MA1101-10 Introducción al Cálculo
Profesor: Pedro Pérez.
Auxiliar: Patricio Yáñez A .

Auxiliar 6 Elipse Hipérbola

Resumen Clase

- Inyectividad: Sea $f : A \to B$. f es inyectiva cuando
$$(\forall x, y \in A) x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$
- Sobreyectividad: Sea $f : A \to B$. f es sobreyectiva cuando
$$(\forall y \in B)(\exists x \in A) y = f(x)$$
- Biyectividad: Sea $f : A \to B$. f es biyectiva cuando es inyectiva y sobreyectiva a la vez.
- Ceros: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Los ceros son el conjunto
$$Z(f) == \{x \in Dom(f) | f(x) = 0\}$$
- Crecimiento: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $B \subseteq A$. Diremos que en B
  - f es creciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$
  - f es decreciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$
  - f es estrictamente creciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
  - f es estrictamente decreciente $\Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in B) x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
  - Además, si $A = B$ diremos que f es monótona creciente o decreciente según corresponda
- Paridad: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
  - f es par $\Leftrightarrow (\forall x \in A) f(-x) = x$
  - f es impar $\Leftrightarrow (\forall x \in A) f(-x) = -x$
- Función Periódica: Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. f es periódica $\Leftrightarrow p > 0$ tal que $(\forall x \in A)(x + p) \in A$ y $(\forall x \in A) f(x + p) = f(x)$

P1. Considere la elipse de ecuación clásica de una elipse centrada en $(0, 0)$ tal que el rectángulo inscrito en la elipse que tiene a (x0, y0) como vértice y sus lados paralelos a los ejes de coordenadas tiene área máxima. Nota: utilice las propiedades de parábolas para determinar el máximo.

P2. [Elipses y rectas] C2-MA1001-2015.P1
Considere las rectas $L_1 : x = A$, $L_2 : y = B$ y el punto $F(f, B)$ sobre la recta L_2, donde $f > A$ .Si $\bar{F}$ es el simétrico de F con respecto a la recta L_1, encuentre la ecuación de la elipse cuyos focos son F y $\bar{F}$ y cuyo semieje mayor mide a, donde $a > f - A$
Indique cuánto vale la excentricidad de la elipse y encuentre las ecuaciones de sus directrices.

P3. Considere la parábola $y^2 = 4px$ y los puntos $A(0, 0)$, $B(2p, 0)$, donde $p > 0$. Sea $P(x_0, y_0)$ un punto cualquiera de la parábola, diferente del vértice, y L la recta tangente a la parábola por P
Considere que L tiene ecuación $y_0 y = 2p(x + x_0)$(No lo demuestre, sólo úselo)

a) Calcule las distancias d_a y d_b desde A y B a la recta L y demuestre que $d_b^2 - d_a^2 = 4p^2$

Indicación: La distancia desde (α, β) a la recta $ax + by + c = 0$ vale $\dfrac{|a\alpha + b\beta + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

P4. Ejercicio circunferencias

Considere los puntos $A = (a, 0)$ y $B = (-a, 0)$, donde $a > 0$. Encuentre el lugar geométrico de los puntos $P = (x, y)$ tal que las pendientes de las rectas L_{PA} y L_{PB} satisfacen la siguiente relación

$$m_{PA} = \frac{2m_{PB}}{1 - m_{PB}^2}$$

P5. Determinar el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{5}{x^2-4}$

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

c) $f(x) = |x^2| - 2$

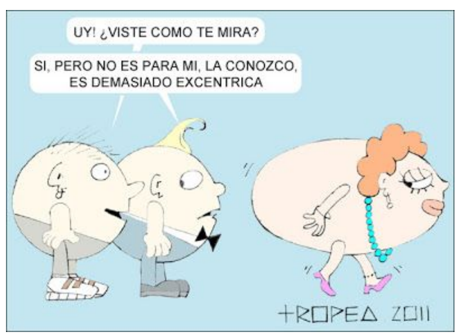
d) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

P6. Determine la paridad, ceros y biyectividad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 6x^2 - x - 5$

b) $g(x) = f(x + 1)$

c) $h(x) = f(|x|)$



Resumen

Hipérbola: $e > 1$

Horizontales ; *Verticales*

$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad \frac{(y-y_0)^2}{b^2} - \frac{(x-x_o)^2}{a^2} = 1$$

Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$; $e = \frac{\sqrt{b^2+a^2}}{b}$

Centrada en: (x_o, y_o) ; (x_o, y_o)

Focos: $(x_o \pm ae, y_o)$; $(x_o, y_o \pm be)$

Directrices: $x = x_o \pm \frac{a}{e}$; $y = y_o \pm \frac{b}{e}$

Elipse: $0 < e < 1$

$a > b$ (Semi eje mayor: a) ; $a < b$ (semi eje mayor: b)

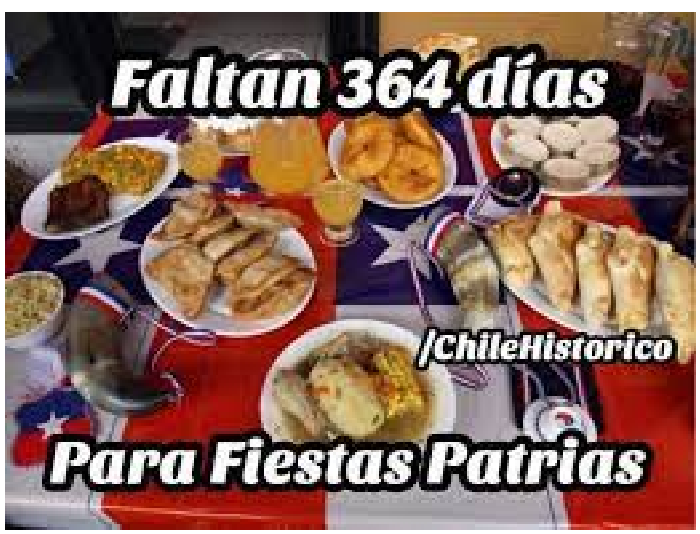
$$\frac{(x-x_o)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1 \quad ; \quad \frac{(x-x_o)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

