset$

Sea $C_1, C_2 \in \mathcal{C} = \{D_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

$D_{n_1} \in \mathcal{C}$, $D_{n_2} \in \mathcal{C}$

Si: $D_{n_1} \neq D_{n_2} \Rightarrow n_1 \neq n_2$

$D_{n_1} = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a+b = n_1\}$

$D_{n_2} = \{(\bar{a},\bar{b} \mid \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \bar{a}+\bar{b} = n_2\}$

$a+b = n_1$, $\bar{a}+\bar{b} = n_2$

Contradicción

$a - \bar{a} + b - \bar{b} = n_1 - n_2 = 0$

$a - \bar{a} = 0 \Rightarrow \boxed{a = \bar{a}}$

$b - \bar{b} = 0 \qquad \boxed{a = \bar{b}}$

$\Rightarrow$ contradicción.

Como esto no ocurre se concluye lo pedido

$\forall D_{n_1}, D_{n_2} \in C$

$D_{n_1} \neq D_{n_2} \Rightarrow D_{n_1} \cap D_{n_2} = \emptyset$

$\Rightarrow n_1 \neq n_2$

supongo $\exists$

$(a,b) \in D_{n_1} \cap D_{n_2}$

$\Leftrightarrow (a,b) \in D_{n_1} \wedge (a,b) \in D_{n_2}$

$\Leftrightarrow a+b = n_1 \wedge a+b = n_2$

$\Rightarrow a+b = n_1 = n_2$

$D_{n_1} \neq D_{n_2} \Rightarrow n_1 \neq n_2 \therefore$ Si $D_{n_1} \neq D_{n_2} \Rightarrow D_{n_1} \cap D_{n_2} = \emptyset$

---

3) $\bigcup D_n = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, PDQ C recubre

G 1) PDQ $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \subseteq G$

2) PDQ $G \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

1) $(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ PDQ $(x,y) \in C$

$\Rightarrow x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow x + y = j \in \mathbb{N}$ Cerradura

$\Rightarrow D_j = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N},\ a+b = j\}$

$\Rightarrow (x,y) \in D_j \in \mathcal{G}$

$\Rightarrow (x,y) \in \mathcal{G}$ //

Caso 2) $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$D_n \in \mathcal{G}$, n cualquiera

$D_n = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a+b = n\}$

Los elementos de D_n están definidos como pares ordenados $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ∴

los elementos están en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$\Rightarrow \mathcal{G} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ✓

$\Rightarrow$ 1) y 2) $\mathcal{G} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

∴ $\mathcal{G}$ partición de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

$D_n = \{(a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N},\ a+b=n\}$

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

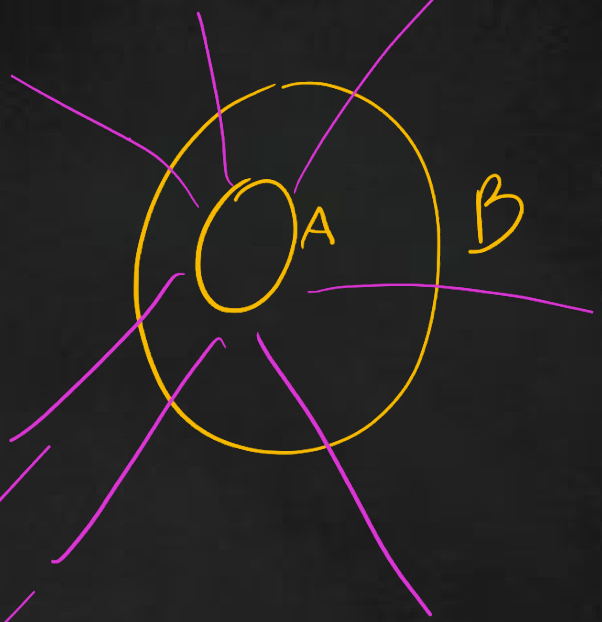
(40) Equivalentes:

