IN77O - Modelos y Algoritmos de Optimización

Resumen Descomposición de Benders

Basado en el Capítulo 6 del libro *Introduction to linear optimization*

Profesor: Fernando Ordóñez
Auxiliares: Benjamín Barrientos, José Miguel González

Descomposición de Benders

Considere un tomador de decisiones que debe actuar en dos etapas consecutivas. La primera involucra la elección de un vector de decisión $\mathbf{x}$. Posteriormente, se obtiene un poco de información nueva, y luego, en la segunda etapa, un nuevo vector $\mathbf{y}$ de decisiones debe ser elegido. Con respecto a la naturaleza de la información obtenida, asumimos que hay K posibles escenarios, y que el escenario real sólo se revela después de haber escogido $\mathbf{x}$. Se usa ω para indexar los posibles escenarios y se denota $\alpha_\omega > 0$ como la probabilidad asociada al escenario ω. Dados los vectores de costo $\mathbf{c}$ y $\mathbf{f}$ asociados a las decisiones $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}_\omega$ respectivamente, se tiene que las decisiones de la primera etapa deben satisfacer las restricciones:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{Ax} & = & \mathbf{b} \\ \mathbf{x} & \geq & \mathbf{0} \end{array}$$

Adicionalmente, las decisiones de primera y segunda etapa deben satisfacer:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{B}_\omega\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{y}_\omega & = & \mathbf{d}_\omega \\ \mathbf{y}_\omega & \geq & \mathbf{0} \end{array}$$

para todo ω. El objetivo es escoger $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_K$ tales que:

$$\begin{array}{llllllll} \min & \mathbf{c}'\mathbf{x} & + & \alpha_1\mathbf{f}'\mathbf{y}_1 + & \dots & +\alpha_K\mathbf{f}'\mathbf{y}_K & & \\ \text{s.a.} & \mathbf{Ax} & & & & & = \mathbf{b} \\ & \mathbf{B}_1\mathbf{x} & + & \mathbf{D}\mathbf{y}_1 + & & & = \mathbf{d}_1 \\ & \mathbf{B}_2\mathbf{x} & + & & \mathbf{D}\mathbf{y}_2 + & & = \mathbf{d}_2 \\ & \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ & \mathbf{B}_K\mathbf{x} & + & & & +\mathbf{D}\mathbf{y}_K & = \mathbf{d}_K \end{array}$$

$$\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, ..., \mathbf{y}_K \geq \mathbf{0}$$

Este problema se llamará **problema maestro**. Dada la cantidad de escenarios, este puede ser un problema de optimización lineal de gran tamaño.

Considere un vector $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$, y suponga que esta es la elección de decisiones para la primera etapa. Una vez que $\mathbf{x}$ está fijo, las decisiones óptimas de segunda etapa $\mathbf{y}_\omega$ pueden determinarse por separado resolviendo para cada ω el problema:

$$\begin{array}{lll} \min & \mathbf{f}'\mathbf{y}_\omega & \\ \text{s.a.} & \mathbf{B}_\omega\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{y}_\omega & = \mathbf{d}_\omega \\ & \mathbf{y}_\omega & \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Sea $z_\omega(\mathbf{x})$ el costo óptimo del problema anterior, junto con la convención de que $z_\omega(\mathbf{x}) = \infty$ si el problema es infactible. Si se vuelve a la optimización de $\mathbf{x}$:

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{c}'\mathbf{x} + \displaystyle\sum_{\omega=1}^{K} \alpha_\omega z_\omega(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_\omega \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Por supuesto, para resolver este problema sólo consideramos los $\mathbf{x}$ tales que ninguno de los $z_\omega(\mathbf{x})$ son ∞.

El dual del problema de minimizar los costos para cada escenario ω está dado por:

$$\begin{array}{ll} \max & \mathbf{p}_\omega'(\mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x}) \\ \text{s.a.} & \mathbf{p}_\omega' \mathbf{D} \leq \mathbf{f}' \end{array}$$

Sea

$$\mathcal{P} = \{\mathbf{p} \mid \mathbf{p}'\mathbf{D} \leq \mathbf{f}'\} \qquad \neq \varnothing$$

Sean $\mathbf{p}^i$, $i = 1, ..., I$ los puntos extremos de $\mathcal{P}$, y sean $\mathbf{w}^j$, $j = 1, ..., J$ el conjunto completo de los rayos extremos de $\mathcal{P}$. Se tiene que $z_\omega(\mathbf{x}) < \infty$ si y solo si:

$$(\mathbf{w}^j)'(\mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x}) \leq 0 \qquad \forall j$$

