Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
Viernes 17 de Abril de 2009

Pauta Guía Problemas: Semana 5

Profesor: Jorge San Martin H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x| - \sqrt{1-x^2}$

(a) Determine $A = Dom\ f$, recorrido y paridad.

(b) Encuentre los ceros y signos de f.

(c) Determine las zonas de crecimiento y de decrecimiento.

(d) Muestre que f no es inyectiva ni sobreyectiva.

(e) Determine el mayor conjunto B, $B \subseteq A = Dom\ f$ tal que $f : B \to f(B)$ sea biyectiva, y calcule $f^{-1}(x)$.

(f) Bosqueje el gráfico de f y de $|f|$.

Solución:

(a) Buscamos el mayor conjunto A, donde la función f quede bien definida. Para esto, debemos notar en primer lugar que la expresion $\sqrt{1-x^2}$ se indefine cuando el argumento de la raíz es negativo, por lo que debemos imponer que los elementos $x \in A$ cumplan:

$$\begin{aligned} 1 - x^2 \geq 0 &\Leftrightarrow 1 \geq x^2 \\ &\Leftrightarrow x \in [-1, 1] \end{aligned}$$

Como $|x|$ no crea restricciones adicionales al conjunto de partida, terminamos concluyendo que $A = Dom\ f = [-1, 1]$. Finalmente, para estudiar la paridad veamos qué pasa con $f(-x)$:

$$\begin{aligned} f(-x) &= |-x| - \sqrt{1-(-x)^2} \\ &= |x| - \sqrt{1-x^2} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función f es par.

(b) Para encontrar los ceros de f, que corresponden a todos los $x \in A$ tales que $f(x) = 0$, debemos imponer esta última igualdad, y despejar los valores de x que la verifican:

$$\begin{aligned} & |x| - \sqrt{1-x^2} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & |x| = \sqrt{1-x^2} \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = 1 - x^2 \\ \Leftrightarrow\ & 2x^2 = 1 \\ \Leftrightarrow\ & x^2 = \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow\ & x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

En consecuencia, los ceros de f son $Z = \left\{\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. Analicemos los sígnos de f. Para encontrarlos, debemos resolver las inecuaciones $f(x) > 0$ y $f(x) < 0$, que se traducen en:

$$|x| - \sqrt{1-x^2} > 0 \qquad (1)$$

$$|x| - \sqrt{1-x^2} < 0 \qquad (2)$$

Desarrollemos (1), que nos dará los valores de x para que $f(x)$ sea positiva:

$$\begin{aligned}
& |x| - \sqrt{1-x^2} > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & |x| > \sqrt{1-x^2} \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 > 1 - x^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 2x^2 > 1 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 > \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow \quad & |x| > \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\Leftrightarrow \quad & x \in \left[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]
\end{aligned}$$

Claramente, el subconjunto de A donde $f(x)$ es negativa es el complemento (relativo a A) de los ceros y las zonas donde $f(x) > 0$, por lo tanto $f(x) < 0$ ssi

$$x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

(c) Sean $x_1, x_2 \in A$, tales que $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$. Reconstruyamos la función, de forma que podamos analizar el crecimiento o decrecimiento de ella:

$$\begin{aligned}
x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad & {x_1}^2 < {x_2}^2 \\
\Leftrightarrow \quad & -{x_1}^2 > -{x_2}^2 \\
\Leftrightarrow \quad & 1 - {x_1}^2 > 1 - {x_2}^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \sqrt{1-{x_1}^2} > \sqrt{1-{x_2}^2} \\
\Leftrightarrow \quad & -\sqrt{1-{x_1}^2} < -\sqrt{1-{x_2}^2} \\
\Leftrightarrow \quad & |x_1| - \sqrt{1-{x_1}^2} > |x_2| - \sqrt{1-{x_2}^2} \\
\Leftrightarrow \quad & f(x_1) < f(x_2)
\end{aligned}$$

Esto implica que la función es estrictamente creciente en $[0,1]$. Por tratarse de una función par, concluimos que en $[-1,0]$ es estrictamente decreciente. Ahora que hemos analizado el crecimiento, podemos encontrar el recorrido de f. Notemos que por ser f par nos basta analizar lo que ocurre en $[0,1]$. Como ya sabemos que en este intervalo la función es estrictamente creciente, nos basta evaluar en los extremos del intervalo y tendremos el valor mínimo y máximo, respectivamente. Así, tenemos que $f(0) = -1$ y $f(1) = 1$ implican que $Rec\ f = [-1,1]$.