$\Leftrightarrow$ i) $A \subseteq B$

$\Leftrightarrow$ ii) $B^c \subseteq A^c$

$\Leftrightarrow$ iii) $A \cap B^c = \emptyset$

$\Leftrightarrow$ iv) $B \cup A^c = E$



PDQ $\quad A \subseteq B \Leftrightarrow P(A) \subseteq P(B)$

$\Rightarrow$) Si $A \subseteq B \Rightarrow \forall x \in P(A) \subseteq P(B)$

$x \in P(A)$ PDQ $x \in P(B)$

$x \in P(A)$ def conj potencia

$\Leftrightarrow x \subseteq A \subseteq B$

$\Leftrightarrow$ $x \subseteq B$ $\Leftrightarrow$ $x \in P(B)$

def conj potencia

$\Leftarrow$ | $P(A) \subseteq P(B) \Rightarrow A \subseteq B$

$x \in A \Rightarrow x \in B$

fcfm Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

$A = A \iff A \subseteq A \wedge A \subseteq A$

$A \subseteq A \Rightarrow A \in P(A)$

$\forall x \in P(A) \Rightarrow x \in P(B)$

$\forall x \in P(A) \subseteq P(B) \Rightarrow x \in P(B)$

$x = A \in P(A) \Rightarrow x \in P(B)$

$\Downarrow$

$A \in P(B)$

$\iff A \subseteq B$ //

$\iff$ ✓

□

MA1101-6 Introducción al Álgebra 2020, Otoño
Profesora: Paulina Cecchi B.
Auxiliar: Patricio Yáñez Alarcón
Correo: pyanez@dim.uchile.cl

Auxiliar 03: Conjuntos

Fecha:Originalmente el día del trabajador y trabajadora :c

Resumen

- [**Nociones básicas**]:
  - ***Conjunto Referencia***: Es el conjunto al cual pertenecen todos los elementos con los que se va a trabajar. Si denotamos E al conjunto de referencia, tenemos que $x \in E$ es siempre verdad.
  - ***Conjunto vacío***: Se define el conjunto $\emptyset$ como el conjunto que no posee elementos, es decir $x \in \emptyset$ es siempre falso.
- [**Definiciones Básicas**]: Sean A y B conjuntos, se define:
  - *Igualdad:* $A = B \Leftrightarrow (\forall x \in E,\ x \in A \Leftrightarrow x \in B)$
  - *Inclusión:* $A \subseteq B \Leftrightarrow (\forall x \in E,\ x \in A \Rightarrow x \in B)$
  - *Unión:* $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$
  - *Intersección:* $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$
  - *Complemento:* $x \in A^c \Leftrightarrow x \notin A$
  - *Diferencia:* $A \setminus B := A \cap B^c$
  - *Diferencia simétrica:* $A \triangle B := A \setminus B \cup B \setminus A = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
- [**Propiedades de inclusión**]: Sean $A, B, C, D \subseteq E$ conjuntos:
  a) $\emptyset \subseteq A \subseteq E$
  b) $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
  c) Si $A \subseteq C$ y $B \subseteq D$ entonces $A \cap B \subseteq C \cap D$ y $A \cup B \subseteq C \cup D$
- [**Propiedades de igualdad**]: Sean $A, B \subseteq E$ conjuntos:
  a) $A \cup \emptyset = A, \quad A \cap \emptyset = \emptyset$
  b) $A \cup E = E, \quad A \cap E = A$
  c) $(A^c)^c = A, \quad A \cap A^c = \emptyset, \quad A \cup A^c = E$
  d) *Ley de De Morgan*
     - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
     - $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- [**Equivalencias útiles**]: Son equivalentes:
  I) $A \subseteq B$
  II) $B^c \subseteq A^c$
  III) $A \cap B^c = \emptyset$
  IV) $B \cup A^c = E$

P1. ***[MÓDULO COMÚN]Pisando terrreno***

Sean A, B y C tres conjuntos. En la columna de la izquierda de la tabla que se muestra a continuación, se enuncian propiedades de pertenencia en lenguaje corriente. Complete, en la columna de la derecha, la propiedad correspondiente escrita en notación conjuntista, escribiendo una expresión de la forma "$x \in D''$, donde D es lo que debe determinar. Se escribe la primera como ejemplo.

