P1| $a \cdot 0 = 0 \;,\; \forall a \in \mathbb{R}$

Cuando veamos este tipo de ejercicios lo primero que debemos pensar es: ¿qué no están preguntando?

Nos dicen que $a \cdot 0 = 0 \;, \forall a \in \mathbb{R}$, entonces estoy suplantando la identidad de 0.

Idea: Debo justificar a través de una propiedad que ya se que se tiene.

- Probaremos en primero una propiedad que llamaremos de manera particular, dado que las variables son mudas, y por orden es recomendable definir.

$$
\left.
\begin{aligned}
& a \cdot 0 + a \\
\text{Ǝm|}^\circ \quad &= a \cdot 0 + a \cdot 1 \\
\text{Distri.} \quad &= a\,[0 + 1] \\
\text{Cont} \quad &= a\,[1 + 0] \\
\text{Ǝm|}^{+} \quad &= a\,[1] \\
\text{Ǝm|}^\circ \quad &= a
\end{aligned}
\right\}
$$

WiLSON.

Acabamos de demostrar $a \cdot 0 + a = a$

Para continuar veamos lo que queremos demostrar.

$X + a \cdot 0 = X$ tenemos todo listo y preparado

Comencemos de un lado a otro.

$X + [a \cdot 0]$

$= X + [a \cdot 0 + 0]$ / ∃ neutro Aditivo

$= X + [0 + a \cdot 0]$ / Conmutatividad.

$= X + [[a + (-a)] + a \cdot 0]$ / ∃ elemento inverso para la suma $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$= X + [(-a) + (a + a \cdot 0)]$ / * Wilson.

$= X + [(-a) + a]$ / ∃ elemento inverso para la suma en $(\mathbb{R}, +, \cdot)$.

$\boxed{= X + 0 = X}$ ▨

Recuerden siempre colocar todas las propiedades

Con esto se concluye.

b) $\forall a \in \mathbb{R}, (-a)^{-1} = -(a)^{-1}$.

Lo primero que debemos ver es que me están diciendo que el inverso multiplicativo de $(-a)$ es $-(a)^{-1}$

entonces cumplirá lo siguiente.

$(-a)(-(a)^{-1}) = 1$ si logro probar esto gané.

$(-a)(-(a)^{-1}) = 1$

$= (-1)\cdot(+a)(-(1\cdot a^{-1}))$

$= (-1)\cdot(a)(-1)(a^{-1})$

$= (-1)[(a)(-1)](a^{-1})$

$= (-1)[(-1)(a)](a^{-1})$

$= [(-1)(-1)]\, a\cdot a^{-1}$

$= [(-1)(-1)]\cdot 1$

$= \boxed{[(-1)(-1)] = 1}$ ☑

* Toddy.

* Toddy.

Quiero demostrar.

La cancelación de signos

$(-1)(-1) = 1$ * Valle

Si digo esto entonces

$1 + (-1) = 0$ se tiene

* Valle

$= (-1)(-1) + (-1) =$ / Neutro multiplicativo

$= (-1)[-1] + [-1]\cdot 1$ /

$= (-1)[(-1) + 1]$ / Distributiva

$= (-1)[1 + (-1)]$ / Inverso aditivo

$= (-1)\cdot 0$ /

$= 0.$ ☑

c) Queremos demostrar la unicidad del neutro multiplicativo

Veamos que este cumple lo siguiente

Wachimingo $X e_1 = X \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Tulio $X e_2 = X \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Notar que asumo 2 diferentes y llego a que son iguales.

Si en Wachimingo tomo $x = e_2$ y en Tulio tomo $x = e_1$

$\Rightarrow$ Wachimingo $e_2 e_1 = e_2$

$\Rightarrow$ Tulio $e_1 e_2 = e_1$

$e_2 = e_2 e_1 = e_1 e_2 = e_1$ Entonces deben ser iguales

d) Lo que quiero es $(x^{-1})^{-1} = x$

Sabemos

$x \cdot x^{-1} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\} \quad \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}$

$(x \cdot 1) x^{-1} = 1$ / Neutro.

$(x \cdot [a \cdot a^{-1}]) x^{-1} = 1$ / $a = x^{-1}$ / $\exists$ inverso.

$(x \cdot [x^{-1} \cdot (x^{-1})^{-1}] \cdot x^{-1} = 1$ / C.V

$[x \cdot (x^{-1})] \cdot (x^{-1})^{-1} \cdot x^{-1} = 1$ / Asoc

$1 \cdot (x^{-1})^{-1} \cdot x^{-1} = 1$ / neutro.

$x^{-1} \cdot \underbrace{(x^{-1})^{-1}}_{\text{Inverso multiplicativo único}} = 1$ / Unicidad.

$X \cdot X^{-1} = X^{-1} \cdot X = 1.$

entonces $(x^{-1})^{-1} = x$ $\boxtimes$

Scanned with CamScanner

e) $\forall a \in \mathbb{R}, a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$

Primero recordar $\forall \dot{a} \in \mathbb{R} \quad \dot{a} \cdot 0 = 0$ || CHIRSTOPH

Veamos que por visto en clases puedo escribir $a^2 = a \cdot a$

Además tenemos que será $\gamma \cdot \theta = 0$

debemos ponernos en casos y razonaremos por contradicción.

si $\gamma \neq 0 \Rightarrow \exists! \, \gamma^{-1} \in \mathbb{R}$, además en contexto $\gamma = \theta$.