(d) Claramente de la parte (b), f no es sobreyectiva, pues $Rec\ f = [-1,1] \neq \mathbb{R}$. Recordemos que siempre se puede cambiar una función f no epiyectiva, por una función g tal que su conjunto de llegada sea el recorrido de f, es decir,

$$\begin{aligned}
g : & A \to f(A) \\
& x \mapsto f(x)
\end{aligned}$$

Que resulta ser epiyectiva. Podríamos llamar a g la «sobreyectización» de f.
Veamos que f no es inyectiva. Esto resulta claro del hecho que f es par y por lo tanto $f(x) = f(-x),\ \forall x \in A$.
Nota: Toda función par, con dominio A no vacío, simétrico y tal que $A \neq \{0\}$ es no inyectiva.

(e) Notemos que si restringimos f al conjunto $B = [0,1]$, resulta ser inyectiva (deja de ser par y es estrictamente creciente). Además como cambiamos el conjunto de llegada a $f(A) = Rec\ f$. Tenemos entonces que $\tilde{f} : B \to f(A)$ es biyectiva.
Nota 1: Cambiamos de nombre a f por $\tilde{f}$, pues dos funciones para ser iguales deben tener mismo dominio y mismo recorrido, así, si restringimos f a un conjunto menor que su dominio, obtenemos una nueva función, que resulta ser igual en todo punto a f pero que no es f.

Nota 2: Toda función estrictamente creciente (o decreciente) es inyectiva.
Para encontrar la inversa debemos encontrar, para cada $y \in [-1,1]$, $x \in B$ tal que $y = f(x)$, para esto debemos resolver la siguiente ecuación en x

$$\begin{aligned} y = x - \sqrt{1-x^2} &\Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = x - y \\ &\Rightarrow 1 - x^2 = x^2 - 2xy + y^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - xy - \frac{y^2-1}{2} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{y \pm \sqrt{2-y^2}}{2} \end{aligned}$$

Notemos que en $\mathbb{R}$ tenemos dos soluciones. Debemos descartar una pues la inversa, de existir, debe ser única. Para esto notemos que se cumple que $y - \sqrt{2-y^2} < 0$ para todo $y \in [-1,1)$. Para $y = 1$ las dos soluciones de la ecuación anterior estan en el dominio de la función (la soluciones son 0 y 1), pero $f(0) = -1$ no es solución de la ecuación original. Entonces concluimos que la función inversa es

$$\begin{aligned} f^{-1} \ &: f(B) \to B \\ x &\mapsto \frac{x + \sqrt{2-x^2}}{2} \end{aligned}$$

Notemos que si tomamos $B = [-1,0]$ tendríamos que ocupar la solución negativa.

(f) Gráfico de f

P2. Sea $f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$.

(a) Encuentre su dominio A, ceros y signos.

(b) Pruebe que f es inyectiva.

(c) Pruebe que el recorrido de f es $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

(d) Encuentre la función inversa de $f : A \to \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$ y explicite su dominio y recorrido.

Solución:

(a) Notamos que la única restricción para el dominio de esta función es que el denominador no puede valer cero, ya que la división quedaría indefinida, por lo tanto $A = \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{-1}{2}\right\}$.
Calculamos los ceros de la función tal como en el P1, imponiendo $f(x) = 0$:

$$\frac{x+1}{2x+1} = 0 \ \Leftrightarrow \ x + 1 = 0 \ \Leftrightarrow \ x = -1$$

Teniendo esto, para encontrar los signos de f, basta notar que $\forall x \in (-\infty, -1)$, $f(x) < 0$; y que $\forall x \in (-1, +\infty)$, $f(x) > 0$.

(b) Sean $x_1, x_2 \in A$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$. Probemos que esto implica necesariamente que $x_1 = x_2$. En efecto:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x_1+1}{2x_1+1} = \frac{x_2+1}{2x_2+1} \\ &\Leftrightarrow \quad (x_1+1)(2x_2+1) = (x_2+1)(2x_1+1) \\ &\Leftrightarrow \quad 2x_1x_2 + x_1 + 2x_2 + 1 = 2x_1x_2 + x_2 + 2x_1 + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 + 2x_2 = x_2 + 2x_1 \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, f es inyectiva.

