IN77O: Modelos y Algoritmos de Optimización	Abril 13, 2022

CONTROL 1

Profesor: Fernando Ordóñez — *Auxiliares: Benjamin Barrientos, José Miguel González*

1. **Pregunta 1** Dado un problema de optimización lineal en forma estándard: min $c^T x$ sujeto a $Ax = b,\ x \geq 0$

   (a) (1.2 ptos) Suponga que dos bases distintas entregan la misma solución factible. Pruebe que esta solución factible es degenerada.

   Sol: Sea x una solución basica factible con dos bases distintas. Sean estas $B = \{B(1), \ldots, B(m)\}$ y $B' = \{B'(1), \ldots, B'(m)\}$ con $B \neq B'$. Tenemos $n - m$ variables no basicas para B, $j \in \{1, \ldots, n\} \setminus B$ con $x_j = 0$. Además existe una variable $l \in B \setminus B'$ tal que $x_l = 0$ pues no es variable básica para B'.

   Por lo tanto x tiene al menos $n - m + 1$ variables igual a 0, que sumado a las m restricciones de igualdad nos da $n + 1$ restricciones activas. Lo que muestra que x es una solución degenerada.

   (b) (1.2 ptos) Dado un conjunto K definimos $C(K) = \{(x, t) \mid x \in tK,\ t \geq 0\}$

   i. Muestre que $C(K)$ es un cono

   Sol:

   Sean $(x, t) \in G(K)$ y $\theta \geq 0$. Se tiene que $x \in tK$ y $t \geq 0$. Esto significa que $\theta x \in \theta t K = (\theta t)K$. Como ademas tenemos que $\theta t \geq 0$, esto implica $\theta(x, t) = (\theta x, \theta t) \in G(K)$. Por lo tanto $G(K)$ es un cono.

   ii. Muestre que $C(K)$ es convexo si y solo si K es convexo.

   Sol: $(\Leftarrow)$ Sabemos que K es convexo. Sean $(x, t),\ (y, s) \in G(K)$ y $\lambda \in [0, 1]$. Por definicion de $G(K)$ sabemos que $\frac{1}{t}x \in K$ y $\frac{1}{s}y \in K$, y por convexidad de K, tenemos $\theta \frac{1}{t}x + (1 - \theta)\frac{1}{s}y \in K$. Usando $\theta = \frac{\lambda t}{\lambda t + (1-\lambda)s}$ podemos escribir

   $$\frac{\lambda t}{\lambda t + (1-\lambda)s}\frac{1}{t}x + \frac{(1-\lambda)s}{\lambda t + (1-\lambda)s}\frac{1}{s}y = \frac{\lambda}{\lambda t + (1-\lambda)s}x + \frac{(1-\lambda)}{\lambda t + (1-\lambda)s}y \in K$$

   que implica $\lambda x + (1-\lambda)y \in (\lambda t + (1-\lambda)s)K$ es decir $\lambda(x, t) + (1-\lambda)(y, s) \in G(K)$.

   $(\Rightarrow)$ Como $G(K)$ es convexo, se tiene que si $(x, 1),\ (y, 1) \in G(K)$ y $\lambda \in [0, 1]$, entonces $(\lambda x + (1-\lambda)y, 1) \in G(K)$. Es decir si $x \in K$ y $y \in K$ y $\lambda \in [0, 1]$ entonces $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$. Por lo tanto K es convexo.

(c) (1.2 ptos) Pruebe que el problema tiene una única solución óptima no degenerada si y solo si su dual posee una única solución óptima no degenerada.

Sol:

Si el primal tiene una unica solución optima no degenerara, esta es una SBF. Es decir existe una base B tal que

i. $x_B = B^{-1}b > 0$ pues es no degenerada
ii. $c_j - c_B^T B^{-1} A_j > 0$ para todo $j \notin B$ pues es la unica solución optima.