En lenguaje corriente	Notación conjuntista
x no pertenece a A	$x \in A^c$
x pertenece a C o a B	
x pertenece a A pero no a C	
x pertenece a los tres conjuntos	
x pertenece a alguno de los conjuntos	
x no pertenece a ninguno de los tres conjuntos	
x no pertenece a A pero sí a alguno de los otros	
x pertenece a lo más a uno de los conjuntos	
x pertenece exactamente a dos conjuntos	

Para este primer ejercicio no será devidido en las 3 áreas que siempre separamos, esto porque solo es un ejercicios de cambiar del lenguaje escrito a conjuntista, desarrollando la lógica proposicional a a través de las armas que tenemos en conjuntos, en este caso la pertenencia.

P2. ***[MÓDULO PROPIO]Inclusión de conjuntos***

Sean $A, B, C, D \subseteq E$ conjuntos. Demuestre que:

a) $A \cap B \subset C \Rightarrow A \cap C^c \subseteq B^c$

b) $(B \setminus A) \subseteq C \Rightarrow (D \setminus C) \subseteq (D \setminus B) \cup (D \cap A)$

c) **Propuesto:** $(A \cap D) \subseteq (B \cap D) \wedge (A \cap D^c) \subseteq (B \cap D^c) \Longrightarrow A \subseteq B$

a) Intuición:Como se trata de querer probar inclusiones, en este caso debemos tener como intuición que el conducto regular es tomar un elemento en el primer conjuntos y probar que este vive en el siguiente! Ojo que este elemento debe ser arbitrario para para el conjunto,
Ahora también tomar en cuenta que lo que nos pide probar es implicancias, por lo que el lado izquierdo de cada inciso será nuestra hipótesis.

b) Teoría:Saber que la caracterización de la inclusión se puede expresar a través de los conectivos de pertenencia y una implicancia. Además tener muy claro como funcionan la propiedades de conjuntos de la página 40 de apunte, se recomiendo demostrar esto antes de comenzar con los ejericicios.

c) Matraca:
a) Darte la hipótesis y notar que tendré formas equivalentes de escribir esta inclusión, una de estas me será más conveniente porque se asemeja más a lo que quiero probar
b) Transformar todo a operaciones más elementales tales como unión e intersecciones, repetir los pasos anteriores, pero esta vez notar que tenemos el conjunto D de manera adicional¿Puedo intersectarlo a ambos lados de la inclusión? esto es una equivalencia o implicancia?

P3. ***[MÓDULO PROPIO]Igualdad de conjuntos***
Sean $A, B, C, \subseteq E$ conjuntos. Demuestre que:

1. $A \cap C = \emptyset \Rightarrow (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$
2. $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$
3. **Propuesto:** $A \subseteq C \Rightarrow A \setminus B = C \setminus (B \cup (C \setminus A))$

a) Intuición:Para este tipo de problemas en donde debemos probar una igualdad, la doble inclusión será el arma fundamental y luego usar las tácticas del item anterior

b) Teoría:Capitulo 3 del apunte, pero en si manejar bien las caracterizaciones de la inclusión, igualdad y propiedades de la página 40.

c) Matraca:
1)Se recomienda desarrollar las expresiones hasta llegar a algunas más elementales, una vez con esto poder trabajar, notar que tengo una hipótesis que usar en el desarrollo!
Que además en este caso particular puedo trabajar a través de puras igualdades y no es necesario hacer la doble inclusión.
2)Para este caso hay que probar una equivalencia, por lo que se debe caracterizar en la doble implicancia para poder probarlo.
Para este caso si es necesario hacer la doble inclusión(en la implicancia a la izquierda), caracterización de la igualdad de conjuntos. La implicancia a la derecha debería salir relativamente rápido escribiendo de buena manera el conjunto durante el trayecto, notar que todo conjuntos es igual a la unión de el con el mismo conjunto, y que ocurre lo mismo para la intersección.
Para la implicancia a la izquierda debemos probar la inclusión de cada conjunto en el otro(los únicos 2 que aparecen), Hay que notar que el nombre de los conjuntos A y B son mudos en este caso, porque cumplen las mismas propiedades, por lo que será análogo probar la inclusión de A en B y la de B en A.
Tomando mi hipótesis debo ver como poder formar lo que quiero probar, entonces me puede ser conveniente escribir de manera conveniente la inclusión que quiero probar con las prop de la pág 40, luego para formar esto intersectar algo conveniente, ¿ qué puede ser?

