Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática
13 de mayo de 2009

Pauta Guía Problemas Semana 2

Profesor: Jorge San Martin H.
Auxiliares: Gianfranco Liberona, Nikolas Tapia

P1. **(a)** Demuestre que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ x, y > 0,\ (x+y)(x^{-1}+y^{-1}) \geq 4.$$

Indique qué axiomas o propiedades del orden está utilizando.

(b) **i)** Demuestre que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x > 0,\ x^2 + \frac{2}{x} \geq 3.$$

Hint: Analice el producto $(x-1)^2(x+2)$.

ii) Demuestre que, para $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, se tiene:

$$a^3 + 2b^3 \geq 3ab^2.$$

Hint: Utilice la parte anterior.

Solución:

(a) Para demostrar, ocuparemos la desigualdad $x^2+y^2 \geq 2xy$ (se deja como ejercicio para el lector demostrarla, o bien recordar su demostración vista en clases), que se cumple $\forall x, y \in \mathbb{R}$. La idea es tomar una de las dos componentes de la desigualdad, y llegar a la otra. Partiendo por el lado izquierdo, se tiene:

$$\begin{aligned}
(x+y)(x^{-1}+y^{-1}) &= (x+y)(x^{-1}+y^{-1})(xy)(xy)^{-1} \\
&= (x+y)(x^{-1}xy+y^{-1}xy)(xy)^{-1} \\
&= (x+y)(y+x)(xy)^{-1} \\
&= (x+y)^2(xy)^{-1} \\
&= (x^2+2xy+y^2)(xy)^{-1} \\
&= (x^2+y^2+2xy)(xy)^{-1} \\
&\geq (2xy+2xy)(xy)^{-1} && \text{(Desigualdad Mencionada)} \\
&= 4(xy)(xy)^{-1} = 4.\blacksquare
\end{aligned}$$

(b) **i)** Siguiendo el hint, notemos que $(x-1)^2 \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, y por lo tanto, sigue siéndolo para $x > 0$. Además, $(x+2) > 0$ en estas circunstancias. Así, podemos concluir que

$$(x-1)^2(x+2) \geq 0,\ \forall x > 0.$$

Desarrollando esta desigualdad, tenemos:

$$\begin{aligned}
(x-1)^2(x+2) \geq 0 &\Leftrightarrow (x-1)(x-1)(x+2) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (x^2-2x+1)(x+2) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow x^3+2x^2-2x^2-4x+x+2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow x^3-3x+2 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow x^3-3x+2+3x \geq 0+3x && \text{(Propiedad } (\star)) \\
&\Leftrightarrow x^3+2 \geq 3x \\
&\Leftrightarrow x^2+\frac{2}{x} \geq 3.\blacksquare && \text{(Propiedad } (*))
\end{aligned}$$

Demostración en la que se ocuparon las siguientes propiedades:

$(\star)$ $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R},\ x \geq y \Rightarrow x+a \geq y+a$

$(*)$ $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall a > 0,\ x \geq y \Rightarrow \frac{x}{a} \geq \frac{y}{a}$

ii) Lo encontrado en la parte anterior vale $\forall x > 0$, consideremos entonces x de la forma $x = \frac{a}{b}$, con $a, b > 0$. Reemplazando, obtenemos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{2}{\frac{a}{b}} \geq 3 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{a^2}{b^2} + 2\frac{b}{a} \geq 3 \qquad\qquad // \cdot ab^2 > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad a^3 + 2b^3 \geq 3ab^2. \blacksquare \end{aligned}$$

P2. **(a)** Sea A el conjunto solución de la inecuación $|x| \leq |x-1|$ y sea B el conjunto solución de la inecuación $|4x-2| > x(1-2x)$.

i) Resuelva las inecuaciones, esto es, determine A y B.

ii) Calcule $A \cup B$, $A \cap B$.