También sabemos que en este caso $y^T = c_B^T B^{-1}$ es una variable dual óptima (pues es factible ya que los costos reducidos son ≥ 0 y satisface dualidad fuerte con x). Por ii. arriba tenemos que $A_j^T y < c_j$ para todo $j \notin B$, entonces $y \in \mathbb{R}^m$ solo tiene m restricciones activas. Es decir y es no degenerada. De la holgura complementaria y i. arriba tenemos que $A_j^T y = c_j$ para todo $j \in B$, como las columnas de la base son l.i., este sistema de m restricciones y m incongnitas tiene solo una solución. I.e. y es la única solución optima.

Si el dual tiene una única solución óptima no degenerada y, entonces

i. no degenerada: exactamente m restricciones del dual (que son l.i.) son activas ($A_j^T y = c_j$ para $j \in Q$ con $|Q| = m$ y $\{A_j\}_{j \in Q}$ vectores l.i.).
ii. unica: $b^T y > b^T z$ para cualquier otra solución z dual factible

Por dualidad fuerte existe una solución óptima del primal x que satisface holgura complementaria con y. Esto implica, con i. , que $x_j = 0$ para todo $j \in \{1 \dots n\} \backslash Q$ que son $n - m$, y las columnas de las variables $j \in Q$ son l.i. Por lo tanto x es una SBF de base Q y la única (pues $\{A_j\}_{j \in Q}$ forma una matriz invertible) solución primal que cumple holgura complementaria con y.

Si x es degenerada entonces pueden existir dos bases distintas que representen la misma solución optima: B y Q. Estas distintas bases pueden ser usadas para construir distintas soluciones duales $y_B^T = c_B^T B^{-1}$ y $y_Q^T = c_Q^T Q^{-1}$ optimas, lo que es una contradicción.

Alternativamente considere el siguiente argumento para demostrar que la solución primal es no degenerada. Se tiene que para cualquier problema de optimización lineal existe un par de soluciones primal y dual optimas que satisfacen holgura complementaria estricta (ejercicio 4.20 del Bertsimas), y como en este caso solo existe un par de soluciones primales y duales, estas satisfacen holgura complementaria estricta. Esto significa que como $A_j^T y = c_j$ para todo $j \in Q$ entonces $x_j > 0$ para todo $j \in Q$. Por lo tanto la solución primal es no degenerada.

(d) (1.2 ptos) (V/F Demuestre o de un contraejemplo) Una iteración del método Simplex que cambia la solución tiene que cambiar el costo de la solucón.

Sol: Verdadero. Si una iteración del método Simplex cambia la solución quiere decir que $x' = x + \theta^* d^j \neq x$, es decir $\theta^* > 0$. Además el costo reducido del cambio $c^T d^j = \bar{c}_j < 0$. Por lo tanto, el cambio en costo de la solución es: $c^T x' - c^T x = \theta^* c^T d^j < 0$. El costo cambia.

(e) (1.2 ptos) (V/F Demuestre o de un contraejemplo) Si una variable sale de la base en una iteración no degenerada del método Simplex entonces no vuelve más a la base.

Sol: Falso. Existen ejemplos que muestran que una variable que sale de la base en una iteración puede volver en una iteración posterior.

Por ejemplo el polihedro en $\mathbb{R}^2$ formado por

$$x_1 \leq 1,\ x_1 + x_2 \leq 3,\ \ -x_1 + x_2 \geq 0,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

. Con la función objetivo min $-x_2$, el punto óptimo es $(0,3)$. Si empezamos el método Simplex en $(0,0)$ este puede iterar al $(1,1)$, luego al $(1,2)$ y al $(0,3)$, que forman un camino de soluciones basicas factibles adjacentes con costos estrictamente decrecientes.

En formulacion estandar, este ejemplo tiene $m = 3$ restricciones de igualdad y $n = 5$ variables (agregamos tres de holgura). Hay 3 variables basicas y 2 no basicas. En este caso, y con esta regla de pivoteo, la variable de holgura de la restriccion $x_1 \leq 1$ en la formulación estandard, (digamos u_1), está en la base en la solución inicial $(0,0,1,3,0)$, no está en la base en las dos iteraciones siguientes $(1,1,0,1,0)$ y $(1,2,0,0,1)$ pero vuelve a entrar en la solución óptima $(0,3,1,0,3)$.

