Mix

Álgebra / Cálculo

Hola :)

Estamos enviando el link

Partimos en breve

busque café, te o mate mientras.

Algebra I

Prop → Probar $\forall n \in \mathbb{N}$

- Igualdad (divisibilidad)
- Desigualdad
- Recurrencia

↓ Dificultad

} Inducción

Inducción Fuerte

Inducción (Asumo para algún n), Inducción fuerte (Asumo que todos antes de n l lo cumplen)

PDQ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ $13^n - 6^n$ divisible por 7

$\Leftrightarrow$ $13^n - 6^n = 7k,\ k \in \mathbb{Z}$

CB $n = 1$ / $13^1 - 6^1 = 7 = 7 \cdot 1$

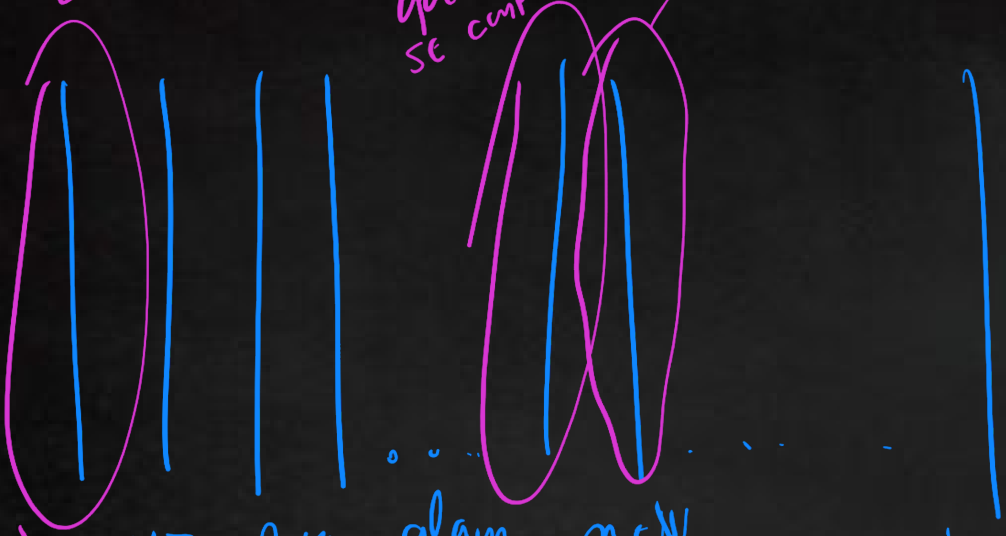
$\boxed{13 = 7 + 6}$ $1 \in \mathbb{Z}$ ✓

HI Asumo sin pérdida de generalidad que algún $n \in \mathbb{N}$ arbitrario cumple

Palabras mágicas

$13^n - 6^n = 7l,\ l \in \mathbb{Z}$

Asumo que se cumple $n \Rightarrow n+1$



Inducción HI: para algún $n \in \mathbb{N}$ se cumple

HI: $\forall m \leq k$ se cumple lo pedido

Inducción fuerte $\rightarrow$ recurrencias. $\forall k \leq n$

$$a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$$

$\underline{HI}$ ✓

$\underline{PI}$ $\underline{PDQ}$ $13^{n+1} - 6^{n+1} = 7\bar{l}, \bar{l} \in \mathbb{Z}$

Dónde está la hipotesis inductiva

$$13^{n+1} - 6^{n+1}$$

$$= 13^n \cdot 13 - 6^n \cdot 6$$

$$= 13^n(6+7) - 6^n \cdot 6$$

$$= 13^n \cdot 6 + 7 \cdot 13^n - 6^n \cdot 6$$

$$= 6(\underbrace{13^n - 6^n}_{HI}) + 7 \cdot 13^n$$

$13^n - 6^n = 7l$

$$= 6 \cdot 7l + 7 \cdot 13^n = 7(\underbrace{6l + 13^n}_{\bar{l} \in \mathbb{Z}})$$ ✓

$$= 13^{n+1} - 6^{n+1} = 7\bar{l}, \text{ spg}$$

Por PPI se tiene para todo $n \geq 1$, natural.

Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Inducción Igualdad

desigualdad |

$\forall n \quad 13^n - 6^n = 7l, \ l \in \mathbb{Z}$

$13^{n+1} - 6^{n+1} = 7\bar{l} \quad \bar{l} \in \mathbb{Z}.$

PDQ| Para a entero

$\Rightarrow$ → Directo
→ contrarrecíproca
→ contradicción.

Si $3a^2+1$ par $\Rightarrow a$ es impar

Si $3a^2+1 = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow a = 2j+1$, $j \in \mathbb{Z}$

Lo contrario a lo que quiero llegar.

→ Supongo a par

$a = 2\bar{j}, \ \bar{j} \in \mathbb{Z}$

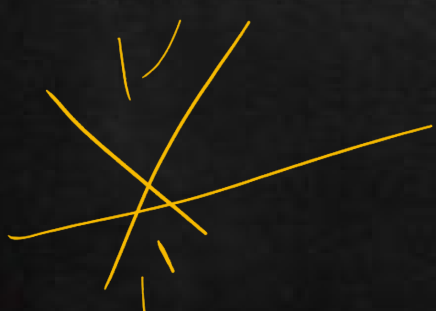
reemplacemos

$3a^2 + 1 =$

$3 \cdot (2\bar{j})^2 + 1 =$

$3 \cdot 4\bar{j}^2 + 1 =$

$2 \cdot (\underbrace{3 \cdot 2\bar{j}^2}_{\in \mathbb{Z}}) + 1 =$ IMPAR

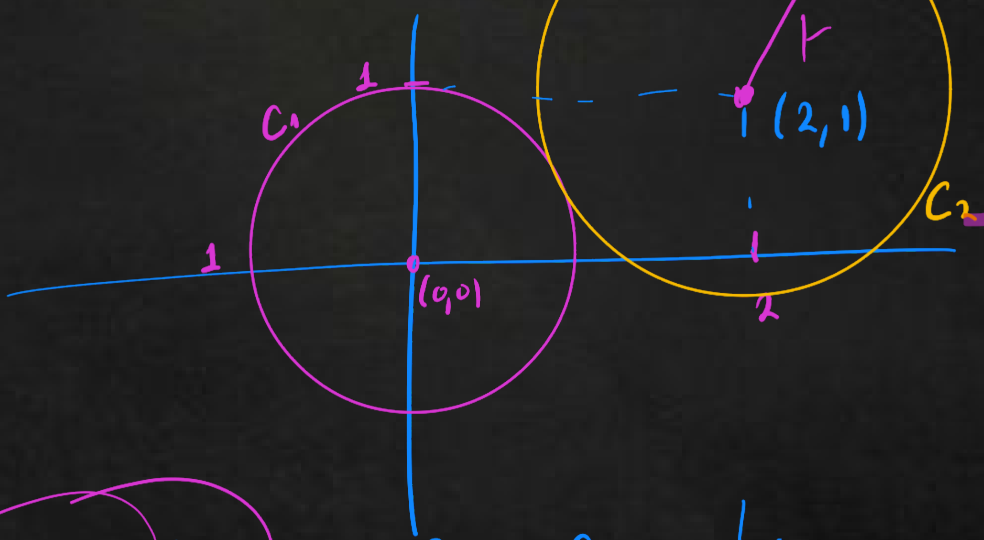


$12\bar{j}^2 + 1 =$ Impar

$\therefore$ a no puede ser par, Así que solo le queda ser impar //

Cálculo

a) (3.0 ptos) Considere dos circunferencias, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. La primera tiene su centro en el origen y un radio de 1, mientras que la segunda tiene su centro en $(2,1)$ y un radio de r. Demuestre que si $1+r=\sqrt{5}$, entonces $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ tienen exactamente un punto de intersección.



$1+r=\sqrt{5}$

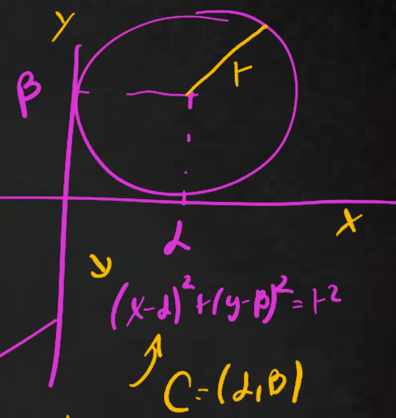
$\boxed{r=\sqrt{5}-1}$

Si $1+r=\sqrt{5} \Rightarrow C_1$ y C_2 tienen un punto de intersección.

fcfm Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

$\rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r_1^2$

$C((0,0), r=1)$



$C_1: (x-0)^2+(y-0)^2=1^2$

① $C_1: \cancel{x^2}+\cancel{y^2}=1^2$

$C_2: (x-2)^2+(y-1)^2=r^2$

② $C_2: \cancel{x^2}-4x+4+\cancel{y^2}-2y+1=r^2$

$C_2 - C_1$

$$-4x+4-2y+1=r^2-1$$

$$-4x+5-2y=r^2-1$$

$$-4x+5+1-r^2=2y$$

$$-4x+6-r^2=2y \quad / \tfrac{1}{2}$$

$$\rightarrow \boxed{-2x+3-\frac{r^2}{2}=y}$$

Enunciado

$r=\sqrt{5}-1$

$r^2=(\sqrt{5}-1)^2$

$r^2=5-2\sqrt{5}\cdot 1+1$

$r^2=2(3-\sqrt{5})$

fcfm Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

$$y = -2x + 3 - \frac{t^2}{2}$$

$$y = -2x + 3 - \frac{\cancel{2}(3-\sqrt{5})}{\cancel{2}}$$ reemplazo t^2

$$y = -2x + \cancel{3} - \cancel{3} + \sqrt{5}$$

$$\boxed{y = -2x + \sqrt{5}}$$ condición de $C_1 \wedge C_2$

$$C_1 : \boxed{x^2 + y^2 = 1}$$

$$x^2 + (-2x + \sqrt{5})^2 = 1$$

$$x^2 + 4x^2 - 4x\sqrt{5} + 5 = 1$$

$$\boxed{5x^2 - 4x\sqrt{5} + 4 = 0}$$ ← condición reemplazada en C_1

hola soy una cuadrática

tiene única solución

la intersección tiene única solución.

Una cuadrática tiene única solución si $\Delta = 0$, $\Delta = b^2 - 4ac$, $a = 5$, $b = -4\sqrt{5}$, $c = 4$

$\Delta = (-4\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4 = 16 \cdot 5 - 4 \cdot 5 \cdot 4$

$\Delta = b^2 - 4 \cdot ac = 80 - 80 = 0$

Como $\Delta = 0 \Rightarrow$ cuadrática tiene una sola solución

$\Rightarrow$ C_1 y C_2 se intersectan en un solo punto

Álgebra PDQ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)$ multiplo de 6, PDQ $n(n+1)(n+2) = 6 \cdot l$, $l \in \mathbb{Z}$

CB $n = 0$, $0 \cdot (0+1)(0+2) = 0 = 6 \cdot 0$

$l = 0 \in \mathbb{Z}$

HI Asumo sin perdida de generalidad que $n(n+1)(n+2) = 6l$, $l \in \mathbb{Z}$ para algún n natural arbitrario } Importante

PDQ $(n+1)(n+2)(n+3) = 6\bar{l}$, $\bar{l} \in \mathbb{Z}$

$$[(n+1)(n+2)](n+3)$$
$$=\underbrace{(n+1)(n+2)\cdot n}_{HI}+3(n+1)(n+2)$$
$$=6l+3\cdot(n+1)(n+2)$$
$\rightarrow n\in\mathbb{N}$

$\rightarrow l\in\mathbb{N}$

$\tilde{l}\in\mathbb{Z}$

$$=6l+3\cdot 2k$$
$$=6l+6k=6\underbrace{(l+k)}_{\tilde{l}}$$
$l,k\in\mathbb{Z}$

Demostraremos $\forall n\in\mathbb{N}$ $n(n+1)(n+2)$ es multiplo de 6.