PROPUESTOS:

P4. (**Propuesto:**) ***[MÓDULO COMÚN]Imaginación***
Sean A, B y C tres conjuntos. Analice el valor de verdad de las siguientes igualdades. Las que sean verdaderas, demuéstrelas y para las que sean falsas, entregue un contraejemplo.

a) $A\triangle(B \cap C) = (A\triangle B) \cap (A\triangle C)$.
b) $A\triangle(B \cup C) = (A\triangle B) \cup (A\triangle C)$.
c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.

a) Intuición:Dibujar

b) Teoría:Definición de diferencia y diferencia simétrica, métodos de demostración

c) Matraca:Ver caso a caso

P5. (**Propuesto:**) ***[MÓDULO COMÚN]Clásico controles***
Sean A y B dos conjuntos.

a) Demuestre que

$$A \cap B = \emptyset \iff (A \cup B) \setminus B = A.$$

b) Encuentre un conjunto X que verifique las siguientes igualdades:

$$A \cup X = A \cup B \ \wedge \ A \cap X = \emptyset.$$

c) ¿Existe un único conjunto X que satisface las igualdades precedentes?

Este ejercicio es clásico de controles, para la primera parte se debe separar en una doble implicancia, donde la que me entrega mayor información puede ser buena idea atacarla por contradicción dado que la tesis que quiero llegar está de una forma particular.
Para trabajar la otra, es recomendable escribir ahora la hipótesis de manera conveniente como en los problemas pasados.
Para la parte B, notar que el tipo que me piden debe no tener elementos de A por la segunda condición, pero si tener elementos de B por la primera condición, allí podemos darnos un candidato y probarlo por inspección!
Para la última parte , notar que me piden probar la unicidad de un candidato, por lo que comenzar por contradicción puede ser una buena opción, asumir que hay 2 distintos y llegar a que son iguales, pero también puede ser una buena opción ver una variante de como denotar a través de una propiedad la unicidad de elementos, pensar en introducción al cálculo, se que el inverso multiplicativo de cada número es único, y se que es el porque me cumple una propiedad particular,

P6. (**Propuesto:**) ***Conjunto de conjuntos***
Sea $A \subseteq E$, $A \neq \emptyset$. Se define $\mathcal{F}_A$ por:

$$\mathcal{F}_A = \{X \subseteq E \mid X \cap A \neq \emptyset\}$$

Demuestre que dado $B \subseteq E$:

a) $E \in \mathcal{F}_A \ \wedge \ A \in \mathcal{F}_A$

b) $A \setminus B \neq \emptyset \Longrightarrow B^c \in \mathcal{F}_A$

c) $B \in \mathcal{F}_A \ \wedge \ C \subseteq E \Longrightarrow B \cup C$

d) Si $A \subseteq B \cap C$, verifique que $B \in \mathcal{F}_A$ y $C \in \mathcal{F}_A$ pero $B \triangle C \notin \mathcal{F}_A$

La intuición haga lo suyo , esto me tinca algo de conjuntos , intersección no vacía , una posible contradicción e implicancias, entonces la teoría por detrás es muy clara la propiedades de la página 40 del apunte , los métodos de demostración de implicancias, y la contradicción como forma de atacar.
Luego a eso la parte a) ve cómo te definen los elementos de F_a, la primera condición es que esté en el espacio la cual es mínima para que exista el conjunto , la segunda es la qué hay que justificar, ahí te recomiendo centrarte!
Parte b) aplicar todas las definiciones posibles para simplificar todo, y manos a la obra tienes tu hipótesis y lo que quieres probar, ahora ve esquemáticamente que quiere decir cada cosa, y probar la pertenencia es ver que cumple sus condiciones o su buena contradicción
c)jeje me faltó poner $B \cup C$ pertenece a F_a(misma recomendación anterior)
d)ve caso a caso con las recomendaciones anteriores, ojo que son conjunciones ahora

Aux 03

P1)