(c) Para responder esta pregunta, podemos considerar la función como $y = \frac{x+1}{2x+1}$, despejar x en función de y para así obtener la inversa f^{-1} (entre comillas, porque aún no sabemos si f es biyectiva), y analizar su dominio, que será precisamente el recorrido de f. Siendo así, tenemos:

$$\begin{aligned} y = \frac{x+1}{2x+1} \quad &\Leftrightarrow \quad y(2x+1) = x+1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2xy + y = x + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x(2y-1) = 1 - y \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{1-y}{2y-1} \end{aligned}$$

Así, es claro que la única restricción es que y sea distinto de $\frac{1}{2}$, por lo tanto, Rec $f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

(d) Con todo lo encontrado previamente, tenemos que la función inversa de f es aquella tal que:

$$\begin{aligned} f^{-1} : B &\rightarrow A \\ x &\mapsto f^{-1}(x) = \frac{1-x}{2x-1}, \end{aligned}$$

con $B = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$, y A el dominio de f, encontrado en a).

P3. Sea la fórmula $f(x) = \sqrt{1 - \frac{2}{1+x}}$.

(a) Determine el mayor conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $f : A \to \mathbb{R}$, que a x le asocia $f(x)$, sea una función.

(b) Encuentre los ceros de f y determine sus signos.

(c) Determine la paridad y periodicidad de f.

(d) Determine la inyectividad y biyectividad de f.

(e) Encuentre los intervalos donde f crece y aquellos donde f decrece.

(f) Grafique f.

Solución:

(a) Tal como en las preguntas anteriores, busquemos las posibles indefiniciones de la función, para así sacarlas del dominio de ella. Imponiendo que el argumento de la raíz sea mayor o igual a cero, tenemos:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2}{x+1} \geq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{x+1-2}{x+1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{x+1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x \in (-\infty, -1) \cup [1, +\infty) \end{aligned}$$

Notemos que la otra restricción de la función, $x \neq -1$ (para que la fracción no sea dividida por cero) ya está presente en el conjunto encontrado, por lo tanto $A = (-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$.

(b) Imponiendo $f(x) = 0$, el(los) valor(es) de x que lo cumple(n) es(son):

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{2}{x+1}} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{2}{x+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 1 = \frac{2}{x+1} \\ &\Rightarrow \quad x + 1 = 2 \\ &\Leftrightarrow \quad x = 1 \end{aligned}$$

Tal como en la pregunta anterior, la presencia de la implicancia se debe a que esto sólo es verdad cuando x pertenece al dominio de la función.
Ahora, notemos que para encontrar los puntos donde $f(x) > 0$, en el desarrollo de la inecuación correspondiente, llega un punto donde debemos resolver la misma que en la parte a), por lo tanto, concluimos que la función es positiva en todo su dominio, y por ende, nunca es negativa.

(c) Notemos que el dominio de f no es simétrico, y por lo tanto, la función no puede ser par ni impar.
Para estudiar la periodicidad de f, debemos encontrar $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $f(x+p) = f(x)$. Entonces resolvemos la ecuación:

$$\begin{aligned} f(x+p) = f(x) &\Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{2}{1+x}} = \sqrt{1 - \frac{2}{1+x+p}} \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{2}{1+x} = 1 - \frac{2}{1+x+p} \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{1+x} = \frac{2}{1+x+p} \\ &\Rightarrow 1+x = 1+x+p \\ &\Leftrightarrow p = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto la función tampoco es periódica.

(d) La función es claramente no sobreyectiva, ya que para ningún $y \in \mathbb{R}^-$ existe un x tal que $y = f(x)$. Veamos si es inyectiva. Sean x_1, $x_2 \in A$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$, y desarrollemos:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \quad &\Leftrightarrow \quad \sqrt{1 - \frac{2}{x_1+1}} = \sqrt{1 - \frac{2}{x_2+1}} \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{2}{x_1+1} = 1 - \frac{2}{x_2+1} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2}{x_2+1} = \frac{2}{x_1+1} \\ &\Rightarrow \quad 2(x_1+1) = 2(x_2+1) \\ &\Leftrightarrow \quad x_1 = x_2 \end{aligned}$$

Así, concluimos que f es inyectiva, pero no sobreyectiva.