PDQ $\forall n\in\mathbb{N}$, $(n+1)(n+2)=2k$, $k\in\mathbb{Z}$

CB $n=0$, $(0+1)(0+2)=2\cdot 1$ $1\in\mathbb{Z}$ ✓

HI (SPG) Sin Perdida de generalidad Asumo que algun $n\in\mathbb{N}$ arbitrario cumple. $(n+1)(n+2)=2k$, $k\in\mathbb{Z}$ } HI

PI Veamos que $(n+2)(n+3)=2\bar{k}$ $\bar{k}\in\mathbb{Z}$

$$(n+2)((n+1)+2)$$
$$=\underbrace{(n+2)(n+1)}_{HI}+(n+2)\cdot 2$$
$$=2\cdot k+(n+2)\cdot 2=2\cdot\overbrace{(k+n+2)}^{\bar{k}\in\mathbb{Z}}\Rightarrow$$

Como PPI

Probamos que

Con la HI si $(n+1)(n+2)=2k$

$\Rightarrow(n+2)(n+3)=2\bar{k}$, $k,\bar{k}\in\mathbb{Z}$

Por inducción

Probamos $\forall n\in\mathbb{N}$, $(n+1)(n+2)$ Es Par, pues n natural arbitrario

Premio manquecque

+ gorro FCFM.

+ Historia (zoom fondo) + etiquetartme

@pato_aux_calcesis

22:32 volvemos + tarde

Resolver $|x^2-2x| + x|x+3| \geq 3$

→ Tirar todo a un lado

→ tabla orden (valor absoluto)

→ $\frac{P(x)}{Q(x)}$ ≤ 0, ≥ 0, < 0, > 0 tabla signo

- multiplicar cosas a ambos lados (mejor pasar todo a un lado sumando / restando)
- sacarlo al gio
- Comparar con algo distinto de 0.

1) $a \cdot b \geq 0$ ← tabla signo

2) $a \cdot b > \sqrt{5}$

$\rightarrow |x^2-2x| + x|x+3| \geq 3$

① $|x^2-2x| + x|x+3| - 3 \geq 0$

② tabla de orden (cambis de signo de los valos absolutos)

$|a \cdot b| = |a||b|$

$|x(x-2)| + x|x+3| - 3 \geq 0$

$\Leftrightarrow \boxed{|x||x-2| + x|x+3| - 3 \geq 0}$

tabla de orden

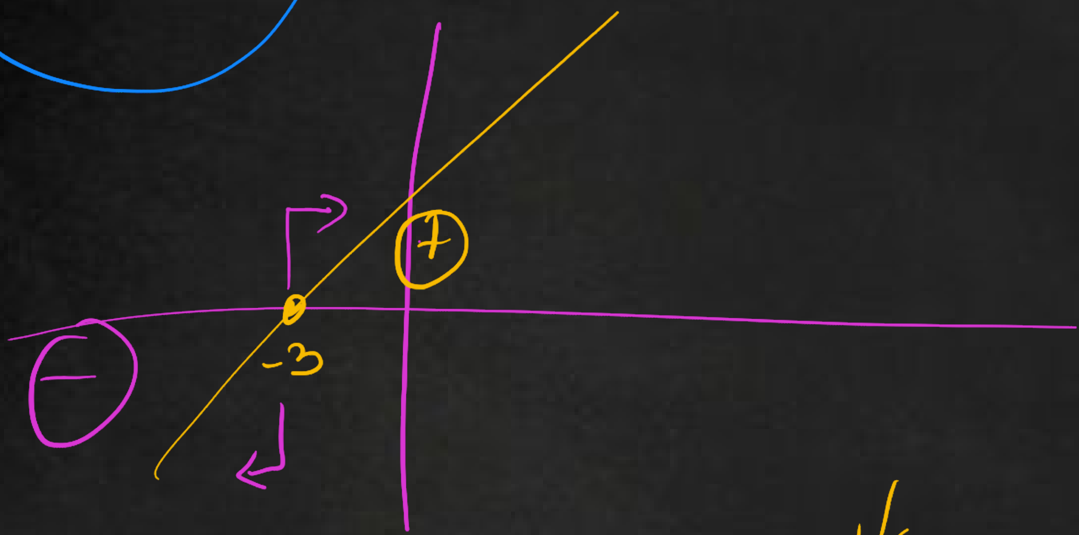
Cambios de signo de los valores absolutos

1) $x = 0 \Rightarrow x = 0$

2) $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

3) $x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3$

$-\infty$ -3	-3 0	0 2	2 $+\infty$
$\lvert x\rvert = -x$	$\lvert x\rvert = -x$	$\lvert x\rvert = x$	$\lvert x\rvert = x$
$\lvert x-2\rvert = -(x-2) = -x+2$	$\lvert x-2\rvert = -x+2$	$\lvert x-2\rvert = -x+2$	$\lvert x-2\rvert = x-2$
$\lvert x+3\rvert = -x-3$	$\lvert x+3\rvert = x+3$	$\lvert x+3\rvert = x+3$	$\lvert x+3\rvert = x+3$



$$|x||x-2| + x|x+3| - 3 \geq 0$$

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ CASOS

$-\infty \qquad -3 \qquad 0 \qquad 2 \qquad +\infty$

	$(-\infty,-3]$	$(-3,0]$	$(0,2]$	$(2,+\infty)$
$\lvert x\rvert$	$\lvert x\rvert=-x$	$\lvert x\rvert=-x$	$\lvert x\rvert=x$	$\lvert x\rvert=x$
$\lvert x-2\rvert$	$\lvert x-2\rvert \overset{=-(x-2)}{=} -x+2$	$\lvert x-2\rvert=-x+2$	$\lvert x-2\rvert=-x+2$	$\lvert x-2\rvert=x-2$
$\lvert x+3\rvert$	$\lvert x+3\rvert=-x-3$	$\lvert x+3\rvert=x+3$	$\lvert x+3\rvert=x+3$	$\lvert x+3\rvert=x+3$

Caso 1, $\forall x \in (-\infty,-3]$

Caso 2, $\forall x \in (-3,0]$

Caso 3 $\forall x \in (0,2]$

Caso 4 $\forall x \in (2,+\infty)$

Caso $\forall x \in (-\infty,-3]$

$$\rightarrow \lvert x\rvert\lvert x-2\rvert + x\lvert x+3\rvert - 3 \geq 0$$

$$\rightarrow (-x)(-x+2) + x(-x-3) - 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x^2} - 2x - \cancel{x^2} - 3x - 3 \geq 0$$

$$\rightarrow -5x - 3 \geq 0$$

fcfm Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

$-\infty \qquad -3$

$|x| = -x$

$|x-2| = -(x-2) = -x+2$

$|x+3| = -x-3$

$-3 \geq 5x$

$-\frac{3}{5} \geq x$

$$S_1 = \left(-\infty, -\frac{3}{5}\right]$$

$$S_{F_1} = (-\infty, -3] \cap S_1$$
$$= (-\infty, -3] \cap \left(-\infty, -\frac{3}{5}\right]$$
$$= (-\infty, -3]$$

$$S_{F_1} = (-\infty, -3]$$

Caso 2 | $\forall x \in [-3, 0]$

$$|x||x-2| + x|x+3| - 3 \geq 0$$

$$(-x)(-x+2) + x(x+3) - 3 \geq 0$$

$$x^2 - 2x + x^2 + 3x - 3 \geq 0$$

$$2x^2 + x - 3 \geq 0 \quad / \tfrac{1}{2}$$

$$\rightarrow x^2 + \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \geq 0$$

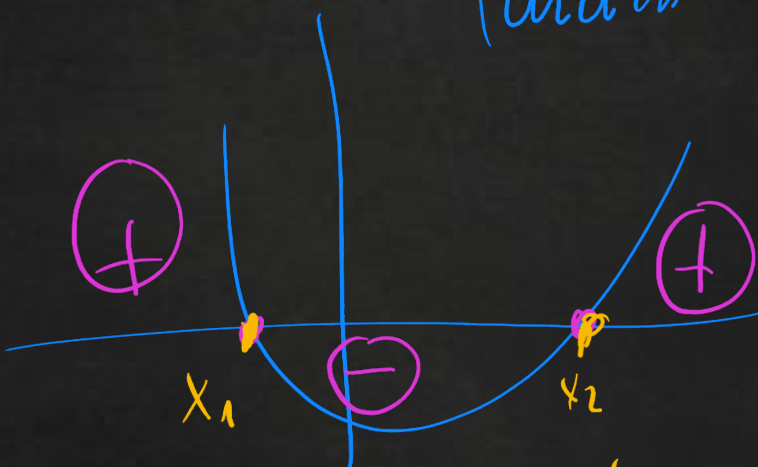
función cuadrática

$-3 \quad 0$

$|x| = -x$

$|x-2| = -x+2$

$|x+3| = x+3$



ax^2+bx+c , $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = -\frac{3}{2}$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)}}{2 \cdot 1}$$

$$= -\frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{4} + 6}}{2}$$

$$= \frac{-\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{6\cdot 4}{4}}}{2}$$

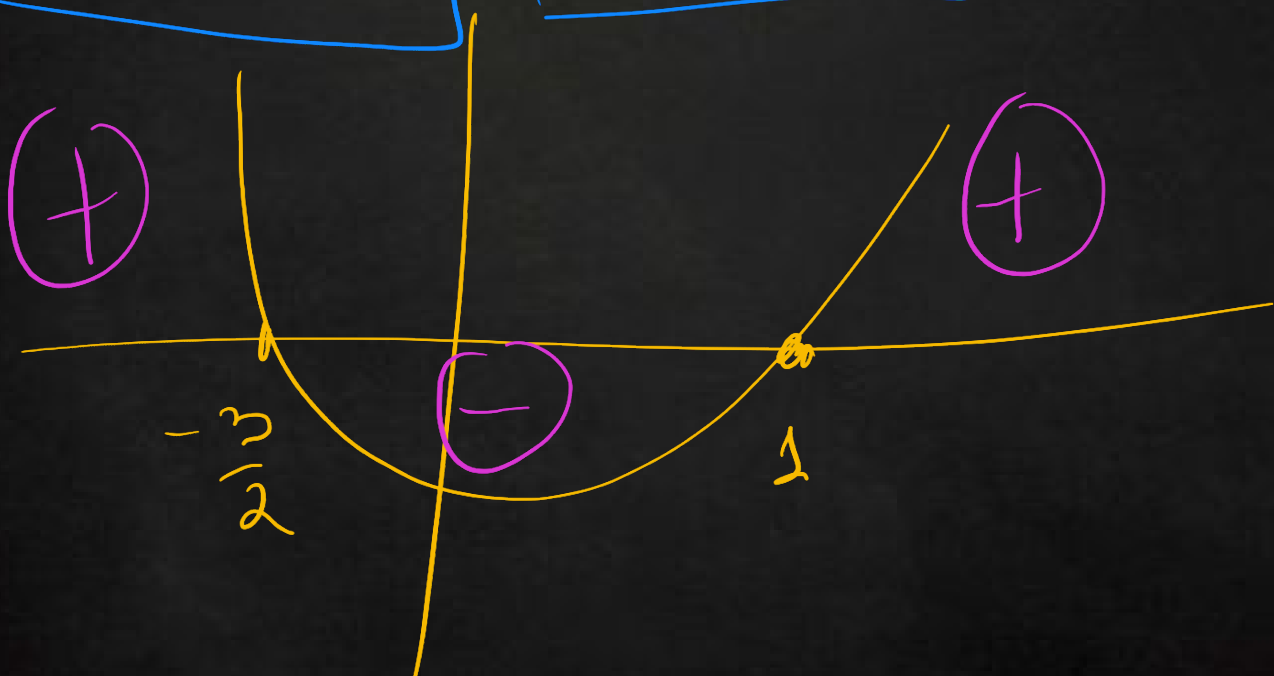
$$= \frac{-\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}}{2} = -\frac{1}{4} \pm \frac{5}{4}$$

$$x_1 = -\frac{1}{4} - \frac{5}{4} = \frac{-6}{4}$$

$$= \frac{-3}{2}$$

$$x_2 = -\frac{1}{4} + \frac{5}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\boxed{x_1 = \frac{-3}{2}} \qquad \boxed{x_2 = 1}$$



Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

$$S_2 = (-\infty, -\tfrac{3}{2}] \cup [1, +\infty)$$

$$S_{F2} = \underbrace{(-3, 0]} \cap \left((-\infty, -\tfrac{3}{2}] \cup [1, +\infty) \right)$$

$$SF_2 = (-3, -\tfrac{3}{2}] \leftarrow$$

Caso 3 | $\forall x \in (0, 2] \leftarrow$

$$|x||x-2| + x|x+3| - 3 \geq 0$$

$$x(-x+2) + x(x+3) - 3 \geq 0 \qquad 0 \quad 2$$

$$-\cancel{x^2} + 2x + \cancel{x^2} + 3x - 3 \geq 0$$

$$|x| = x$$
$$|x-2| = -x+2$$
$$|x+3| = x+3$$

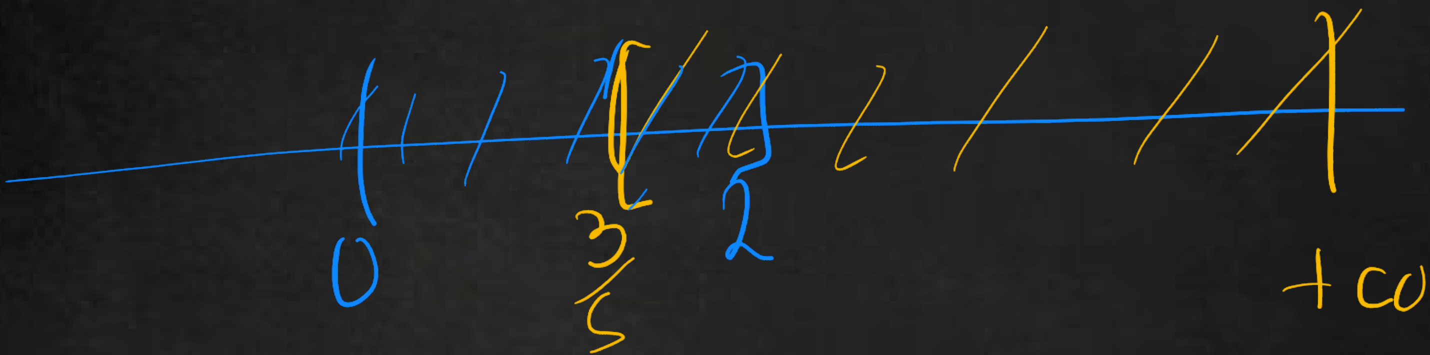
$$5x - 3 \geq 0$$

$$5x \geq 3$$

$$x \geq \frac{3}{5}$$

$$S_3 = \left[\frac{3}{5}, +\infty\right)$$

$$SF_3 = (0,2] \cap \left[\frac{3}{5}, +\infty\right) \leftarrow$$



$$SF_3 = \left[\frac{3}{5}, 2\right] \leftarrow$$

Caso 4 | $\forall x \in (2, +\infty)$ ←

$$|x||x-2| + x|x+3| - 3 \geq 0$$

$$x(x-2) + x\cdot(x+3) - 3 \geq 0$$

$$x^2 - 2x + x^2 + 3x - 3 \geq 0$$

$$2x^2 + x - 3 \geq 0$$

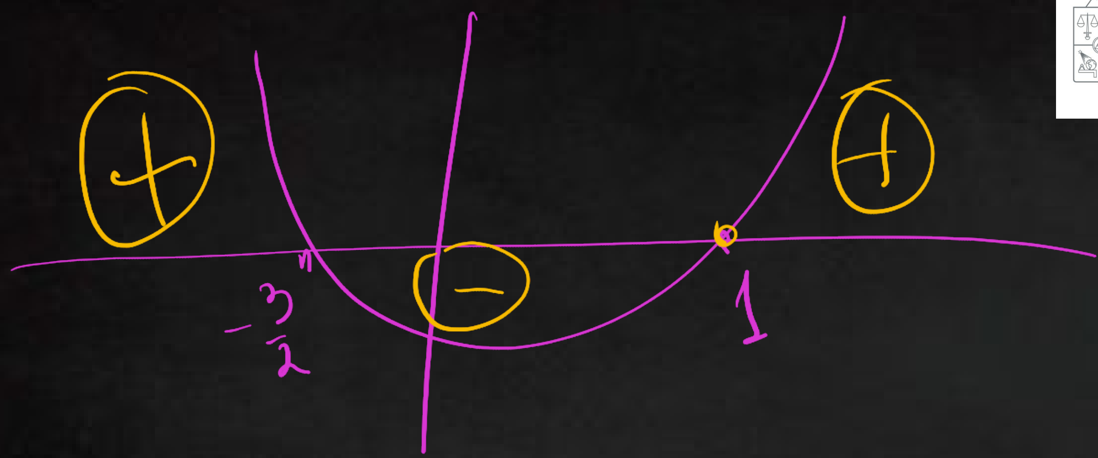
$$x^2 + \frac{x}{2} - \frac{3}{2} \geq 0$$

2 $+\infty$

$|x| = x$

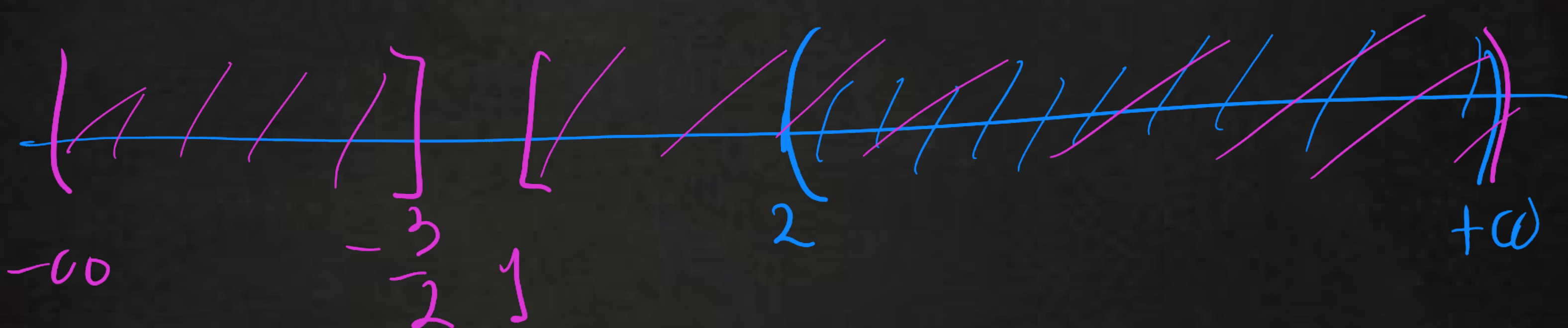
$|x-2| = x-2$

$|x+3| = x+3$



$$S_4 = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup [1, +\infty)$$

$$S_{F4} = \underline{(2, +\infty)} \cap \left(\underline{\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup [1, +\infty)}\right)$$



$$S_{F4} = (2, +\infty)$$

$$S_{FF} = S_{F1} \cup S_{F2} \cup S_{F3} \cup S_{F4}$$

$$= (-\infty, -3] \cup \left(-3, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{5}, 2\right] \cup (2, +\infty)$$

$$= \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{5}, +\infty\right)$$

Problema

$$\frac{|x-1|}{|x+2|} - 1 \geq 0 \quad / \; x \neq -2$$

tabla de orden

cual cambio signo val. abs

$x-1=0$ | $x+2=0$
$x=1$ | $x=-2$

tabla orden

$-\infty$	-2	1	$+\infty$
	$\lvert x-1\rvert = -x+1$	$\lvert x-1\rvert = -x+1$	$\lvert x-1\rvert = x-1$
	$\lvert x+2\rvert = -x-2$	$\lvert x+2\rvert = x+2$	$\lvert x+2\rvert = x+2$

Caso 1 $\forall x \in (-\infty, -2)$

Caso 2 $\forall x \in [-2, 1]$

Caso 3 $\forall x \in (1, +\infty)$

Caso 1 $\forall x \in (-\infty, -2)$

$$\frac{|x-1|}{|x+2|} - 1 \geq 0$$

$$\frac{-x+1}{-x-2} - 1 \geq 0$$

$$\frac{-x+1}{-x-2} - \frac{(-x-2)}{(-x-2)} \geq 0$$

$$\frac{-\cancel{x}+1+\cancel{x}+2}{-x-2} \geq 0$$

$P(x)\cdot Q(x) \geq 0$

$$\frac{3}{-x-2} \geq 0$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$$

tabla signo

$-x-2=0$

$\boxed{-2=x}$

	$-\infty$ ... -2	$+\infty$
3	$+$	$+$
$-x-2$	$+$	$-$
	$+$	$-$

$S_1 = (-\infty, -2)$

$S_{F_1} = (-\infty, -2) \cap S_1$

$S_{F_1} = (-\infty, -2)$

Caso 2) $\forall x \in (-2, 1]$

$-2 \qquad 1$

$|x-1| = -x+1$

$|x+2| = x+2$

$$\frac{|x-1|}{|x+2|} - 1 \geq 0$$

$$\frac{-x+1}{x+2} - 1 \geq 0$$

$$\frac{-x+1}{x+2} - \frac{x+2}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{-2x-1}{x+2} \geq 0$$

Cambio signo

$-2x-1 = 0$

$-1 = 2x$

$-\frac{1}{2} = x$

$x+2=0$

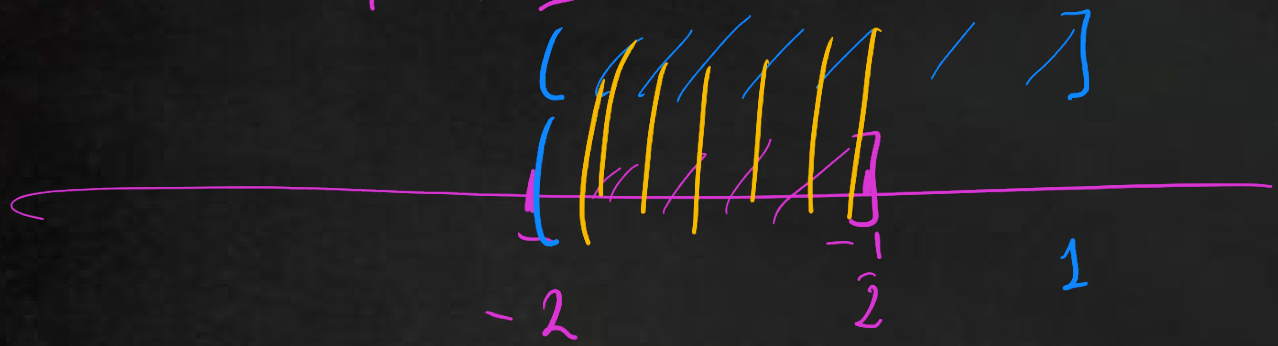
$x=-2$

tabla signo $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$

	$-\infty$ -2	-2 $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ $+\infty$
$-2x-1$	+	+	−
$x+2$	−	+	+
	−	+	−

$S_2 = [-2, -\frac{1}{2}]$

$SF_2 = (-2, -\frac{1}{2}] \cap [-2, 1]$



$SF_2 = (-2, -\frac{1}{2}]$

Caso 3| $\forall x \in (1, +\infty)$

$1 \qquad +\infty$

$|x-1| = x-1$

$|x+2| = x+2$

$$\frac{|x-1|}{|x+2|} - 1 \geq 0$$

$$\frac{x-1}{x+2} - 1 \geq 0$$

$$\frac{x-1}{x+2} - \frac{x+2}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{-3}{x+2} \geq 0$$