Excentricidad: $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$; $e = \frac{\sqrt{b^2-a^2}}{b}$

Centrada en: (x_o, y_o) ; (x_o, y_o)

Focos: $(x_o \pm ae, y_o)$; $(x_o, y_o \pm be)$

Directrices: $x = x_o \pm \frac{a}{e}$; $y = y_o \pm \frac{b}{e}$

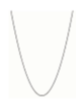


Propuestos

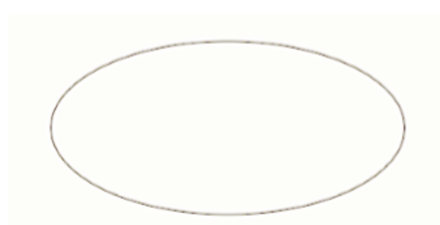
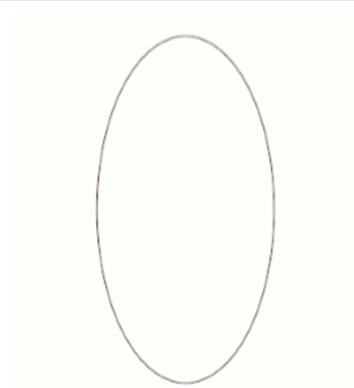
P1. Encuentre los valores $\lambda \in \mathbb{R}$, tales que: $\lambda x^2 + 4x + \lambda > 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Recuerdos y Consejos

Parábola

	Vertical		Horizontal	
Ecuación	$y - y_0 = \frac{1}{4p}(x - x_0)^2$		$x - x_0 = \frac{1}{4p}(y - y_0)^2$	
Vértice	(x_0, y_0)		(x_0, y_0)	
Foco	$(x_0, y_0 + p)$		$(x_0 + p, y_0)$	
Directriz	$y = y_0 - p$		$x = x_0 - p$	
Sentido de las ramas	Arriba si $p > 0$	Abajo si $p < 0$	Derecha si $p > 0$	Izquierda si $p < 0$
Forma				

Elípse

	Horizontal	Vertical
Ecuación	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$
Centro	(x_0, y_0)	(x_0, y_0)
Semiejes	$a > b > 0$	$b > a > 0$
Excentricidad	$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$	$e = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$
Focos	$(x_0 \pm a \cdot e, y_0)$	$(x_0, y_0 \pm b \cdot e)$
Directrices	$x = x_0 \pm \frac{a}{e}$	$y = y_0 \pm \frac{b}{e}$
Forma		

Resumen

Definición (Módulo)**.** Sea $x \in \mathbb{R}$, llamaremos módulo de x al real definido por:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Proposición 1. *Se tienen las siguientes propiedades:*

(i) $\forall x \in \mathbb{R} |x| \geq 0$

(ii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|xy| = |x| \cdot |y|$

(iv) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$

(v) $|x| \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \vee x \geq a$

(vi) $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $|x + y| \leq |x| + |y|$

Definición (Lugar geométrico)**.** Es el conjunto de puntos que satisfacen una condición dada

Definición (Raíz cuadrada)**.** Sea x un real no negativo, definimos su raíz cuadrada como aquel número t, tal que $t^2 = x$ y lo denotamos como $\sqrt{x} = t$.

Observación. Por el momento asumiremos la existencia y unicidad de la raíz cuadrada para cada real no negativo, pues nos faltan herramientas para demostrar esto uwu

Definición (Distancia entre puntos)**.** Dados dos puntos $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$, entonces la distancia entre P_1 y P_2 estará dada por:

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Definición (Circunferencia)**.** Definimos la circunferencia $\mathcal{C}$ de centro $A = (x_0, y_0)$ y radio r como el lugar geométrico de todos los puntos tales que su distancia a A es exactamente r, es decir:

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d(A, (x, y)) = r\}$$

Usando la fórmula para distancia, obtenemos que:

$$\mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\}$$

Definición (Ecuación general de la recta)**.**

$$\mathcal{L} : ax + by + c = 0$$

Definición (Pendiente de una recta)**.** Sea un recta $\mathcal{L}$ no vertical, con dos puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ distintos en ella, definimos la pendiente de $\mathcal{L}$ como el real $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Definición (Ecuación de la recta, punto pendiente)**.**

$$\mathcal{L} : (y - y_0) = m(x - x_0)$$

Definición (Ecuación de la recta dados dos puntos)**.**

$$\mathcal{L} : (y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Definición (Ecuación principal de la recta)**.**

$$\mathcal{L} : y = mx + n$$

Definición (Simetral)**.** Dados dos puntos P, Q distintos, definimos la simetral como la recta:

$$\mathcal{L} : d(P, (x, y)) = d(Q, (x, y))$$

Definición (Paralelismo)**.** Dos rectas L y L' son paralelas ssi $L = L'$ o bien $L \cap L' = \emptyset$

Definición (Perpendicularidad)**.** Dos rectas L y L' son perpendiculares ssi para todo par de puntos distintos $P, Q \in L$, la simetral entre P y Q es paralela a L'