(b) Resuelva la inecuación:

$$\frac{|x-2| + |2x+11|}{(x-2)|x + |x-2||} < \frac{1}{2}.$$

(c) Encuentre el conjunto solución de la inecuación

$$|x^2 + 3x| + x|x+3| + x^2 \geq 7 + |1 + x^2|.$$

(d) Encuentre el conjunto solución de la siguiente inecuación

$$\frac{|x^2 - 2x + 1|}{|x^2 - 3x + 2|} \leq 1.$$

(e) Encuentre el conjunto solución de la inecuación

$$|x^2 - 2x| + x|x+3| \geq 3.$$

Solución:

(a) **i)** Comencemos buscando A, notemos que los puntos críticos de esta inecuación son $x = 0$ y $x = 1$. Siendo así, consideremos los siguientes intervalos, y estudiemos la inecuación en cada uno de ellos:

- $x \in (-\infty, 0]$

$$\begin{aligned} |x| \leq |x-1| \quad &\Leftrightarrow \quad -x \leq -x + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución de la inecuación en este intervalo es el conjunto definido por $A_1 = \mathbb{R} \cap (-\infty, 0] = (-\infty, 0]$.

- $x \in (0, 1]$

$$\begin{aligned} |x| \leq |x-1| \quad &\Leftrightarrow \quad x \leq -x + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Lo que implica que aquí, la solución es $A_2 = (-\infty, \frac{1}{2}] \cap (0, 1] = (0, \frac{1}{2}]$

- $x \in (1, \infty)$

$$\begin{aligned} |x| \leq |x-1| \quad &\Leftrightarrow \quad x \leq x - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad 0 \leq -1 \end{aligned}$$

Lo que tiene como conjunto solución a $A_3 = \phi \cap (1, \infty) = \phi$

Finalmente, la solución global de la inecuación es $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = (-\infty, \frac{1}{2}]$.

Buscando ahora al conjunto B, comencemos notando que el único punto crítico de la inecuación es $x = \frac{1}{2}$. Así, separemos el estudio en los siguientes intervalos:

- $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$

$$\begin{aligned} |4x-2| > x(1-2x) &\Leftrightarrow 2-4x > x(1-2x) \\ &\Leftrightarrow 2(1-2x) > x(1-2x) \\ &\Leftrightarrow 2 > x \end{aligned}$$

  Donde el último paso es válido, ya que $1-2x > 0$ en el intervalo estudiado. Así, la solución encontrada es $B_1 = (-\infty, 2) \cap (-\infty, \frac{1}{2}) = (-\infty, \frac{1}{2})$.

- $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$

$$\begin{aligned} |4x-2| > x(1-2x) &\Leftrightarrow 4x-2 > x(1-2x) \\ &\Leftrightarrow 2(2x-1) > x(1-2x) \\ &\Leftrightarrow 2(2x-1) > -x(2x-1) \\ &\Leftrightarrow 2 > -x \\ &\Leftrightarrow -2 < x \end{aligned}$$

  Notar que $2x-1 > 0$ en este intervalo, por lo que pudimos cancelar el término sin dar vuelta la desigualdad. Así, obtenemos $B_2 = (-2, \infty) \cap (\frac{1}{2}, \infty) = (\frac{1}{2}, \infty)$.
  Descartamos la posibilidad $x = \frac{1}{2}$, ya que de ser así, obtendríamos $0 > 0$, lo que jamás es cierto. Se concluye que $B = B_1 \cup B_2 = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

ii) Directamente, tenemos:

$$\begin{aligned} A \cup B &= (-\infty, \frac{1}{2}] \cup \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} = \mathbb{R}. \\ A \cap B &= (-\infty, \frac{1}{2}] \cap \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} = (-\infty, \frac{1}{2}). \end{aligned}$$

(b) Comencemos reduciendo el problema, dejando sólo una fracción:

$$\begin{aligned} \frac{|x-2|+|2x+11|}{(x-2)|x+|x-2||} < \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{|x-2|+|2x+11|}{(x-2)|x+|x-2||} - \frac{1}{2} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2|x-2|+2|2x+11|-(x-2)|x+|x-2||}{2(x-2)|x+|x-2||} < 0 \end{aligned}$$

Notemos ahora que los puntos críticos de la inecuación son $x = 2$, $x = \frac{-11}{2}$. Siendo así, estudiémosla en los siguientes intervalos:

- $x \in (-\infty, \frac{-11}{2})$

$$\begin{aligned} \frac{|x-2|+|2x+11|}{(x-2)|x+|x-2||} < \frac{1}{2} &\Leftrightarrow \frac{2(2-x)+2(-2x-11)-(x-2)|x+2-x|}{2(x-2)|x-x+2|} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4-2x-4x-22+4-2x}{4x-8} < 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-8x-14}{4x-8} < 0 \\ &\Leftrightarrow -8x-14 > 0 \\ &\Leftrightarrow x < \frac{-7}{4} \end{aligned}$$

  Donde se impuso que el numerador fuera positivo, ya que el denominador es siempre negativo en el intervalo estudiado.
  Se concluye que la solución aquí es $S_1 = (-\infty, \frac{-7}{4}) \cap (-\infty, \frac{-11}{2}) = (-\infty, \frac{-11}{2})$.