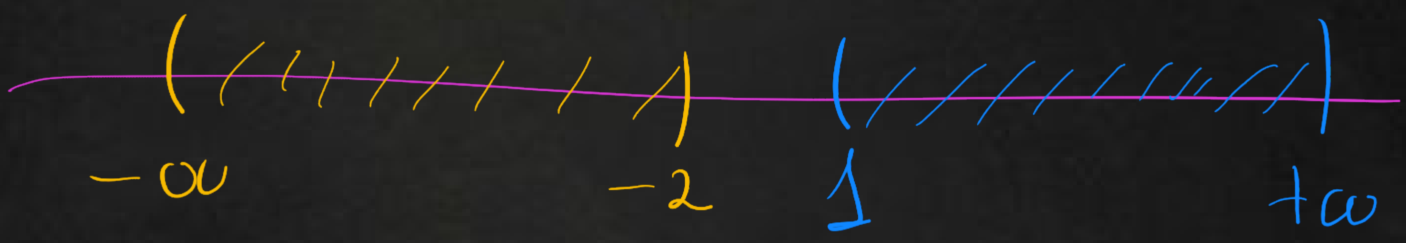
$\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ tabla signo

$x+2=0 \quad , \quad x=-2$

	$-\infty$	-2	$+\infty$
-3	$-$	$-$	
$x+2$	$-$	$+$	
	$+$	$-$	

$$S_3 = (-\infty, -2)$$

$$S_{F3} = (-\infty, -2) \cap (1, +\infty) = \emptyset$$



$$S_{FF} = S_{F1} \cup S_{F2} \cup S_{F3}$$

$$= (-\infty, -2) \cup \left(-2, -\tfrac{1}{2}\right] \cup \emptyset$$

$$S_{FF} = (-\infty, -2) \cup \left(-2, -\tfrac{1}{2}\right] \quad //$$

$$|x+1| < 1$$

$$\boxed{-1 < x+1 < 1}$$

CAE

Control 1

P1. *a)* (3.0 ptos) Sean a, b y c números reales positivos. Usando los axiomas y propiedades de cuerpo y de orden de los números reales pruebe que

$$8 \cdot a \cdot b \cdot c \leq (a+b) \cdot (a+c) \cdot (b+c)$$

Solución: Al expandir el lado derecho de la desigualdad tenemos:

$$\begin{aligned}
(a+b)\cdot(a+c)\cdot(b+c) &= ((a+b)\cdot(a+c))\cdot(b+c) && \text{(Asoc. }\cdot) \\
&= (a\cdot a + a\cdot c + b\cdot a + b\cdot c)\cdot(b+c) && \text{(Dist. }\cdot) \\
&= a\cdot a\cdot(b+c) + a\cdot c\cdot(b+c) + b\cdot a\cdot(b+c) + b\cdot c\cdot(b+c) && \text{(Dist. }\cdot) \\
&= a^2\cdot b + a^2\cdot c + c^2\cdot a + b^2\cdot a + b^2\cdot a + b^2\cdot c + c^2\cdot b + 2\cdot a\cdot b\cdot c
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado

1° la definición de a^2, b^2, c^2 y 2.
2° (Conm. $\cdot$), (Conm $+$), (Neutro $\cdot$) y (Dist. $\cdot$).

Ahora, usando (Conm. $+$) y (Dist. $\cdot$) vamos a obtener

$$(a+b)\cdot(a+c)\cdot(b+c) = (b^2+c^2)\cdot a + (a^2+c^2)\cdot b + (b^2+a^2)\cdot c + 2\cdot a\cdot b\cdot c \tag{1}$$

(1.5 pts)

Como

$$\begin{aligned}
b^2 + c^2 &\geq 2\cdot b\cdot c \\
a^2 + c^2 &\geq 2\cdot a\cdot c \\
b^2 + a^2 &\geq 2\cdot b\cdot a,
\end{aligned}$$

(0.5 pts)

incorporando las últimas desigualdades en (1), y teniendo en cuenta que a, b y c son números reales positivos, se deduce que

$$\begin{aligned}
(a+b)\cdot(a+c)\cdot(b+c) &\geq 2\cdot b\cdot c\cdot a + 2\cdot a\cdot c\cdot b + 2\cdot b\cdot a\cdot c + 2\cdot a\cdot b\cdot c \\
&= 2\cdot a\cdot b\cdot c + 2\cdot a\cdot b\cdot c + 2\cdot a\cdot b\cdot c + 2\cdot a\cdot b\cdot c \\
&= 8\cdot a\cdot b\cdot c,
\end{aligned}$$

que es lo que queríamos demostrar. **(1.0 pto)** *b)* (3.0 ptos) Resuelva la inecuación $|x^2 - 2x| + x|x + 3| \geq 3$.

Solución: Como en la inecuación aparecen las expresiones $|x^2 - 2x|$, $|x + 3|$, notamos que

i) $x^2 - 2x \geq 0$ si y sólo si $x \leq 0 \vee x \geq 2$.
En efecto,

$$x^2 - 2x \geq 0 \iff x(x - 2) \geq 0.$$

Y esto ocurre cuando

$$(x \geq 0 \quad \wedge \quad x - 2 \geq 0) \quad \vee \quad (x \leq 0 \quad \wedge \quad x - 2 \leq 0).$$

En el primer caso

$$x \geq 0 \quad \wedge \quad x \geq 2.$$

Es decir, en el primer caso vamos a tener que $x \in [2, +\infty)$. En el segundo caso,

$$x \leq 0 \quad \wedge \quad x \leq 2.$$

Es decir, en el segundo caso $x \in (-\infty, 0]$. En resumen, $x^2 - 2x \geq 0$ para

$$x \in (-\infty, 0] \cup [2, +\infty).$$

(0.4 pts)

ii) $x + 3 \geq 0$ si y sólo si $x \geq -3$.

Teniendo en cuenta la información precedente, el comportamiento de los dos módulos dependerá del rango en que se encuentra x, el cual está dado por:

	$x < -3$	$-3 \leq x \leq 0$	$0 < x < 2$	$x \geq 2$
$\|x^2 - 2x\|$	$x^2 - 2x$	$x^2 - 2x$	$2x - x^2$	$x^2 - 2x$
$\|x + 3\|$	$-x - 3$	$x + 3$	$x + 3$	$x + 3$

A continuación, separamos el análisis en los cuatro casos.

<u>Caso 1: $x < -3$.</u> En este caso $|x^2 - 2x| = x^2 - 2x$ y $|x + 3| = -x - 3$, por lo tanto la inecuación queda

$$x^2 - 2x + x(-x - 3) \geq 3,$$

o equivalentemente

$$x^2 - 2x - x^2 - 3x \geq 3.$$

Cancelando términos semejantes llegamos a la inecuación

$$-5x \geq 3,$$

es decir,

$$x \leq -\frac{3}{5}.$$

(0.4 pts)

Como la condición $x < -3$, es más restrictiva que la última condición, obtenemos el conjunto solución

$$(-\infty, -3)\,.$$

(0.2 pts)

<u>Caso 2: $-3 \leq x \leq 0$.</u> En este caso $|x^2 - 2x| = x^2 - 2x$ y $|x+3| = x+3$, por lo tanto la inecuación queda

$$x^2 - 2x + x(x+3) \geq 3.$$

Esto equivale a

$$2x^2 + x - 3 \geq 0 \iff (x-1)(2x+3) \geq 0,$$

(0.2 pts)

donde en el último paso hemos utilizado que

$$2x^2 + x - 3 = \frac{(2x)^2 + 2x - 6}{2} = \frac{(2x+3)(2x-2)}{2}.$$

Ahora,

$$(x-1)(2x+3) \geq 0 \iff (x-1 \geq 0 \;\;\wedge\;\; 2x+3 \geq 0) \;\;\vee\;\; (x-1 \leq 0 \;\;\wedge\;\; 2x+3 \leq 0).$$

En el primer caso

$$x \geq 1 \;\;\wedge\;\; x \geq -\frac{3}{2}.$$

Es decir, en el primer caso vamos a tener que $x \in [1, +\infty)$. En el segundo caso,

$$x \leq 1 \;\;\wedge\;\; x \leq -\frac{3}{2}.$$

Es decir, en el segundo caso $x \in (-\infty, -\frac{3}{2}]$. En resumen, $(x-1)(2x+3) \geq 0$ cuando

$$x \in (-\infty, -3/2] \cup [1, +\infty).$$

(0.2 pts)

Así, en este caso el conjunto solución es

$$[-3, 0] \cap ((-\infty, -3/2] \cup [1, +\infty)) = [-3, -3/2].$$

(0.2 pts)

<u>Caso 3: $0 < x < 2$.</u> En este caso $|x^2 - 2x| = 2x - x^2$ y $|x+3| = x+3$, por lo tanto la inecuación original queda

$$2x - x^2 + x(x+3) \geq 3,$$

o equivalentemente

$$2x - x^2 + x^2 + 3x \geq 3.$$

Cancelando términos semejantes llegamos a la inecuación

$$5x \geq 3,$$

esto es,

$$x \geq \frac{3}{5}.$$

(0.4 pts)

Luego, en este caso el conjunto solución es

$$(0,2) \cap [3/5, +\infty) = [3/5, 2).$$

(0.2 pts)

Caso 4: $x \geq 2$. En este caso $|x^2 - 2x| = x^2 - 2x$ y $|x+3| = x+3$, por lo tanto la inecuación queda

$$x^2 - 2x + x(x+3) \geq 3.$$

Cancelando términos semejantes llegamos a la inecuación

$$2x^2 + x - 3 \geq 0,$$

y por lo visto en el Caso 2, tenemos que

$$x \in (-\infty, -3/2] \cup [1, +\infty),$$

(0.2 pts).

Así, en este caso el conjunto solución es

$$[2, +\infty) \cap ((-\infty, -3/2] \cup [1, +\infty)) = [2, +\infty).$$

(0.2 pts)

Finalmente, el conjunto solución global es la unión de los conjuntos encontrados para cada caso, esto es

$$(-\infty, -3) \cup [-3, -3/2] \cup [3/5, 2) \cup [2, \infty) = (-\infty, -3/2] \cup [3/5, +\infty).$$

(0.4 pts)

P2. *a)* (3.0 ptos) Considere dos circunferencias, $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$. La primera tiene su centro en el origen y un radio de 1, mientras que la segunda tiene su centro en $(2,1)$ y un radio de r. Demuestre que si $1 + r = \sqrt{5}$, entonces $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ tienen exactamente un punto de intersección.

Solución: Un punto que debe cumplir ambas ecuaciones de las circunferencias es aquel que satisface las siguientes condiciones:

$$x^2 + y^2 = 1,$$
$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = r^2.$$

(0.4 pts)

Restando estas dos ecuaciones, obtenemos:

$$-4x + 4 - 2y + 1 = r^2 - 1.$$

De donde podemos despejar la variable y:

$$y = -2x + 3 - \frac{r^2}{2}.$$

(0.3 pts)

Dado que hemos establecido que $r = \sqrt{5} - 1$, podemos calcular r^2 como:

$$r^2 = (\sqrt{5} - 1)^2 = 5 - 2\sqrt{5} + 1 = 2(3 - \sqrt{5}).$$

Así, la ecuación de la recta en la que deben estar los puntos comunes a ambas circunferencias es:

$$y = -2x + \sqrt{5}.$$

(0.3 pts)

Notamos que de esta ecuación se deduce que, si dos puntos están en ambas circunferencias y tienen la misma coordenada x, entonces sus coordenadas y también son iguales. Además, podemos reemplazar esta última ecuación en la ecuación de $\mathcal{C}_1$:

$$x^2 + (-2x + \sqrt{5})^2 = 1.$$

(0.7 pts)

Simplificando la expresión anterior, obtenemos:

$$5x^2 - 4\sqrt{5}x + 4 = 0.$$

(0.3 pts)

Esta es una ecuación cuadrática que tiene una única solución si y solo si el discriminante (Δ) es igual a cero. El discriminante se calcula como:

$$\Delta = b^2 - 4ac,$$

donde $a = 5$, $b = -4\sqrt{5}$, y $c = 4$. Calculamos el discriminante:

$$\Delta = (-4\sqrt{5})^2 - 4 \cdot 5 \cdot 4 = 80 - 80 = 0.$$

(0.7 pts)

Por lo tanto, esta ecuación tiene una única solución. Esta solución corresponde a la abscisa x del punto en común de ambas circunferencias, y podemos determinar su ordenada y utilizando la ecuación de la recta $y = -2x + \sqrt{5}$. **(0.3 pts)**

b) (3.0 ptos) Un punto $P = (x, y)$ se mueve de modo que las pendientes de las rectas que lo unen a los puntos $A = (a, 0)$ y $A' = (-a, 0)$ tienen un producto constante negativo. Caracterice el lugar geométrico del punto P.