2. **Pregunta 2**

(a) Considere el problema $\min_x \max_{i\in\{1,\dots,m\}} a_i^T x - b_i$ con valor óptimo p^* finito, donde A es la matrix de $n \times m$ con filas $a_1, \dots, a_m \subset \mathbb{R}^n$.

i. (2 puntos) Muestre que si $y \in \mathbb{R}^m$ es tal que $A^T y = 0$, $\sum_{i=1}^m y_i = 1$ e $y \geq 0$ entonces se tiene $-b^T y \leq p^*$.

ii. (2 puntos) Muestre que la mejor de estas cotas inferiores vale p^*. (Hint: la mejor cota inferior es $\max -b^T y \mid A^T y = 0,\ e^T y = 1,\ y \geq 0)$

(b) (2 puntos) Suponga que un problema en forma estandar es infactible pero el mismo problema sin la ultima restricción de igualdad tiene un óptimo finito. Muestre que el problema completo tiene un dual que es no acotado.

Sol:

a)

i. Considerando que para cualquier conjunto de valores reales $r_1, \dots, r_m$, es que tomar el máximo del conjunto es equivalente a maximizar la suma $\sum_{i\in[m]} \lambda_i r_i$ sobre los vectores $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tales que $\lambda \geq 0$ y $\sum_{i\in[m]} \lambda_i = 1$, pues el máximo se alcanzará al fijar en 1 al valor de λ_i correspondiente al r_i de mayor valor. Además, este máximo es ciertamente mayor o igual a la misma expresión tomada sobre un vector $\lambda \in \mathbb{R}^m$ arbitrario que satisfaga la condición expuesta.

Aplicando el análisis anterior al problema sobre un vector $\mathbf{y}$ que satisface las condiciones expuestas en el enunciado, cumpliendo el rol de los ponderadores y $\mathbf{b_i} - \mathbf{a_i'x}$ los elementos entre los cuales se busca el de mayor elemento:

$$
\begin{aligned}
p^* = \min_x \max_{i\in[m]} a_i'x - b_i &= \min_x \max_{\lambda\star} \sum_{i\in[m]} \lambda_i(a_i'x - b_i) \\
&= \min_x \max_{\lambda\star} (\lambda' Ax - \lambda' b) \\
&\geq \min_x (y'Ax - y'b) \\
&= \min_x -y'b \\
&= -y'b
\end{aligned}
$$

Tomando a $\lambda\star$ como una notación compacta que representa la condición que debiere cumplir λ para emplear la propiedad descrita, y dónde en la penúltima desigualdad se aplica que $\sum_{i\in[m]} \mathbf{y_i a_i' x} = \mathbf{x'A'y} = 0$ ya que $\mathbf{A'y} = 0$.

ii. Analizando el enunciado, es natural pensar que la mejor cota se obtiene a través del dual del problema original, la cual debiere coincidir con el modelo presentado en el *Hint*. Por esto mismo, se busca demostrar que los problemas son duales:

$$\min_{x} \quad \max_{i\in[m]} \quad a_i'x - b_i \qquad \iff \qquad \begin{aligned} \min_{x,z} \quad & z \\ \text{s.t.} \quad & z \geq a_i'x - b_i \qquad \forall i \in [m] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \min_{x,z} \quad & 0 \cdot x + 1 \cdot z \\ \text{s.t.} \quad & -a_i'x + z \geq -b_i \qquad \forall i \in [m] \end{aligned} \qquad \iff \qquad \begin{aligned} \min_{x,z} \quad & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} -A & \mathbf{e} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \geq -b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & -p'b \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} -A' \\ \mathbf{e}' \end{bmatrix} p = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ & p \geq 0 \end{aligned} \qquad \iff \qquad \begin{aligned} \max \quad & -p'b \\ \text{s.t.} \quad & -A'p = 0 \\ & \mathbf{e}'p = 1 \\ & p \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \quad & -y'b \\ \text{s.t.} \quad & A'y = 0 \\ & \sum_{i\in[m]} y_i = 1 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Habiendo linealizado y transformado a una notación matricial al problema original, es que se llega a que el problema dual coincide con el modelo entregado en el enunciado. Ahora bien, dado que estos problemas son duales, se concluye por Dualidad Fuerte.