- $x \in (\frac{-11}{2}, 2)$

$$\begin{aligned}
\frac{|x-2|+|2x+11|}{(x-2)|x+|x-2||} < \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2(2-x)+2(2x+11)-(x-2)|x-x+2|}{2(x-2)|x-x+2||} < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{4-2x+4x+22+4-2x}{4x-8} < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{30}{4x-8} < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 30 > 0
\end{aligned}$$

De donde concluimos que $S_2 = \mathbb{R} \cap (\frac{-11}{2}, 2) = (\frac{-11}{2}, 2)$.

- $x \in (2, \infty)$

$$\begin{aligned}
\frac{|x-2|+|2x+11|}{(x-2)|x+|x-2||} < \frac{1}{2} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{2(x-2)+2(2x+11)-(x-2)(2x-2)}{2(x-2)(2x-2)} < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{2x-4+4x+22-2x^2+2x+4x-4}{4(x-2)(x-1)} < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad -2x^2+12x+22 < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2-6x-7 > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x-7)(x+1) > 0
\end{aligned}$$

De donde se concluye que $S_3 = [(-\infty, -1) \cup (7, \infty)] \cap (2, \infty) = (7, \infty)$.
Notemos que $x = 2$ indefine la fracción, por lo que no puede ser incluido en la solución final, y tenemos el caso contrario para $x = \frac{-11}{2}$ (ejercicio para el lector verificarlo).

Así, la solución global es $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \{\frac{-11}{2}\} = (-\infty, 2) \cup (7, \infty)$.

(c) Al ver la inecuación propuesta, notamos que $|1+x^2| = 1+x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Así, obtenemos:

$$\begin{aligned}
|x^2+3x|+x|x+3|+x^2 \geq 7+|1+x^2| \quad &\Leftrightarrow \quad |x^2+3x|+x|x+3|+x^2 \geq 7+1+x^2 \\
&\Leftrightarrow \quad |x^2+3x|+x|x+3| \geq 8 \\
&\Leftrightarrow \quad |x||x+3|+x|x+3| \geq 8 \\
&\Leftrightarrow \quad (|x|+x)|x+3| \geq 8
\end{aligned}$$

Inecuación que tiene como puntos críticos a $x = 0$, $x = -3$.

- $x \in (-\infty, -3)$

$$(|x|+x)|x+3| \geq 8 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \geq 8$$

Lo que no tiene solución en este intervalo, vale decir, $S_1 = \phi \cap (-\infty, -3) = \phi$.

- $x \in (-3, 0)$

$$(|x|+x)|x+3| \geq 8 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \geq 8$$

Lo que tampoco tiene solución, vale decir, $S_2 = \phi \cap (-3, 0) = \phi$.

- $x \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned}
(|x|+x)|x+3| \geq 8 \quad &\Leftrightarrow \quad 2x(x+3) \geq 8 \\
&\Leftrightarrow \quad 2x^2+6x-8 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad x^2+3x-4 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x+4)(x-1) \geq 0
\end{aligned}$$

Intervalo en el que sí encontramos solución, y es $S_3 = \{(-\infty, -4] \cup [1, \infty)\} \cap (0, \infty) = [1, \infty)$.

De esta forma, y verificando que ningún punto crítico puede ser incluido, se concluye que $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = [1, \infty)$.