Solución: Sean $A = (a, 0)$, $A' = (-a, 0)$ los puntos dados y $P = (x, y)$ un punto del lugar geométrico. Entonces las rectas que unen el punto P con los puntos A y A' tienen pendientes

$$m_{\overrightarrow{PA}} = \frac{y - 0}{x - a} \quad \text{y} \quad m_{\overrightarrow{PA'}} = \frac{y - 0}{x + a}.$$

(0.7 pts)

Como el producto de las pendientes que conectan el punto $P = (x, y)$ con los puntos A y A' es una constante negativa, podemos expresar esta relación de la siguiente manera:

$$m_{\overrightarrow{PA}} \cdot m_{\overrightarrow{PA'}} = -c,$$

(0.8 pts)

donde c es una constante positiva. Así pues,

$$\left(\frac{y}{x-a}\right)\left(\frac{y}{x+a}\right) = -c \tag{2}$$

y al desarrollar el lado izquierdo de la igualdad anterior

$$\left(\frac{y}{x-a}\right)\left(\frac{y}{x+a}\right) = \frac{y^2}{x^2-a^2}.$$

Luego, incorporando esto en (2) podemos continuar simplificando esta expresión, obteniendo que

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{x^2-a^2} &= -c \\ y^2 &= -cx^2 + ca^2 \\ cx^2 + y^2 &= ca^2 \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{ca^2} &= 1. \end{aligned}$$

(1.0 pto)

En consecuencia, el lugar geométrico pedido es una elipse centrada en el origen $(0,0)$ y tiene como dos de sus vértices a los puntos A y A'. **(0.5 pts)**

P3. Considere la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \sqrt{1 - \dfrac{3}{x+2}}$.

a) (2.0 ptos) Determine el dominio y los ceros de f.

Solución: El dominio de esta función queda definido por

$$\begin{aligned} \operatorname{Dom}(f) &= \left\{ x \in \mathbb{R} \ \middle|\ 1 - \frac{3}{x+2} \geq 0 \wedge \frac{3}{x+2} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \ \middle|\ 1 - \frac{3}{x+2} \geq 0 \wedge x \neq -2 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} \ \middle|\ \frac{x-1}{x+2} \geq 0 \wedge x \neq -2 \right\}. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{x-1}{x+2} \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbf{1°})\ x-1 \geq 0 \ \wedge \ x+2>0 \quad \vee \quad \mathbf{2°})\ x-1 \leq 0 \ \wedge \ x+2<0,$$

en el primer caso, se tiene que

$$x \geq 1 \ \wedge \ x > -2.$$

Es decir, en el primer caso tenemos $x \in [1, +\infty)$. En el segundo caso

$$x \leq 1 \ \wedge \ x < -2.$$

Es decir, en el segundo caso tenemos $x \in (-\infty, -2)$. Por lo tanto

$$\operatorname{Dom}(f) = (-\infty, -2) \cup [1, +\infty).$$

(1.2 pts)

Los ceros de esta función corresponden a los elementos $x \in \mathrm{Dom}(f)$ tales que $f(x) = 0$. En este caso, se aprecia que

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{3}{x+2}} = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2} = 0.$$

Entonces, $x = 1$ es el único cero de la función. **(0.8 pts)**

b) (1.0 pto) Analice la paridad de esta función.

Solución: Sea $x \in \mathrm{Dom}(f)$. Entonces, $f(-x) = \sqrt{1 - \frac{3}{2-x}}$. Luego, $f(-x) = f(x)$ si y solo si

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{3}{2-x}} &= \sqrt{1 - \frac{3}{x+2}} \\ \frac{3}{2-x} &= \frac{3}{x+2} \end{aligned}$$

lo cual es cierto si y solo si $x = 0$. Como no se cumple en todo el dominio, entonces la función no puede ser par. **(0.6 pts)**

Análogamente, $f(-x) = -f(x)$ si y solo si

$$\begin{aligned} \sqrt{1 - \frac{3}{2-x}} &= -\sqrt{1 - \frac{3}{x+2}} \\ \sqrt{1 - \frac{3}{2-x}} + \sqrt{1 - \frac{3}{x+2}} &= 0. \end{aligned}$$

Como $\sqrt{1 - \frac{3}{2-x}}$ y $\sqrt{1 - \frac{3}{x+2}}$ son no negativas, su suma es 0 si y solo si ambas cantidades se anulan. Así,

$$f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{3}{2-x}} = \sqrt{1 - \frac{3}{x+2}} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \wedge x = -1$$

lo cual es una contradicción. Entonces, esta función no puede ser impar. **(0.4 pts)**

c) (1.0 pto) Determine los intervalos donde esta función es creciente o decreciente, según corresponda.

Solución: En primer lugar, la función es creciente en $(-\infty, -2)$. En efecto, sean $x, y \in (-\infty, -2)$, con $x < y$. Entonces,

$$\begin{aligned} x < y &\Leftrightarrow x + 2 < y + 2 < 0 \\ &\Leftrightarrow 0 < \frac{3}{y+2} < \frac{3}{x+2} \\ &\Leftrightarrow 0 < 1 - \frac{3}{x+2} < 1 - \frac{3}{y+2} \\ &\Rightarrow \sqrt{1 - \frac{3}{x+2}} = f(x) < f(y) = \sqrt{1 - \frac{3}{y+2}} \end{aligned}$$

ya que la función raíz cuadrada es creciente en su dominio. **(0.6 pts)**

De forma análoga, se prueba que f es creciente en $[1, +\infty)$. Sin embargo, la función no es creciente en todo su dominio, ya que

$$f(-3) = 2 > 0 = f(1). \qquad \textbf{(0.4 pts)}$$

d) (1.0 pto) Calcule $f([1,2])$.

Solución: Se tiene que

$$\begin{aligned} f([1,2]) &= \{f(x) \mid x \in \operatorname{Dom}(f) \cap [1,2]\} \\ &= \{f(x) \mid x \in [1,2]\}. \end{aligned}$$

Si $x \in [1,2]$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} = \frac{3}{2+2} \leq \frac{3}{x+2} &\leq \frac{3}{1+2} = 1 \\ 0 = 1 - 1 \leq 1 - \frac{3}{x+2} &\leq 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \\ 0 \leq \sqrt{1 - \frac{3}{x+2}} &\leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Así, $f(x) \in [0,1/2]$. Por ende, $f([1,2]) \subseteq [0,1/2]$. **(0.7 pts)**

Luego, si $y \in [0,1/2]$, entonces la ecuación $f(x) = y$ posee solución para algún $x \in [1,2]$. En efecto,

$$\begin{aligned} f(x) = \sqrt{1 - \frac{3}{x+2}} &= y \\ 1 - \frac{3}{x+2} &= y^2 \\ 1 - y^2 &= \frac{3}{x+2} \\ x + 2 &= \frac{3}{1-y^2} \\ x &= \frac{3}{1-y^2} - 2 = \frac{2y^2+1}{1-y^2} \end{aligned}$$

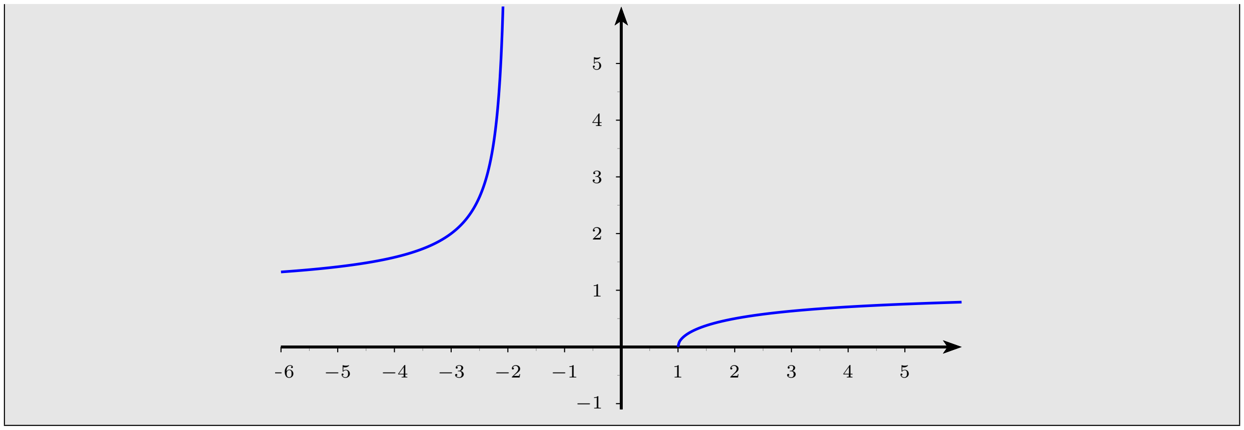
de donde se puede apreciar que $x \in [1,2]$. Luego, $[0,1/2] \subseteq f([1,2])$. En conclusión,

$$f([1,2]) = [0,1/2].$$

(0.3 pts)

e) (1.0 pto) Dibuje un bosquejo de la gráfica de f que represente sus respuestas de las partes anteriores.

Solución: El bosquejo debe considerar el dominio **(0.4 pts)**, ceros **(0.2 pts)** y monotonía **(0.4 pts)** de la función de acuerdo a las respuestas de las partes anteriores.



Duración: 3h.

Control 1

P1. a) (2,0 pts.) Determine el valor de verdad de las proposiciones p_1, p_2, p_3, p_4 y p_5 sabiendo que la proposición

$$(p_1 \wedge p_2) \implies [(p_1 \iff \overline{p_3}) \implies (\overline{p_4} \vee (p_2 \wedge p_5))]$$

es falsa.

Solución:

Primera forma (analizando directamente el hecho de que implicancia es falsa):

Como esta proposición es una implicancia, solo puede ser falsa cuando la hipótesis es verdadera y la conclusión es falsa. Se obtiene entonces que

$$p_1 \wedge p_2 \iff V \quad \text{y que} \quad [(p_1 \iff \overline{p_3}) \implies (\overline{p_4} \vee (p_2 \wedge p_5))] \iff F.$$

(0,5 pts. por identificar que la proposición $p_1 \wedge p_2$ debe ser verdadera y que la proposición $[(p_1 \iff \overline{p_3}) \implies (\overline{p_4} \vee (p_2 \wedge p_5))]$ debe ser falsa)

De la primera proposición, obtenemos que $p_1 \iff V$ y que $p_2 \iff V$, ya que estas dos proposiciones están conectadas con un y lógico **(0,3 pts. por identificar p_1 y p_2 deben ser verdaderas)**.

Por otro lado, la segunda proposición es nuevamente una implicancia y, como es falsa, deducimos que su hipótesis debe ser verdadera y su conclusión debe ser falsa. Esto es, se tiene que

$$(p_1 \iff \overline{p_3}) \iff V \quad \text{y que} \quad (\overline{p_4} \vee (p_2 \wedge p_5)) \iff F.$$

(0,5 pts. por identificar que la proposición $(p_1 \iff \overline{p_3})$ y que la proposición $(\overline{p_4} \vee (p_2 \wedge p_5))$ debe ser falsa)

Ahora, la primera de estas proposiciones dice que las proposiciones p_1 y $\overline{p_3}$ tienen el mismo valor de verdad. Como p_1 es verdadera, concluimos que $\overline{p_3}$ también es verdadera, y, así, que p_3 es falsa **(0,3 pts. por identificar que p_3 debe ser falsa)**.

Por otro lado, la segunda de estas proposiciones consiste en dos proposiciones conectadas por un o lógico, y es falsa. Esto significa que ambas proposiciones deben ser falsas, de donde se infiere que $\overline{p_4}$ es falsa y que $p_2 \wedge p_5$ también es falsa. Concluimos así que p_4 es verdadera y, como ya sabemos que p_2 es verdadera, que p_5 es falsa **(0,4 pts. por identificar que p_4 debe ser verdadera y que p_5 debe ser falsa)**.