a) *[Forma alternativa]*

i. Tal como sugiere el enunciado, el ideal sería formular el Dual del problema propuesto y luego concluir con Dualidad Débil. Para lograr esto, se inicia linealizando el problema entregado.

$$\min_{x} \quad \max_{i\in[m]} \quad a_i'x - b_i \qquad \iff \qquad \begin{aligned} \min_{x,z} \quad & z \\ \text{s.t.} \quad & z \geq a_i'x - b_i \qquad \forall i \in [m] \end{aligned}$$

Dónde la variable z juega el rol del máximo entre los $a_i'x - b_i$. Este nuevo problema es equivalente al original, pero ahora es lineal y tiene como variables de decisión a x y z. Así, se calcula su dual Lagrangeano:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x,z,y) &= z + \sum_{i\in[m]} y_i(a_i'x - b_i - z) \\ &= z - z\sum_{i\in[m]} y_i \; + \; y'Ax - y'b \\ &= \left(1 - \sum_{i\in[m]} y_i\right) z \; + \; y'Ax - y'b \end{aligned}$$

$$g(y) = \inf \mathcal{L}(\ ) = \begin{cases} -\,y'b & \text{si} \quad \sum_{i\in[m]} y_i = 1 \;\wedge\; y'A = 0 \\ -\,\infty & \text{si no} \end{cases}$$

Así, el problema dual buscado es:

$$\begin{aligned} \max \quad & -y'b \\ \text{s.t.} \quad & A'y = 0 \\ & \sum_{i\in[m]} y_i = 1 \\ & y \geq 0 \end{aligned}$$

Dónde se cumplen todos los elementos supuestos. Dado que estos problemas son duales, se llega a lo buscado con Dualidad Débil.

ii. Comprendiendo que el *Hint* corresponde al problema dual ya calculado, y que por enunciado el primal tiene un óptimo finito, es que la mejor cota se obtiene por Dualidad Fuerte.

b) Para demostrar lo solicitado, se inicia por detallar el problema propuesto y su dual.

$$\begin{aligned}(\text{P})\quad &\min\ \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ &\text{s.t.}\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ &\qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned}(\text{D})\quad &\max\ \mathbf{y}'\mathbf{b} \\ &\text{s.t.}\ \mathbf{A}'\mathbf{y} \leq \mathbf{c}\end{aligned}$$

En virtud de los teoremas de dualidad, dado que (P) es infactible es que (D) puede ser infactible o no acotado. Es por esto mismo que se desea demostrar que es no-infactible.

En forma similar, se plantea el problema modificado y sendo dual.

$$\begin{aligned}(\text{P'})\quad &\min\ \mathbf{c}'\mathbf{x} \\ &\text{s.t.}\ \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{b}} \\ &\qquad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned}(\text{D'})\quad &\max\ \tilde{\mathbf{y}}'\tilde{\mathbf{b}} \\ &\text{s.t.}\ \tilde{\mathbf{A}}'\tilde{\mathbf{y}} \leq \mathbf{c}\end{aligned}$$

Donde (P') se diferencia de (P) por no tener la última restricción, o en términos matriciales, por no considerar la última fila de la matriz A. Ahora bien, sea $\hat{y}$ factible en (D'). Puesto que $(D) \wedge (D')$ presentan el mismo sistema, salvo por la última entrada de la variable de decisión, es que $[\hat{y}, 0]'$ es factible en (D). Dado que (D) es no-infactible, es que es no acotado.