Lenguaje común	Notación conjuntista
x no pertenece a A	$x \in A^c \iff x \notin A$
x pertenece a C o a B	$x \in C \cup B$
x pertenece a A pero no a C	$x \in A \cap C^c$
x pertenece a los 3 conjuntos	$x \in A \cap B \cap C$
x pertenece a algunos de los 3	$x \in A \cup B \cup C$
x no pertenece a ninguno de los 3	$x \in (A \cup B \cup C)^c \iff x \in A \cup B \cup C$
x no pertenece a A pero sí a algunos de los otros	$x \in A^c \cap (B \cup C)$
x pertenece a lo más uno de los elementos	$x \in [(A^c \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B^c \cap C^c) \cup (C \cap A^c \cap B^c)]$ Puede no estar en ninguno
x pertenece a 2 conjuntos	$x \in [(A^c \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c) \cup (A \cap B^c \cap C)]$

P2| Módulo propio : Inclusión

Sean $A, B, C, D \subseteq E$ PDQ.

a) $(A \cap B) \subseteq C \Rightarrow A \cap C^c \subseteq B^c$

Recordemos Equivalente por apunte

i) $A \subseteq B$
ii) $B^c \subseteq A^c$
iii) $A \cap B^c = \phi$
iv) $B \cup A^c = E$

- No temos que lo que nos piden demostrar es una implicancia con los mismos conjuntos de mi hipótesis, pero en otro orden o complementos, por lo que usar las propiedades del apunte puede ser una buena opción

Usando i) $\Leftrightarrow$ ii) $(A \cap B) \subseteq C$

$\Leftrightarrow C^c \subseteq (A \cap B)^c$ ↓ De Morgan.

$\Leftrightarrow C^c \subseteq (A^c \cup B^c)$

Luego intersectamos A

Lo que queremos $A \cap C^c \subseteq B^c$

$A \cap C^c \subseteq A \cap (A^c \cup B^c) = (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c)$

$= \phi \cup (A \cap B^c)$

$= A \cap B^c$

$A \cap C^c \subseteq \blacksquare C^c$
↓ $A \cap A^c = \phi$
↓ neutro para unión

$\therefore A \cap C^c \subseteq A \cap B^c$ pero luego

$A \cap C^c \subseteq A \cap B^c \subseteq B^c$ ↓ transitividad de la inclusión

$\therefore A \cap C^c \subseteq B^c$ ■

$C \cap D \subseteq D$
$C \cap D \subseteq C$ | siempre se tiene

b) $(B \setminus A) \subseteq C \Rightarrow (D \setminus C) \subseteq (D \setminus B) \cup (D \cap A)$

María: $(B \setminus A) \subseteq C$ — José: $(D \setminus C) \subseteq (D \setminus B) \cup (D \cap A)$

María $\Leftrightarrow (B \setminus A) \subseteq C$

$\Leftrightarrow (B \cap A^c) \subseteq C$ ↓ def de diferencia } Paso 1

José $\Leftrightarrow (D \setminus C) \subseteq (D \setminus B) \cup (D \cap A)$

$\Leftrightarrow (D \cap C^c) \subseteq (D \cap B^c) \cup (D \cap A)$ ↓ def de diferencia

$\Leftrightarrow (D \cap C^c) \subseteq D \cap (B^c \cup A)$ ↓ distributividad de $\cap$ c/r $\cup$ } Paso 2.

- Notemos que en nuestra hipótesis aparece lo que queremos llegar pero sin $\cap D$ y los complementos, por lo que realizarlo de manera constructiva como el caso anterior puede ser una buena opción

i) $\Leftrightarrow$ ii) luego

María $\Leftrightarrow (B \cap A^c) \subseteq C$

$\Leftrightarrow C^c \subseteq (B \cap A^c)^c$

$\Leftrightarrow C^c \subseteq (B^c \cup (A^c)^c)$ ↓ De Morgan

$\Leftrightarrow C^c \subseteq (B^c \cup A)$ ↓ $(A^c)^c \Leftrightarrow A$

Luego intersectamos D arbitrario, tenemos:

$D \cap C^c \subseteq D \cap (B^c \cup A) \Leftrightarrow$ José

Paso 2

$\therefore (B \setminus A) \subseteq C \Rightarrow (D \setminus C) \subseteq (D \setminus B) \cup (D \cap A)$ //

P3|| Igualdad de conjuntos.

1. $A \cap C = \emptyset \Rightarrow (A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \setminus C)$

2.