En resumen, los valores de verdad de las proposiciones p_1, p_2, p_3, p_4 y p_5 son:

$$\begin{aligned} p_1 &\iff V \\ p_2 &\iff V \\ p_3 &\iff F \\ p_4 &\iff V \\ p_5 &\iff F. \end{aligned}$$

Segunda forma (analizando que la negación de la proposición es verdadera):

Calculemos la negación de la proposición

$$
\begin{aligned}
& \overline{(p_1 \wedge p_2) \implies [(p_1 \iff \overline{p_3}) \implies (\overline{p_4} \vee (p_2 \wedge p_5))]} && \text{(Negar la proposición)} \\
\iff & \overline{\overline{(p_1 \wedge p_2)} \vee [(p_1 \iff \overline{p_3}) \implies (\overline{p_4} \vee (p_2 \wedge p_5))]} \\
& && \text{(Caracterización de la implicancia – } \textbf{0,1 pts.}\text{)} \\
\iff & \overline{\overline{p_1 \wedge p_2}} \wedge \overline{(p_1 \iff \overline{p_3}) \implies (\overline{p_4} \vee (p_2 \wedge p_5))} && \text{(Leyes de De Morgan – } \textbf{0,1 pts.}\text{)} \\
\iff & p_1 \wedge p_2 \wedge \overline{(p_1 \iff \overline{p_3}) \implies (\overline{p_4} \vee (p_2 \wedge p_5))} && \text{(Doble negación – } \textbf{0,1 pts.}\text{)} \\
\iff & p_1 \wedge p_2 \wedge \overline{\overline{(p_1 \iff \overline{p_3})} \vee (\overline{p_4} \vee (p_2 \wedge p_5))} && \text{(Caracterización de la implicancia – } \textbf{0,1 pts.}\text{)} \\
\iff & p_1 \wedge p_2 \wedge \overline{\overline{(p_1 \iff \overline{p_3})}} \wedge \overline{\overline{p_4} \vee (p_2 \wedge p_5)} && \text{(Leyes de De Morgan – } \textbf{0,1 pts.}\text{)} \\
\iff & p_1 \wedge p_2 \wedge (p_1 \iff \overline{p_3}) \wedge \overline{\overline{p_4} \vee (p_2 \wedge p_5)} && \text{(Doble negación – } \textbf{0,1 pts.}\text{)} \\
\iff & p_1 \wedge p_2 \wedge (p_1 \iff \overline{p_3}) \wedge \overline{\overline{p_4}} \wedge \overline{(p_2 \wedge p_5)} && \text{(Leyes de De Morgan – } \textbf{0,1 pts.}\text{)} \\
\iff & p_1 \wedge p_2 \wedge (p_1 \iff \overline{p_3}) \wedge p_4 \wedge \overline{(p_2 \wedge p_5)} && \text{(Doble Negación – } \textbf{0,1 pts.}\text{)} \\
\iff & p_1 \wedge p_2 \wedge (p_1 \iff \overline{p_3}) \wedge p_4 \wedge (\overline{p_2} \vee \overline{p_5}) && \text{(Leyes de De Morgan – } \textbf{0,1 pts.}\text{)}
\end{aligned}
$$

Ahora podemos analizar el hecho de que esta proposición final es verdadera. Como consiste en varias proposiciones unidas por y lógicos, necesariamente cada una de estas proposiciones más simples son verdaderas. Concluimos entonces que

$$
\begin{aligned}
p_1 &\iff V \\
p_2 &\iff V \\
(p_1 \iff \overline{p_3}) &\iff V \\
p_4 &\iff V \\
(\overline{p_2} \vee \overline{p_5}) &\iff V.
\end{aligned}
$$

(0,5 pts. por identificar que cada una de las proposiciones más simples debe ser verdadera)
De la tercera proposición, concluimos que p_1 y $\overline{p_3}$ tienen el mismo valor de verdad. Como p_1 es verdadera, concluimos que p_3 es falsa **(0,3 pts. por identificar p_3 debe ser falsa)**. Similarmente, de la última proposición concluimos que alguna de las proposiciones $\overline{p_2}$ o $\overline{p_5}$ es verdadera. Como la segunda proposición muestra que $\overline{p_2}$ es falsa, concluimos que $\overline{p_5}$ es verdadera. Así, $\overline{p_5}$ es falsa **(0,3 pts. por identificar p_5 debe ser falsa)**. En resumen, obtuvimos que

$$
\begin{aligned}
p_1 &\iff V \\
p_2 &\iff V \\
p_3 &\iff F \\
p_4 &\iff V \\
p_5 &\iff F.
\end{aligned}
$$

b) Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifique.

i) (1,0 pts.) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists y \in \mathbb{R}_+^*,\ x - y < 0.$

Solución: La proposición dice que, dado cualquier número real positivo x, existe un número real positivo y tal que la resta $x - y$ es negativa. Esta proposición es verdadera, como demostraremos a continuación.

Primera forma (directa): Sea $x \in \mathbb{R}_+^*$. Tomemos $y = 2x$, que cumple $y \in \mathbb{R}_+^*$ **(0,5 pts. por elegir un valor apropiado de y)**. Luego,

$$x - y = x - 2x = -x,$$

por lo que $x - y = -x < 0$, ya que $x \in \mathbb{R}_+^*$ **(0,5 pts. por demostrar que la elección de $\boldsymbol{y}$ funciona)**. Esto demuestra que la proposición es verdadera.

Segunda forma (Demostrando que la negación es falsa):
La negación de esta proposición es

$$\overline{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists y \in \mathbb{R}_+^*,\ x - y < 0} \iff \exists x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ x - y \geq 0.$$

(0,3 pts. por calcular la negación de la proposición)
Demostraremos por contradicción que esta proposición es falsa. Supongamos que es verdadera y sea $x \in \mathbb{R}_+^*$ que satisface la proposición. Entonces, dado cualquier $y \in \mathbb{R}_+^*$, debería cumplirse que $x - y \geq 0$. Tomemos $y = 2x$, que cumple $y \in \mathbb{R}_+^*$ **(0,3 pts. por elegir un valor apropiado de $\boldsymbol{y}$)**. Así,

$$x - y = x - 2x = -x,$$

por lo que $x - y = -x < 0$, ya que $x \in \mathbb{R}_+^*$ **(0,3 pts. por demostrar que la elección de $\boldsymbol{y}$ lleva a $\boldsymbol{x - y < 0}$)**. Esto contradice la suposición, por lo que la proposición negada es falsa. Así, la proposición original es verdadera **(0,1 pts. por concluir)**.

ii) (1,0 pts.) $\exists y \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x - y < 0$.

Solución: La proposición dice que existe un número real positivo y *fijo* tal que, dado cualquier número real positivo x, siempre se tiene que la resta $x - y$ es negativa. Esta proposición es falsa, como demostraremos a continuación.

Primera forma (por contradicción): Supongamos por contradicción que la proposición es verdadera **(0,1 pts. por enunciar la contradicción)**. Sea $y \in \mathbb{R}_+^*$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}_+^*$, se tiene que $x - y < 0$ **(0,2 pts. por tomar un valor de $\boldsymbol{y}$ que satisface la proposición)**. En particular, esta proposición es válida tomando $x = y$, ya que cumple $x \in \mathbb{R}_+^*$ **(0,3 pts. por elegir un valor apropiado de $\boldsymbol{x}$)**. Tenemos entonces

$$x - y = y - y = 0,$$

lo que muestra que $x - y = 0 \geq 0$ **(0,2 pts. por demostrar que la elección de $\boldsymbol{x}$ lleva a $\boldsymbol{x - y \geq 0}$)**. Esto es una contradicción, porque estamos suponiendo que $x - y < 0$ **(0,2 pts. por notar que esto contradice la hipótesis)**. Por lo tanto, la proposición es falsa.

Segunda forma (demostrando que la negación es verdadera): La negación de la proposición es

$$\overline{\exists y \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x - y < 0} \iff \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists x \in \mathbb{R}_+^*,\ x - y \geq 0.$$

(0,3 pts. por calcular la negación de la proposición)
Demostraremos que esta proposición es verdadera. Sea $y \in \mathbb{R}_+^*$ **(0,1 pts. por tomar un valor arbitrario de $\boldsymbol{y}$)**. Debemos encontrar $x \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $x - y \geq 0$. Tomemos $x = y$, que pertenece a $\mathbb{R}_+^*$ **(0,3 pts. por elegir un valor apropiado de $\boldsymbol{x}$)**. Luego,

$$x - y = y - y = 0,$$

que cumple que $x - y = 0 \geq 0$ **(0,2 pts. por demostrar que la elección de $\boldsymbol{x}$ funciona)**. Esto demuestra que la proposición negada es verdadera. Así, la proposición original es falsa **(0,1 pts. por concluir)**.

iii) (1,0 pts.) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ x - y < 0$.

Solución: La proposición dice que, dados números reales positivos x e y cualesquiera, su resta $x - y$ siempre será negativa. Esta proposición es falsa, como demostraremos a continuación.

Primera forma (dando un contraejemplo): Como la proposición solo tiene cuantificadores "para todo", basta dar un contraejemplo para demostrar que es falsa. Tomemos $x = 1$ e $y = 1$ **(0,5 pts. por elegir valores apropiados de x e y)**. Luego, $x - y = 0$ no cumple $x - y < 0$, por lo que la proposición es falsa **(0,5 pts. por notar que estos valores no cumplen $x - y < 0$)**.

Segunda forma (demostrando que la negación es verdadera): La negación de la proposición es

$$\overline{\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ x - y < 0} \iff \exists x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists y \in \mathbb{R}_+^*,\ x - y \geq 0.$$

(0,3 pts. por calcular la negación de la proposición)
Para ver que esta proposición es verdadera, basta exhibir valores de $x \in \mathbb{R}_+^*$ e $y \in \mathbb{R}_+^*$ con $x - y \geq 0$. Por ejemplo, podemos tomar $x = 1$ e $y = 1$ **(0,3 pts. por elegir valores apropiados de x e y)**, que cumplen que

$$x - y = 1 - 1 = 0$$

que cumple que $x - y = 0 \geq 0$ **(0,3 pts. por notar que la elección de x e y lleva a $x - y \geq 0$)**. Concluimos que la proposición negada es verdadera, por lo que la proposición original es falsa **(0,1 pts. por concluir)**.

iv) (1,0 pts.) $\exists x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists y \in \mathbb{R}_+^*,\ x - y < 0$.

Solución: La proposición dice que existen números reales positivos x e y fijos tales que su resta $x - y$ es negativa. Esta proposición es verdadera, como demostraremos a continuación.

Primera forma (exhibiendo ejemplos): Basta mostrar ejemplos explícitos de números reales positivos x e y tales que $x - y < 0$. Podemos tomar $x = 1$ e $y = 2$ **(0,5 pts. por elegir valores apropiados de x e y)**, por lo que

$$x - y = 1 - 2 = -1,$$

que cumple que $x - y = -1 < 0$ **(0,5 pts. por notar que la elección de x e y lleva a $x - y < 0$)**. Esto muestra que la proposición es verdadera.

Segunda forma (mostrando que la negación es falsa): La negación de la proposición es:

$$\overline{\exists x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists y \in \mathbb{R}_+^*,\ x - y < 0} \iff \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ x - y \geq 0.$$

(0,3 pts. por calcular la negación de la proposición)
Demostraremos que esta proposición es falsa dando un contraejemplo. Sean $x = 1$ e $y = 2$ **(0,3 pts. por elegir valores apropiados de x e y)**. Luego,

$$x - y = 1 - 2 = -1,$$

que cumple que $x - y = -1 < 0$ **(0,3 pts. por notar que la elección de x e y lleva a $x - y < 0$)**. Obtenemos que la proposición negada es falsa, por lo que la proposición original es verdadera **(0,1 pts. por concluir)**.

Indicación: Recuerde que $\mathbb{R}_+^*$ es el conjunto de los reales estrictamente positivos, por lo que, en particular, $0 \notin \mathbb{R}_+^*$.

P2. a) (3,0 pts.) Demuestre por inducción que $8 \cdot 7^n - 14$ es divisible por 21, para todo $n \geq 1$.