(d) Reescribamos la inecuación planteada, de la siguiente forma:

$$\frac{|x^2-2x+1|}{|x^2-3x+2|} \le 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|x-1||x-1|}{|x-1||x-2|} \le 1$$

Escrito así, podemos concluir en forma automática que x debe ser distinto de 1 y de 2, por lo que podemos simplificar la expresión, y concluir que nuestro problema es equivalente a:

$$|x-1| \le |x-2|,$$

inecuación que tiene como puntos críticos a $x = 1$ y $x = 2$. Realizando el análisis ya conocido:

- $x \in (-\infty, 1)$

$$\begin{aligned} |x-1| \le |x-2| \quad &\Leftrightarrow \quad 1-x \le 2-x \\ &\Leftrightarrow \quad 1 \le 2 \end{aligned}$$

  Obtenemos que el conjunto solución es $S_1 = \mathbb{R} \cap (-\infty, 1) = (-\infty, 1)$.

- $x \in (1, 2)$

$$\begin{aligned} |x-1| \le |x-2| \quad &\Leftrightarrow \quad x-1 \le 2-x \\ &\Leftrightarrow \quad 2x \le 3 \\ &\Leftrightarrow \quad x \le \frac{3}{2} \end{aligned}$$

  Aquí, las soluciones están en $S_2 = (-\infty, \frac{3}{2}] \cap (1, 2) = (1, \frac{3}{2}]$.

- $x \in (2, \infty)$

$$\begin{aligned} |x-1| \le |x-2| \quad &\Leftrightarrow \quad x-1 \le x-2 \\ &\Leftrightarrow \quad -1 \le -2 \end{aligned}$$

  Se concluye que $S_3 = \phi \cap (2, \infty) = \phi$.

Finalmente, como ya fueron descartados los puntos críticos, $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = (-\infty, \frac{3}{2}] \setminus \{1\}$.

(e) Reescribamos la inecuación de la siguiente forma:

$$|x^2 - 2x| + x|x+3| \ge 3 \Leftrightarrow |x||x-2| + x|x+3| \ge 3.$$

Así, observamos que los puntos críticos son $x = -3$, $x = 0$ y $x = 2$. Aplicando el método conocido para resolver:

- $x \in (-\infty, -3)$

$$\begin{aligned} |x||x-2| + x|x+3| \ge 3 \quad &\Leftrightarrow \quad -x(2-x) + x(-x-3) \ge 3 \\ &\Leftrightarrow \quad -2x + x^2 - x^2 - 3x \ge 3 \\ &\Leftrightarrow \quad -5x \ge 3 \\ &\Leftrightarrow \quad x \le -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

  Así, $S_1 = (-\infty, -\frac{3}{5}] \cap (-\infty, -3) = (-\infty, -3)$.

- $x \in (-3, 0)$

$$\begin{aligned} |x||x-2| + x|x+3| \ge 3 \quad &\Leftrightarrow \quad -x(2-x) + x(x+3) \ge 3 \\ &\Leftrightarrow \quad -2x + x^2 + x^2 + 3x \ge 3 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x^2 + x - 3 \ge 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 2(x + \frac{3}{2})(x-1) \ge 0 \end{aligned}$$

  De esta forma, el conjunto solución es $S_2 = \{(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [1, \infty)\} \cap (-3, 0) = (-3, -\frac{3}{2}]$.

- $x \in (0,2)$

$$\begin{aligned} |x||x-2| + x|x+3| \geq 3 &\Leftrightarrow x(2-x) + x(x+3) \geq 3 \\ &\Leftrightarrow 2x - x^2 + x^2 + 3x \geq 3 \\ &\Leftrightarrow 5x \geq 3 \\ &\Leftrightarrow x \geq \frac{3}{5} \end{aligned}$$

  Concluimos que $S_3 = [\frac{3}{5}, \infty) \cap (0,2) = [\frac{3}{5}, 2)$.

- $x \in (2, \infty)$

$$\begin{aligned} |x||x-2| + x|x+3| \geq 3 &\Leftrightarrow x(x-2) + x(x+3) \geq 3 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + x^2 + 3x \geq 3 \\ &\Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow 2(x + \frac{3}{2})(x-1) \geq 0 \end{aligned}$$

  Llegando así, a $S_4 = \{(-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [1, \infty)\} \cap (2, \infty) = (2, \infty)$.

Analizando los puntos críticos de forma separada, notamos que debemos agregar a las soluciones los valores $x = -3$ y $x = 2$, obteniendo la solución global:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup \{-3, 2\} = (-\infty, -\frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{5}, \infty).$$