Juan: $(A \setminus B) \setminus C$ — Pedro: $A \setminus (B \setminus C)$

$p \Rightarrow q$

Juan $\Leftrightarrow (A \setminus B) \setminus C = (A \setminus B) \setminus C$

$\Leftrightarrow (A \cap B^c) \setminus C = (A \setminus B) \setminus C$ ↓ def de diferencia =

$\Leftrightarrow (A \cap B^c) \cap C^c = (A \setminus B) \setminus C$ ↓ def de diferencia ⊕ Asociatividad de $\cap$

$\Leftrightarrow A \cap B^c \cap C^c = (A \setminus B) \setminus C$ } PASO 1

Pedro $\Leftrightarrow A \setminus (B \setminus C)$ ↓ Enunciado

$\Leftrightarrow A \setminus (B \cap C^c) =$ ↓ def de diferencia ⊕ $(C^c)^c = C$ $A \setminus (B \setminus C)$

$\Leftrightarrow A \cap (B \cap C^c)^c =$ ↓ Ley de De Morgan ⊕ def de diferencia $= (A \setminus (B \setminus C))$

$\Leftrightarrow A \cap (B^c \cup C) = A \setminus (B \setminus C)$ } PASO 2

- Notemos que lo que quiero probar es una igualdad. Por lo que puedo comenzar de un lado.

Comenzaremos de pedro $A \setminus (B \setminus C) \Leftrightarrow$ pedro

$= A \cap (B^c \cup C)$ ↓ distributividad de $\cap$ c/r $\cup$

$= (A \cap B^c) \cup (A \cap C)$ ↓ $A \cap C = \emptyset$ enunciado

$= (A \cap B^c) \cup \emptyset$ ↓ neutro para unión

$= (A \cap B^c) = A \cap B^c \cap C^c = (A \setminus B) \setminus C$ ∎

Si: $A \cap C = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq C^c$ luego * ⇒ pues C^c contiene A, entonces es como intersectar nada y mantener el tamaño del conjunto. ¡Pensar en $\in$

2. $A=B \iff A\cap B = A\cup B$

$\Rightarrow$ $A\cap B = A\cap A = A = A\cup A = A\cup B$.

Acá podemos tomar un lado de la igualdad y llegar al otro a través de los hipótesis, notar que $A\cap A = A$, $A\cup A = A$

$\therefore\ A\cap B = A\cup B$

$\Leftarrow$ Tenemos $A\cap B = A\cup B$ y queremos $A=B$

Lo que debemos probar es $A\subseteq B \wedge B\subseteq A \iff A=B$, $\forall x\in E$.

Tenemos $A\cap B = A\cup B$ y estudiaremos ↖ pues el $B\subseteq A$ es análogo, luego $A\subseteq B \iff A\cap B^c = \phi$ así que la intuición me debe decir que formaré un vacío $A\cap B = A\cup B$ si intersecto B^c

$\Rightarrow (A\cap B)\cap B^c = (A\cup B)\cap B^c$ ↓ Asociatividad $\cap$

$\Leftrightarrow A\cap B\cap B^c = (A\cup B)\cap B^c$ ↓ $B\cap B^c = \phi$

$\Leftarrow A\cap \phi = (A\cup B)\cap B^c$ ↓ Dominancia ϕ con $\cap$

$\Leftarrow \phi = (A\cup B)\cap B^c$

Ahora usando ↑ y ** si pruebo $(A\cup B)\cap B^c = A\cap B^c$ estamos listos

↓ distributividad $\cap$ sobre $\cup$

$= (A\cap B^c)\cup(B\cap B^c)$ ↓ tercio excluso

$= (A\cap B^c)\cup \phi$ ↓ neutro

$= A\cap B^c$ //

Luego sabíamos que $(A\cup B)\cap B^c = \phi = A\cap B^c \iff A\subseteq B$ luego $B\subseteq A$ análogo

Probamos $\therefore\ A=B$ //

P4 Propuesto, se recomienda desarrollar y dar contraejemplo, dibujar para intuición. 6

P5 [Módulo Propio]

P4 c) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

$A \setminus (B \cup C) = A \cap (B \cup C)^c = A \cap (B^c \cap C^c)$

$= A \cap A \cap B^c \cap C^c$

$= (A \cap B^c) \cap (A \cap C^c) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$ ■