$\gamma \cdot \theta = 0 \, / \gamma^{-1}$ hipótesis / Aplico inverso.

$(\gamma \cdot \theta)\gamma^{-1} = \gamma^{-1} \cdot 0$ / CHIRSTOPH 0 aniquila.

$\gamma(\theta \cdot \gamma^{-1}) = 0$ / Asociati

$\gamma(\gamma^{-1} \cdot \theta) = 0$ / conmutativa

$(\gamma \cdot \gamma^{-1})\theta = 0$ / Asoc

$1 \cdot \theta = 0$ / Inverso mult. e neutro mul

$\theta = 0$

$\gamma = \theta = 0$ —$\times$— entonces $\gamma = 0$

análogo si $\theta \neq 0 \wedge \gamma = \theta$.

f) $ab \neq 0 \Rightarrow (ab)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$

Como $ab \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ y $b \neq 0$

entonces Ambos tienen inversos, a^{-1} y b^{-1} respectivamente.

- Como estamos diciendo que $(ab)^{-1} = a^{-1} \cdot b^{-1}$

entonces es lo mismo que probar

$$
\begin{aligned}
& ab \cdot (a^{-1} \cdot b^{-1}) = 1 \\
&= ab \cdot (b^{-1} \cdot a^{-1}) && \text{/ Comm , } \exists \text{ inverso dado } b \neq 0 \\
&= a(b \cdot b^{-1}) \cdot a^{-1} && \text{/ Asoc} \\
&= (a \cdot 1 \cdot) a^{-1} && \text{/ } \exists \text{ neutro.} \\
&= a \cdot a^{-1} = && \text{/ } \exists \text{ inverso dado } a \neq 0 \\
&= 1 \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

P2| $a+b=1 \Rightarrow (a \cdot b)^{-1} = a^{-1} + b^{-1}$

Qué Quiero justificar?

Exacto que el inverso multiplicativo de ab es $a^{-1} + b^{-1}$ entonces !! A que será equivalente?

lo vemos en el próximo capítulo.

$ab\cdot(a^{-1}+b^{-1}) = 1$

$= ab\cdot(a^{-1}+b^{-1})$

$=(ab)a^{-1}+(ab)b^{-1}$ / Dist.

$=(b\cdot a)a^{-1}+(a[b\cdot b^{-1}])$ / Commu

$= b(a\cdot a^{-1})+a[b\cdot b^{-1}]$ / Asoc / $\exists$ neutro mult / $\exists$ inverso

$= b\cdot 1 + a\cdot 1$ /

$= a+b = 1$ $\square$ /  Hipótesis.

P3 | Si $\exists$ $a\neq 0 \setminus a+a=0 \Rightarrow \forall x\in\mathbb{R}\ x+x=0$

Primero notemos que es una implicancia lo que queremos demostrar

$p\Rightarrow q$ 1) tomo p y llego a q // Directa

2) Contradicción tomo $p \Leftrightarrow F$ y

3) Contrarecíproca. $\tilde{q} \Rightarrow \tilde{p}$.

p	q	p⇒q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Usaremos (1), $a+a=0$

$a[1+1]=0$ $/a^{-1}$ / Dist, $\exists a^{-1}$, $a\neq 0$.

$a\cdot[1+1]a^{-1} = 0\cdot a^{-1}$ / Asoc

$a([1+1]a^{-1}) = a^{-1}\cdot 0$ /

$a(a^{-1}[1+1]) = 0$ / Commutatividad.

$(a\cdot a^{-1})[1+1]=0$ / Asoc

$a\cdot a^{-1}\cdot[1+1]=0$

$1\cdot[1+1]=0 =$ / $\exists$ inverso, $\exists$ neutro.

$[1+1] = 0 \quad /\cdot x$ Preservo ecuación.

$x[1+1] = x\cdot 0$ / 0 Aniquila.

$x + x = 0 \quad , \forall x \in \mathbb{R}$ ☒ ☺ Lo logramos.

P4) $a\cdot b = a \Rightarrow a = 0. \quad \forall b \in \mathbb{R}.$

Primera forma
tomo la hipótesis

$ab = a \quad /(-a)$

$ab + (-a) = a + (-a)$

$ab + (-a) = 0$

$a(b-1) = 0$

$a = 0 \quad \vee \quad \underbrace{b - 1 = 0}$

$b - 1 = 0 \quad / + 1$

$(b-1) + 1 = \cancel{0}\ 1$

$b + (-1+1) = \cancel{0}\ 1$

$b + (1 + (-1)) = \cancel{0}\ 1$

$b + 0 = 1$

$b = 1.$

entonces $a\cdot 1 = a \quad , \forall a \in \mathbb{R}$

Ahora si $b - 1 \neq 0$, entonces admite inverso.

$a(b-1) = 0 \quad /(b-1)^{-1}$

$a[(b-1)(b-1)^{-1}] = 0\cdot(b-1)^{-1}$

$a\cdot 1 = 0$

$a = 0$ ☒

Terminamos !

cualquier duda a mi correo

pyanez@dim.uchile.cl

Terminamos !

cualquier duda a mi correo

pyanez@dim.uchile.cl