Solución:
Caso base: El caso base ocurre con $n = 1$ **(0,2 pts. por identificar el caso base)**. En este caso, tenemos que

$$8 \cdot 7^n - 14 = 8 \cdot 7^1 - 14 = 8 \cdot 7 - 14 = 56 - 14 = 42.$$

(0,4 pts. por demostrar que $8 \cdot 7^n - 14 = 42$)
Como $42 = 2 \cdot 21$ es divisible por 21, tenemos que el caso base se cumple **(0,4 pts. por notar que**

$\mathbf{42 = 2 \cdot 21}$).

Paso inductivo: Sea $n \geq 1$. Supongamos que $8 \cdot 7^n - 14$ es divisible por 21, es decir, que existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $8 \cdot 7^n - 14 = 21q$. Esta es la hipótesis inductiva (H.I.) **(0,5 pts. por identificar la hipótesis inductiva)**

Debemos demostrar que $8 \cdot 7^{n+1} - 14$ es divisible por 21. Tenemos que

$$\begin{aligned}
8 \cdot 7^{n+1} - 14 &= 8 \cdot 7 \cdot 7^n - 14 && (7^{n+1} = 7 \cdot 7^n - \textbf{0,1 pts.})\\
&= 8 \cdot 7 \cdot 7^n - 14 + 7 \cdot 14 - 7 \cdot 14 && (\text{Sumar y restar } 7 \cdot 14 - \textbf{0,1 pts.})\\
&= 7(8 \cdot 7^n - 14) - 14 + 7 \cdot 14 && (\text{Factorizar} - \textbf{0,1 pts.})\\
&= 7 \cdot 21q - 14 + 7 \cdot 14 && (\text{H.I.} - \textbf{0,5 pts.})\\
&= 7 \cdot 21q + 14(7-1) && (\text{Factorizar} - \textbf{0,1 pts.})\\
&= 7 \cdot 21q + 21 \cdot 4 && (14(7-1) = 21 \cdot 4 - \textbf{0,1 pts.})\\
&= 21(7q+4) && (\text{Factorizar} - \textbf{0,1 pts.})
\end{aligned}$$

Así, llegamos a que $8 \cdot 7^{n+1} - 14$ se puede escribir como $21r$, con $r \in \mathbb{N}$ dado por $r = 7q + 4$ **(0,2 pts. por observar que $\mathbf{8 \cdot 7^{n+1} - 14 = 21(7q+4)}$)**. Esto muestra que $8 \cdot 7^{n+1} - 14$ es divisible por 21, lo que concluye el paso inductivo **(0,2 pts. por concluir)**.

b) (3,0 pts.) Sea $C \in \mathbb{R}$ con $C \neq 1$. Considere la recurrencia dada por $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ y $a_n = (C-1)a_{n-1} + Ca_{n-2}$ para todo $n \geq 2$. Demuestre por inducción que, para todo $n \geq 0$, se tiene que

$$a_n = \frac{C^n - (-1)^n}{C+1}.$$

Solución:

Caso base: El caso base ocurre con $n = 0$ y con $n = 1$ **(0,2 pts. por identificar los casos bases)**.

En el primer caso, con $n = 0$, se tiene que $a_0 = 0$ por definición **(0,1 pts. por notar que $\boldsymbol{a_0 = 0}$)**. Además,

$$\frac{C^n - (-1)^n}{C+1} = \frac{C^0 - (-1)^0}{C+1} = \frac{1-1}{C+1} = 0,$$

lo que muestra que la fórmula es válida en este caso **(0,3 pts. por calcular $\boldsymbol{\frac{C^n - (-1)^n}{C+1} = 0}$)**.

En el segundo caso, con $n = 1$, se tiene que $a_1 = 1$ por definición **(0,1 pts. por notar que $\boldsymbol{a_1 = 1}$)**. Además,

$$\frac{C^n - (-1)^n}{C+1} = \frac{C^1 - (-1)^1}{C+1} = \frac{C - (-1)}{C+1} = \frac{C+1}{C+1} = 1,$$

lo que muestra que la fórmula también es válida en este caso **(0,3 pts. por calcular $\boldsymbol{\frac{C^n - (-1)^n}{C+1} = 1}$)**.

Paso inductivo: Sea $n \geq 1$. Supongamos que

$$a_k = \frac{C^k - (-1)^k}{C+1}$$

para todo $0 \leq k \leq n$. Esta es la hipótesis inductiva (H.I.), ya que estamos usando inducción fuerte **(0,5 pts. por identificar la hipótesis inductiva)**.

Debemos demostrar que

$$a_{n+1} = \frac{C^{n+1} - (-1)^{n+1}}{C+1}.$$

Por definición, tenemos que

$$a_{n+1} = (C-1)a_n + Ca_{n-1}.$$

(0,3 pts. por usar la definición de $\boldsymbol{a_{n+1}}$).

Usando la hipótesis inductiva (con $k = n$ y con $k = n-1$, que satisfacen $0 \leq k \leq n$), obtenemos que

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= (C-1)\cdot\frac{C^n - (-1)^n}{C+1} + C\cdot\frac{C^{n-1} - (-1)^{n-1}}{C+1} && \text{(H.I. – \textbf{0,5 pts.})}\\
&= \frac{(C-1)(C^n - (-1)^n) + C(C^{n-1} - (-1)^{n-1})}{C+1} && \text{(Juntar términos – \textbf{0,1 pts.})}\\
&= \frac{C^{n+1} - C(-1)^n - C^n + (-1)^n + C^n - C(-1)^{n-1})}{C+1} && \text{(Expandir – \textbf{0,1 pts.})}\\
&= \frac{(C^{n+1} + (-1)^n) - (C(-1)^n + C(-1)^{n-1})) + (C^n - C^n)}{C+1} && \text{(Reordenar – \textbf{0,1 pts.})}\\
&= \frac{C^{n+1} + (-1)^n}{C+1} && ((C(-1)^n + C(-1)^{n-1})) = 0 \text{ y } (C^n - C^n) = 0 \text{ – \textbf{0,2 pts.})}\\
&= \frac{C^{n+1} - (-1)^{n+1}}{C+1}. && ((-1)^n = -(-1)^{n+1} \text{ – \textbf{0,2 pts.})}
\end{aligned}$$

Esto concluye el paso inductivo.

P3. Sea E un conjunto de referencia y sean $X, Y, Z \subseteq E$.

a) (3,0 pts.) Demuestre que

$$X \setminus (X \cap Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z).$$

Solución:

Primera forma (por álgebra de conjuntos empezando de la izquierda): Tenemos que

$$\begin{aligned}
X \setminus (X \cap Y \cap Z) &= X \cap (X \cap Y \cap Z)^c && \text{(Definición diferencia – \textbf{0,5 pts.})}\\
&= X \cap (X^c \cup Y^c \cup Z^c) && \text{(Leyes de De Morgan – \textbf{0,5 pts.})}\\
&= (X \cap X^c) \cup (X \cap Y^c) \cup (X \cap Z^c) && \text{(Distributividad de } \cap \text{ sobre } \cup \text{ – \textbf{0,5 pts.})}\\
&= \emptyset \cup (X \cap Y^c) \cup (X \cap Z^c) && (A \cap A^c = \emptyset \text{ – \textbf{0,5 pts.})}\\
&= (X \cap Y^c) \cup (X \cap Z^c) && \text{(Vacío es neutro para } \cup \text{ – \textbf{0,5 pts.})}\\
&= (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z) && \text{(Definición diferencia – \textbf{0,5 pts.})}
\end{aligned}$$

Segunda forma (por álgebra de conjuntos empezando de la derecha): Tenemos que

$$\begin{aligned}
(X \setminus Y) \cup (X \setminus Z) &= (X \cap Y^c) \cup (X \cap Z^c) && \text{(Definición diferencia – \textbf{0,6 pts.})}\\
&= X \cap (Y^c \cup Z^c) && \text{(Distributividad de } \cap \text{ sobre } \cup \text{ – \textbf{0,6 pts.})}\\
&= X \cap (Y \cap Z)^c && \text{(Leyes de De Morgan – \textbf{0,6 pts.})}\\
&= X \setminus (Y \cap Z) && \text{(Definición diferencia – \textbf{0,6 pts.})}\\
&= X \setminus (X \cap Y \cap Z) && (A \setminus B = A \setminus (A \cap B) \text{ – \textbf{0,6 pts.})}
\end{aligned}$$

Tercera forma (por doble inclusión):

$\subseteq$ Sea $x \in X \setminus (X \cap Y \cap Z)$ **(0,1 pts. por tomar un elemento arbitrario en $\boldsymbol{X \setminus (X \cap Y \cap Z)}$)**. Debemos demostrar que $x \in (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$.
Por definición de diferencia, $x \in X$ y $x \notin X \cap Y \cap Z$ **(0,2 pts. por obtener que $\boldsymbol{x \in X}$ y $\boldsymbol{x \notin X \cap Y \cap Z}$)**. Así, $x \in (X \cap Y \cap Z)^c = X^c \cup Y^c \cup Z^c$ **(0,1 pts. por obtener que $\boldsymbol{x \in X^c \cup Y^c \cup Z^c}$)**. Equivalentemente, $x \in X^c \vee x \in Y^c \vee x \in Z^c$ **(0,2 pts. por obtener que $\boldsymbol{x \in X^c \vee x \in Y^c \vee x \in Z^c}$)**.
Como tenemos que $x \in X$, no puede ocurrir que $x \in X^c$. Concluimos entonces que $x \in Y^c \vee x \in Z^c$ **(0,2 pts. por obtener que $\boldsymbol{x \in Y^c \vee x \in Z^c}$)**. Tenemos dos casos:

- Si $x \in Y^c$, como ya sabemos que $x \in X$, obtenemos que $x \in X \setminus Y$ por definición de diferencia **(0,1 pts. por obtener que $\boldsymbol{x \in X \setminus Y}$)**. Por lo tanto

$$x \in (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z).$$

(0,2 pts. por obtener que $\boldsymbol{x \in (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)}$).

- Si $x \in Z^c$, como ya sabemos que $x \in X$, obtenemos que $x \in X \setminus Z$ por definición de diferencia **(0,1 pts. por obtener que $\boldsymbol{x \in X \setminus Z}$)**. Por lo tanto,

$$x \in (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z).$$

(0,2 pts. por obtener que $\boldsymbol{x \in (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)}$).

Vemos que, en cualquier caso, $x \in (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$. Esto muestra que

$$X \setminus (X \cap Y \cap Z) \subseteq (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z).$$

(0,1 pts. por concluir).

$\supseteq$ Sea $x \in (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$ **(0,1 pts. por tomar un elemento arbitrario en $\boldsymbol{(X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)}$)**.
Debemos demostrar que $x \in X \setminus (X \cap Y \cap Z)$, es decir, que $x \in X$ y que $x \notin X \cap Y \cap Z$.
Por definición de unión, tenemos que $x \in X \setminus Y \vee x \in X \setminus Z$ **(0,1 pts. por obtener que $\boldsymbol{x \in X \setminus Y \vee X \setminus Z}$)**. Tenemos dos casos:

- Si $x \in X \setminus Y$, entonces $x \in X$ y $x \notin Y$ **(0,2 pts. por obtener que $\boldsymbol{x \in X}$ y $\boldsymbol{x \notin Y}$)**. Como $X \cap Y \cap Z \subseteq Y$, concluimos que $x \notin X \cap Y \cap Z$ **(0,2 pts. por obtener que $\boldsymbol{x \notin X \cap Y \cap Z}$)**. Así, $x \in X \setminus (X \cap Y \cap Z)$ **(0,2 pts. por obtener que $\boldsymbol{x \in X \setminus (X \cap Y \cap Z)}$)**.
- Si $x \in X \setminus Z$, entonces $x \in X$ y $x \notin Z$ **(0,2 pts. por obtener que $\boldsymbol{x \in X}$ y $\boldsymbol{x \notin Z}$)**. Como $X \cap Y \cap Z \subseteq Z$, concluimos que $x \notin X \cap Y \cap Z$ **(0,2 pts. por obtener que $\boldsymbol{x \notin X \cap Y \cap Z}$)**. Así, $x \in X \setminus (X \cap Y \cap Z)$ **(0,2 pts. por obtener que $\boldsymbol{x \in X \setminus (X \cap Y \cap Z)}$)**.