A, B conjuntos

2) Demuestre $A \cap B = \phi \iff (A \cup B) \setminus B = A$

Δ

Δ $(A \cup B) \setminus B = A$

$= (A \cup B) \cap B^c =$ ↓ def de diferencia

$= (A \cap B^c) \cup (B \cap B^c)$ ↓ distributividad de $\cap$

$= (A \cap B^c) \cup \phi$ ↓ c/r unión

$= (A \cap B^c)$ ↓ tercio excluso

$= (A \setminus B)$ ↓ vacío neutro para $\cup$. ↓ def de diferencia

} Paso 1

$\Rightarrow$) tenemos hipótesis $A \cap B = \phi \iff A \subseteq B^c$ *

luego $\Delta \iff (A \cup B) \setminus B = A$

tomamos un lado de igualdad

$(A \cup B) \setminus B = (A \setminus B) = (A \cap B^c) = A$ ■ *, pues B^c es más grande y contiene a A, luego si intersecto queda A

Paso 1

dado $A \subseteq B^c$ //

$\Leftarrow$ $(A \cup B) \setminus B = A \Rightarrow A \cap B = \phi$

Por contradicción supondremos

$\exists x \in A \cap B \neq \phi$

tomo $(A \cup B) \setminus B = A$

$\Leftrightarrow (A \cup B) \cap B^c = A$

$\Leftrightarrow (A \cap B^c) \cup (B \cap B^c) = A$

$\Leftrightarrow (A \cap B^c) \cup \phi = A$

$\Leftrightarrow (A \cap B^c) = A$

reemplazo en $A \cap B \neq \phi$

$\Leftrightarrow (A \cap B^c) \cap B \neq \phi$

$\Leftrightarrow A \cap (B^c \cap B) \neq \phi$

$\Leftrightarrow A \cap \phi \neq \phi$

$\Leftrightarrow \phi \neq \phi$ contradicción!

Por lo que $A \cap B = \phi$ dado $(A \cup B) \setminus B = A$ ∎

Con ambas implicancias se tiene la equivalencia

b) Encuentre X tq (conjunto)

$A \cup X = A \cup B \wedge A \cap X = \phi$ necesitamos que se cumplan las 2 condiciones para que cumpla $A \cap X = \phi$ $X \subseteq A^c$ pues debe cumplir aquello, si es de forma $A^c \cup \{algo\}$ lo agrando y no cumplo $A \cap X = \phi$ luego sería $A^c \cap \{algo\}$ ese algo puede ser B o B^c, probando $A^c \cap B$ es nuestro buen X, pues $A \cap (A^c \cap B) = \phi$ ✓ $A \cup (A^c \cap B) = (A \cup B^c) \cap (A \cup B)$

$= A \cup B$ //

∎

P5]
c) Existe un único X que cumple?

Supondremos que hay 2!!!

$\exists X_1, X_2 \; ; X_1 \neq X_2$ tq , $\in$ conjunto ref universal

1) $A \cup X_1 = A \cup B$ ∧ 3) $A \cap X_1 = \phi$
2) $A \cup X_2 = A \cup B$ ∧ 4) $A \cap X_2 = \phi$

Propiedad clave propuesto demostrar } Preeliminar

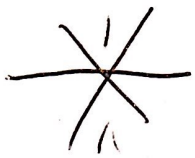
$A \Delta B = A \Delta C \Rightarrow B = C$

luego vemos

$A \Delta X_1 = (A \cup X_1) \setminus (A \cap X_1) = (A \cup X_1) \cap (A \cap X_1)^c = (A \cup X_1) \cap \phi^c = (A \cup X_1) \cap \in$ (1)
(3) $= A \cup B$

$A \Delta X_2 = (A \cup X_2) \setminus (A \cap X_2) = (A \cup X_2) \cap (A \cap X_2)^c = (A \cup X_2) \cap \phi^c = (A \cup X_2) \cap \in$
(4) $= A \cup B$ (2)

luego $A \Delta X_1 = A \Delta X_2 \Rightarrow X_1 = X_2$
Preeliminar



habíamos supuesto que eran diferentes
∴ X es único ; $X = A^c \cap B$ //

P6] Propuesto.

Ya terminamos!

Cualquier duda a pyanez@dim.uchile.cl

Scanned with CamScanner