Cuando $z_\omega(\mathbf{x})$ es finito, es el costo óptimo del problema anterior, y este óptimo debe alcanzarse en un punto extremo de $\mathcal{P}$. En particular:

$$z_\omega(\mathbf{x}) = \max_{i=1,...,I} (\mathbf{p}^i)'(\mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x})$$

Alternativamente, $z_\omega(\mathbf{x})$ es el número más chico z_ω tal que:

$$(\mathbf{p}^i)'(\mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x}) \leq z_\omega$$

Luego, el problema maestro se puede escribir como:

$$\begin{array}{lll} \min & \mathbf{c}'\mathbf{x} + \sum_{\omega=1}^{K} \alpha_\omega z_\omega & \\ \text{s.a.} & \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} & \\ & (\mathbf{p}^i)'(\mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x}) \leq z_\omega & \forall i, \omega \\ & (\mathbf{w}^j)'(\mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x}) \leq \mathbf{0} & \forall j, \omega \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} & \end{array}$$

El número de variables se redujo considerablemente, pero el número de restricciones puede ser gigante.

Para cada $\omega = 1, ..., K$ se considera el sub problema:

$$\begin{array}{ll} \min & \mathbf{f}'\mathbf{y}_\omega \\ \text{s.a.} & \mathbf{D}\mathbf{y}_\omega = \mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x}^* \\ & \mathbf{y}_\omega \geq \mathbf{0} \end{array}$$

Notar que los sub problemas solo difieren en el lado derecho. En particular, el problema dual correspondiente tiene siempre el mismo conjunto factible, que se denota $\mathcal{P}$. Por eso, se resuelven los sub problemas mediante el método simplex dual. Los posibles casos a considerar son:

- Si el método simplex dual indica que un sub problema (primal) es infactible, entrega un rayo extremo $\mathbf{w}^{j(\omega)}$ del conjunto dual factible $\mathcal{P}$ tal que:

  $$(\mathbf{w}^{j(\omega)})'(\mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x}^*) > 0$$

  Se identifica una restricción violada, que puede ser añadida al problema maestro.

- Ocurre lo mismo si el sub problema (primal) es factible y el método simplex dual devuelve una solución básica factible dual $\mathbf{p}^{i(\omega)}$ tal que:

  $$(\mathbf{p}^{i(\omega)})'(\mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x}^*) > z_\omega^*$$

- Si el sub problema (primal) es factible y el método simplex dual devuelve una solución básica factible dual $\mathbf{p}^{i(\omega)}$ tal que:
$$(\mathbf{p}^{i(\omega)})'(\mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x}^*) \leq z_\omega^*$$
para todo ω, entonces, por optimalidad de los $\mathbf{p}^{i(\omega)}$ se tendrá:
$$(\mathbf{p}^{i})'(\mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x}^*) \leq z_\omega^*$$
para todos los puntos extremos $\mathbf{p}^i$. Además:
$$(\mathbf{w}^{j})'(\mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x}^*) \leq 0$$
para todos los rayos extremos $\mathbf{w}^j$. Entonces, no se viola ninguna restricción, se tiene un óptimo para el problema maestro y el algoritmo termina.

El algoritmo de descomposición de Benders consiste en:

1. Una iteración típica comienza con un problema maestro relajado, en el cual, solo algunas de las restricciones del problema maestro original son incluidas. Una solución óptima $(\mathbf{x}^*, \mathbf{z}^*)$ del problema maestro relajado es calculada.

2. Para cada ω, se resuelve:
$$\begin{array}{rl} \min & \mathbf{f}'\mathbf{y}_\omega \\ \text{s.a.} & \mathbf{D}\mathbf{y}_\omega = \mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x}^* \\ & \mathbf{y}_\omega \geq \mathbf{0} \end{array}$$

3. Si para cada ω, el sub problema correspondiente es factible y el costo óptimo es $\leq z_\omega^*$, se satisfacen todas las restricciones, se tiene una solución óptima al problema maestro, y el algoritmo termina.

4. Si el sub problema correspondiente a algún ω tiene una solución óptima cuyo costo es $> z_\omega^*$, se encontró una solución básica factible óptima $\mathbf{p}^{i(\omega)}$ para el dual del sub problema, y la restricción
$$(\mathbf{p}^{i(\omega)})'(\mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x}^*) \leq z_\omega^*$$
se agrega al problema maestro relajado.

5. Si el sub problema correspondiente a algún ω es infactible, su dual tiene costo infinito, y se encuentra un rayo extremo con costo positivo $\mathbf{w}^{j(\omega}$. Entonces, la restricción
$$(\mathbf{w}^{j(\omega)})'(\mathbf{d}_\omega - \mathbf{B}_\omega \mathbf{x}^*) \leq 0$$
se agrega al problema maestro relajado.