(e) Sean x_1, $x_2 \in A$, tales que $x_1 < x_2$. Busquemos reconstruir la función, para ir analizando sus zonas de crecimiento y decrecimiento:

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 \quad &\Leftrightarrow \quad x_1 + 1 < x_2 + 1 \\ &\Rightarrow \quad \frac{1}{x_1+1} > \frac{1}{x_2+1} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2}{x_1+1} > \frac{2}{x_2+1} \\ &\Leftrightarrow \quad -\frac{2}{x_1+1} < -\frac{2}{x_2+1} \\ &\Leftrightarrow \quad 1 - \frac{2}{x_1+1} < 1 - \frac{2}{x_2+1} \\ &\Leftrightarrow \quad \sqrt{1 - \frac{2}{x_1+1}} < \sqrt{1 - \frac{2}{x_2+1}} \\ &\Leftrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) \end{aligned}$$

Concluimos que la función es estrictamente creciente en todo su dominio.

(f) Gráfico de f

P4. Sean α, $\beta \in \mathbb{R}$, y la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha & si\ x \geq 0 \\ x + \beta & si\ x < 0 \end{cases}$.

(a) Demuestre que f es epiyectiva ssi $\alpha \leq \beta$.

(b) Demuestre que f es inyectiva ssi $\alpha \geq \beta$.

(c) ¿Cuál es el conjunto $B = \big\{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 | f \text{ es biyectiva}\big\}$?

Solución:

(a) Una función f es epiyectiva, ssi todo elemento en su codominio tiene una preimagen en el dominio de ella. En este caso, para que f sea epiyectiva, necesitamos que $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
Notemos que, para poder trabajar con los intervalos que definen a la función, podemos escribir $\mathbb{R} = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty)$. Así, tenemos:

$$f(\mathbb{R}) = f\left((-\infty, 0) \cup [0, +\infty)\right) = f\left((-\infty, 0)\right) \cup f\left([0, +\infty)\right) = (-\infty, \beta) \cup [\alpha, +\infty)$$

Punto en el que notamos que f es epiyectiva ssi $\alpha \leq \beta$, para que ningún valor de x se salga de la unión de los intervalos, y asi obtengamos todo $\mathbb{R}$.

(b) Para este caso, probemos la doble implicancia:
$\Rightarrow$) Tenemos que f es inyectiva, con lo que debemos probar que $\alpha \geq \beta$. Razonemos por contradicción, vale decir, supongamos que f es inyectiva y que $\alpha < \beta$. Entonces, tendríamos que $\alpha - \beta < 0$ y luego $f(\alpha - \beta) = (\alpha - \beta) + \beta = \alpha = f(0)$.
Como f es inyectiva, y $f(\alpha - \beta) = f(0)$, deberíamos concluir que $\alpha - \beta = 0$, contradiciendo nuestra suposición inicial; por lo tanto $\alpha \geq \beta$.
$\Leftarrow$) Ahora debemos tomar como hipótesis que $\alpha \geq \beta$, y con esto probar que f es inyectiva. De la definición de f, notamos que es estrictamente creciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y $[0, +\infty)$ por separado, y como $\alpha \geq \beta$, también es creciente al pasar de uno al otro. Por lo tanto, la función es inyectiva.
Así, probadas las dos implicancias, concluimos que f es inyectiva ssi $\alpha \geq \beta$.

(c) Sabemos que f es biyectiva ssi f es inyectiva y epiyectiva a la vez, y claramente, de lo obtenido en *a*) y en *b*), ambas condiciones se cumplen cuando $\alpha = \beta$. Por lo tanto, el conjunto buscado es:

$$B = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha = \beta\}$$

P5. Sea la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \begin{cases} x & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Pruebe que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| \leq |x|$.

Solución:

Observando la definición de la función, notamos en forma directa que debemos separar el estudio de ella en dos casos, $x \in \mathbb{Q}$, o bien $x \notin \mathbb{Q}$. Partamos por este último, notando que $g(x) = 0$ para cualquier x en esta situación, por lo que $|g(x)| = 0$, que claramente es siempre menor que $|x|$ (ya que $0 \in \mathbb{Q}$).
En el caso de $x \in \mathbb{Q}$, $g(x) = x$, de donde rápidamente concluimos que $|g(x)| = |x|$.
Finalmente, uniendo ambos casos estudiados, y recordando que $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^*$, se llega a la conclusión de que:

$$|g(x)| \leq |x|, \ \forall x \in \mathbb{R}$$

.