Vemos que, en cualquier caso, $x \in (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$. Esto muestra que

$$(X \setminus Y) \cup (X \setminus Z) \subseteq X \setminus (X \cap Y \cap Z).$$

(0,1 pts. por concluir).

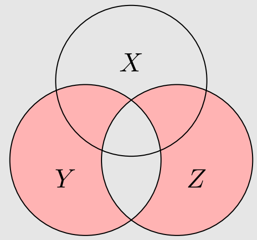
Cuarta forma (usando la defición de igualdad de conjuntos): Sea $x \in E$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
x \in X \setminus (X \cap Y \cap Z) &\iff x \in X \wedge x \notin X \cap Y \cap Z && \text{(Definición diferencia – } \mathbf{0{,}4\ pts.}\text{)}\\
&\iff x \in X \wedge x \in (X \cap Y \cap Z)^c && \text{(Definición complemento – } \mathbf{0{,}4\ pts.}\text{)}\\
&\iff x \in X \wedge x \in (X^c \cup Y^c \cup Z^c) && \text{(Leyes de De Morgan – } \mathbf{0{,}3\ pts.}\text{)}\\
&\iff x \in X \wedge (x \in X^c \vee x \in Y^c \vee x \in Z^c) && \text{(Definición unión – } \mathbf{0{,}4\ pts.}\text{)}\\
&\iff (x \in X \wedge x \in X^c) \vee (x \in X \wedge x \in Y^c) \vee (x \in X \wedge x \in Z^c)\\
& && \text{(Distributividad de } \wedge \text{ sobre } \vee \text{ – } \mathbf{0{,}3\ pts.}\text{)}\\
&\iff F \vee (x \in X \wedge x \in Y^c) \vee (x \in X \wedge x \in Z^c) && \text{(Consistencia – } \mathbf{0{,}2\ pts.}\text{)}\\
&\iff (x \in X \wedge x \in Y^c) \vee (x \in X \wedge x \in Z^c) && \text{(Identidad – } \mathbf{0{,}2\ pts.}\text{)}\\
&\iff (x \in X \setminus Y) \vee (x \in X \setminus Z) && \text{(Definición diferencia – } \mathbf{0{,}4\ pts.}\text{)}\\
&\iff x \in (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z) && \text{(Definición unión – } \mathbf{0{,}4\ pts.}\text{)}
\end{aligned}$$

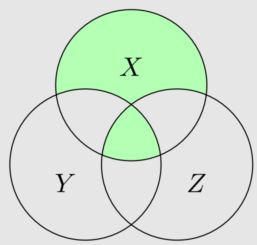
Esto demuestra que $X \setminus (X \cap Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$.

b) (3,0 pts.) ¿Son iguales $X \setminus (Y \triangle Z)$ y $(X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$? Justifique con una demostración o un contraejemplo.
Indicación: Puede serle útil comenzar dibujando diagramas de Venn.

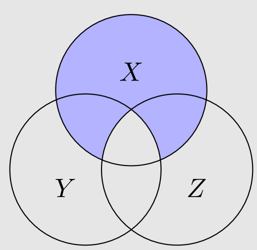
Solución: Primero dibujaremos los diagramas de Venn. El diagrama de Venn de $Y \triangle Z$ se ve así:



Por lo tanto, el diagrama de Venn de $X \setminus (Y \triangle Z)$ es el siguiente:



Por otro lado, usando la parte a), tenemos que $(X \setminus Y) \cup (X \setminus Z) = X \setminus (X \cap Y \cap Z)$. Así, su diagrama de Venn es:



(1,0 pts. por dibujar correctamente los diagramas de Venn, suponiendo que el contrajemplo hecho después es <u>incorrecto</u>).

Con estos diagramas, se puede construir un contraejemplo. Hay varias formas de lograrlo, pero quizá la más simple es asegurar que $X \cap Y \cap Z \neq \emptyset$. En efecto, viendo los diagramas, este conjunto es subconjunto de $X \setminus (Y \triangle Z)$, pero su intersección con $(X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$ es vacía.

Si A es cualquier conjunto no vacío, podemos tomar $X = Y = Z = A$ y así

$$Y \triangle Z = A \triangle A = \emptyset$$

por lo que $X \setminus (Y \triangle Z) = A \setminus \emptyset = A$. Por otro lado,

$$(X \setminus Y) \cup (X \setminus Z) = (A \setminus A) \cup (A \setminus A) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset.$$

Vemos entonces que

$$X \setminus (Y \triangle Z) = A \neq \emptyset = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z),$$

lo que muestra que estos conjuntos son distintos en general **(3,0 pts. por encontrar correctamente un contraejemplo, independiente de si se dibujaron o no los diagramas de Venn correctamente)**.

Duración: 3h.

MA1101: Introducción al Álgebra

Pauta Tarea 1

P1. Determine si las siguientes afirmaciones son tautologías, sin usar tablas de verdad.

a) $(p \implies \overline{p \vee \overline{q}}) \Leftrightarrow \overline{p}$
Solución usando el método simbólico: $(p \implies \overline{p \vee \overline{q}}) \Leftrightarrow (p \implies (\overline{p} \wedge q)) \Leftrightarrow (\overline{p} \vee (\overline{p} \wedge q) \Leftrightarrow \overline{p}$ *dónde se usaron la ley de Morgan, caracterización de la implicancia, absorbción. Una otra posibilidad es usar una demostración exploratória.*

b) $(p \implies q) \Leftrightarrow [(\overline{q} \wedge p) \vee (q \implies p)]$

c) $[(p \implies q) \wedge (r \implies s)] \implies [(p \wedge r) \implies (q \wedge s)]$

P2. Demuestre las siguientes afirmaciones, indicándo cuál método de demostración se usó:

a) Todo entero al cuadrado tiene la forma $3k$ o $3k+1$, con $k \in \mathbb{N}$.
(Puede usar, sin demostrar, que todo entero se escribe de la forma $3q+r$, con q entero y $r \in \{0,1,2\}$.)

b) Para a entero, si $3a^2+1$ es par, entonces a es impar.
Solución: Usaremos la contrarrecíproca. Entonces tenemos que mostrar que si a no es impar, entonces $3a^2+1$ *no es par. En otras palabras, la meta es probar que si a es par, entonces* $3a^2+1$ *es impar. Notamos que si a es par, entonces* a^2 *es par, y también* $3a^2$ *es par, y por lo tanto* $3a^2+1$ *es impar, que es lo que queríamos mostrar. Es también posible mostrar lo pedido usando una reducción al absurdo, o una demostración directa.*

c) Sea $a \neq 0$ un número racional y b un número irracional (no racional), donde un número racional es aquel que se puede escribir de la forma $\frac{m}{n}$, con m, n enteros, $n \neq 0$. Demuestre que $a+b$ es irracional.
Solución: Usaremos la contradicción o reducción al absurdo. Para esto, asumimos que $a \neq 0$ *y* $a+b$ *son racionales y b es irracional. Siendo racionales,* $a = \frac{n}{m}$ *y* $a+b = \frac{n'}{m'}$ *donde* n, n', m, m' *son enteros con* $m, m' \neq 0$*. Notamos que* $b = (a+b) - a = \frac{n'}{m'} - \frac{n}{m} = \frac{n'm+nm'}{mm'}$*. Es decir, tomando* $n'' := n'm + nm'$ *y* $m'' := mm'$*, el irracional b se puede escribir como* $b = \frac{n''}{m''}$ *con* n'', m'' *enteros y* $m'' \neq 0$*, lo que es una contradicción.*

P3. Sea F el conjunto de personas que se encuentra esperando en una fila. Para dos personas x, y en F, se define la función proposicional

$$\phi(x,y) = \text{“La persona } x \text{ está más adelante que } y \text{ en la fila.”}$$

a) Determine en qué lugar de la fila se encuentran p, q en los siguientes casos, explicando su respuesta:

1) $(\forall x \in F)(\phi(p,x) \vee x = p)$.
2) $(\forall x \in F)(\phi(x,q) \vee x = q)$.

¿Es importante la parte ... $\vee\, x = p$ en 1), y ... $\vee\, x = q$ en 2)?

b) De forma similar a los casos de *a*), escriba la situación “hay al menos dos personas en la fila delante de p”.

MA1101: Introducción al Álgebra

Tarea 2

Se entrega el primer ítem de cada pregunta.

P1. Sea E un conjunto de referencia, p una proposición lógica y $Q(x)$ una función proposicional.

a) Definamos la proposición r como $(\forall x \in E)(p \Rightarrow Q(x))$. Determine el valor de verdad de la proposición p, sabiendo que r es falsa.

Solución: Usando la caracterización del implica, podemos reescribir la proposición r como $(\forall x \in E)(\overline{p} \vee Q(x))$. 1.5 pt. Ahora, la negación de r es equivalente a $(\exists x \in E)(\overline{\overline{p} \vee Q(x)})$. 1.5 pt. Luego, las Leyes de De Morgan nos aseguran que la negación de r es equivalente a $(\exists x \in E)(p \wedge \overline{Q(x)})$. 1.5 pt.
Nos dicen que r es falsa, es decir, $\overline{r}$ es verdadera. Por lo desarrollado anteriormente tenemos que $(\exists x \in E)(p \wedge \overline{Q(x)})$ es verdadera. Esto es, existe $x \in E$ tal que $p \wedge \overline{Q(x)}$ es verdadera. Recordando que la conjunción es verdadera cuando ambas proposiciones lo son, podemos concluir que la proposición p es verdadera. 1.5 pt.

P2. Pruebe mediante inducción sobre $n \in \mathbb{N}$:

a) $n! \geq 2^n$, para $n \geq 4$.

Solución: Analicemos el caso base dado por $n_0 = 4$. Notemos que $4! = 24$ y $2^4 = 16$, por lo que la desigualdad se verifica para el caso base. 1.5 pt.
Supongamos ahora que la desigualdad es cierta para $n \in \mathbb{N}$, es decir, $n! \geq 2^n$. Para concluir mediante inducción, debemos probar que $(n+1)! \geq 2^{n+1}$. En efecto, sabemos que $(n+1)! = (n+1)n!$. Luego, por la hipótesis de inducción sobre $n \in \mathbb{N}$ se sigue que

$$(n+1)! \geq (n+1)2^n. \tag{1}$$

1.5 pt.

Ahora, como $n \geq 4$, podemos ver que $n+1 \geq 2$. Combinando esto último con la desigualdad (1) obtenemos 1.5 pt.

$$(n+1)! \geq 2^{n+1}.$$

1.5 pt.

Como querámos probar, concluyendo la solución.

P3. Consideremos A y B conjuntos no vacíos, y sean $p(x)$ y $q(x)$ funciones proposicionales. Supongamos que las siguientes proposiciones son verdadersas

$$\begin{aligned} R &: (\exists x \in A)(\exists x' \in A) \quad (p(x) \Leftrightarrow \overline{p(x')}) \\ S &: (\forall x \in A)(\exists y \in B) \quad (p(x) \Rightarrow q(y)) \\ T &: (\forall x \in A)(\exists y \in B) \quad (q(y) \Rightarrow p(x)) \end{aligned}$$

Pruebe que

a) $(\exists x \in A)\ p(x)\ \wedge\ (\exists x \in A)\ \overline{p(x)}$.

Solución: La proposición R nos asegura que existe un x_0 y x_1 en A tales que $p(x_0) \Leftrightarrow \overline{p(x_1)}$. 2 pt. Pueden ocurrir dos casos: que $p(x_0)$ sea verdadera o falsa.

- En el caso que $p(x_0)$ sea verdadera, tomando $x = x_0$, se sigue que $(\exists x \in A)p(x)$ y tomando $x = x_1$ obtenemos $(\exists x \in A)\overline{p(x)}$. 2 pt.
- En el caso $p(x_0)$ sea falsa, entonces $p(x_1)$ es verdadera. Por lo que tomando $x = x_1$ tenemos $(\exists x \in A)p(x)$, y tomando $x = x_0$ se sigue $(\exists x \in A)\overline{p(x)}$. 2 pt.

En cualquier caso se verifica la proposición pedida.