3. **Pregunta 3** Considere el siguiente problema de optimización

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & x \in Q \\ & x \geq 0 \ , \end{array}$$

donde el conjunto $Q = \{x \mid v^T x \leq 1, \forall v \text{ tal que } Mv \leq g\}$.

(a) (1 punto) Demuestre que el conjunto Q es convexo.

(b) (2 puntos) Demuestre que los siguientes sistemas son alternantes

i. existe v tal que $v^T x > 1, \ Mv \leq g$

ii. existe u tal que $g^T u \leq 1, \ M^T u = x, \ u \geq 0$

(c) (3 puntos) Describa un esquema de generación de restricciones para resolver el problema, reemplazando el conjunto Q por un conjunto pequeño de las restricciones que definen Q. Encuentre el problema maestro y el subproblema que se debe resolver en cada iteración. ¿Qué tipo de problemas son? Explique las condiciones de término de este esquema y las cotas superiores e inferiores al valor óptimo (si existen) que el esquema entrega en cada iteracón.

Sol:

(a) Sean x e y en Q, $\lambda \in [0,1]$. Sea v tal que $Mv \leq g$. Entonces,

$$v^T(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda v^T x + (1-\lambda)v^T y \leq \lambda + (1-\lambda) = 1,$$

en donde la penúltima desigualdad se usó que x e y en Q. Entonces $\lambda x + (1-\lambda)y \in Q$ por lo que Q es convexo.

(b) Verificamos que ambos no pueden suceder a la vez. Si así fuera, entonces $v^T M^T \leq g^T$ por i. y multiplicando u por la derecha se obtiene que

$$1 < v^T x = v^T M^T u \leq g^T u \leq 1,$$

que es una contradicción. Para concluir, vemos el problema primal-dual

$$\begin{array}{llrcl} \text{(P)} & \min & g^T u & & \\ & \text{s.t.} & M^T u & = & u \\ & & x & \geq & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{llrcl} \text{(D)} & \max & v^T x & & \\ & \text{s.t.} & Mv & \leq & g. \end{array}$$

en donde sin pérdida de generalidad $g \geq 0$. Si ii. no se cumple, hay dos opciones:

i. El primal es infactible.

   Con esto, el dual puede ser infactible o no acotado. Como $v = 0$ es factible al ser g positivo, entonces el dual es no acotado. Esto nos entrega la existencia de v que cumple i.

ii. El primal es factible, pero $g^T u > 1$ para todo u factible.

   Esto nos dice que en particular el primal es acotado (y factible) y luego obtiene una solución óptima en un vértice, ya que está en forma estándar. Por dualidad fuerte, concluimos la existencia de v factible dual tal que $v^T x > 1$.

(c) Notar que Q es la intersección de semi-espacios $v^T x \leq 1$ tales que $Mv \leq g$. Así, los x que están en Q están caracterizados por si $\max\{v^T x \,|\, Mv \leq g\} \leq 1$. Por la pregunta anterior, este máximo es menor que 1 si existe un u que cumpla i. Entonces Q es la proyección en x del poliedro

$$\{(x, u) \,:\, g^T u \leq 1,\, M^T u - x = 0,\, u \geq 0\}.$$

Al ser Q poliedro, es la intersección de finitos semi-espacios. Sea J el conjunto que vamos a ir actualizando (añadiendo estos semi-espacios), partiendo de vacío. El problema maestro es

$$\begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.a} & Ax = b \\ & v_i^T x \leq 1,\, i \in J \\ & x \geq 0\ , \end{array}$$

El problema nos entrega una solución x que hay que ver que sea factible en el problema original. Para esto, solo hay que resolver el problema primal de la parte (b) (otra opción también es verificar todas las restricciones de J). Si no es factible o el óptimo es mayor que uno, añadimos una restricción a J. El problema termina cuando el primal de la parte (b) obtiene un óptimo menor o igual que uno.

El algoritmo siempre entrega una cota inferior al valor óptimo por como está construido (trabajamos en un espacio más pequeño), y ninguna para el valor superior.