IN77O - Modelos y Algoritmos de Optimización

Resumen Teoría de Dualidad II

Basado en el Capítulo 4 del libro *Introduction to linear optimization*

Profesor: Fernando Ordóñez
Auxiliares: Benjamín Barrientos, José Miguel González

4.6. Lema de Farkas y desigualdades lineales

Teorema 4.6. (Lema de Farkas) Sea $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y sea $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Entonces, exactamente una de las siguientes alternativas se cumple:

(a) Existe algún $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

(b) Existe algún vector $\mathbf{y}$ tal que $\mathbf{y'A} \geq \mathbf{0'}$ e $\mathbf{y'b} < 0$.

Corolario 4.3. Sean $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ y $\mathbf{b}$ vectores dados, y suponga que cualquier vector $\mathbf{y}$ que satisfaga $y'\mathbf{A}_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$, también debe satisfacer $\mathbf{y'b} \geq 0$. Entonces, $\mathbf{b}$ puede ser expresado como una combinación lineal no negativa de los vectores $\mathbf{A}_1, ..., \mathbf{A}_n$.

Teorema 4.7. Suponga que el sistema de inecuaciones lineales $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ tiene al menos una solución, y sea d algún escalar. Entonces, las siguientes son equivalentes:

(a) Cada solución factible del sistema $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$ satisface $\mathbf{c'x} \leq d$.

(b) Existe algún $\mathbf{y} \geq 0$ tal que $\mathbf{y'A} = \mathbf{c'}$ y $\mathbf{y'b} \leq d$.

4.8. Conos y rayos extremos

Definición 4.1. Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ es un **cono** si $\lambda\mathbf{x} \in C$ para todo $\lambda \geq 0$ y todo $\mathbf{x} \in C$.

Observaciones:

- El único posible punto extremo de un cono es el vector $\mathbf{0}$. Si un cono tiene al $\mathbf{0}$ como punto extremo, se dice que el cono es **punteado**.
- Un poliedro de la forma $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}\}$ es llamado **cono poliedral**.

Teorema 4.12. Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ el cono poliedral definido por las restricciones $\mathbf{a}_i'\mathbf{x} \geq 0$, $i = 1, ..., m$. Entonces, las siguientes son equivalentes:

(a) El vector cero es un punto extremo de C.

(b) El cono C no contiene una línea.

(c) Existen n vectores de la familia $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m$ que son linealmente independientes.

Definición 4.2.

(a) Dado un poliedro $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}\}$ y un vector $\mathbf{y} \in P$, se define el **cono de recesión en y** como el conjunto de todas las direcciones $\mathbf{d}$ en las cuales nos podemos mover indefinidamente lejos de $\mathbf{y}$, sin dejar el conjunto P. Esto es:

$$\{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{A}(\mathbf{y} + \lambda\mathbf{d}) \geq \mathbf{b}, \forall\lambda \geq 0\} = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{Ad} \geq \mathbf{0}\}$$

(b) Los elementos distintos de cero del cono de recesión se llaman **rayos** del poliedro P.

(c) Un elemento $\mathbf{x}$ distinto de cero de un cono poliedral $C \subset \mathbb{R}^n$ es llamado un **rayo extremo** si hay $(n-1)$ restricciones linealmente independientes que son activas en $\mathbf{x}$.

(d) Un rayo extremo del cono de recesión asociado con un poliedro no vacío P también se denomina **rayo extremo** de P.

Teorema 4.13. Consideremos el problema de minimizar $\mathbf{c}'\mathbf{x}$ sobre un cono poliedral punteado $C = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{a_i}'\mathbf{x} \geq \mathbf{0},\ i = 1, \ldots, m\}$. Entonces, el costo óptimo es igual a $-\infty$ si y sólo si algún rayo extremo $\mathbf{d}$ de C satisface $\mathbf{c}'\mathbf{d} < 0$.

Teorema 4.14. Consideremos el problema de minimizar $\mathbf{c}'\mathbf{x}$ sujeto a $\mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}$, y asumamos que el conjunto factible tiene al menos un punto extremo. Entonces, el costo óptimo es igual a $-\infty$ si y sólo si algún rayo extremo $\mathbf{d}$ del conjunto factible satisface $\mathbf{c}'\mathbf{d} < 0$.

4.9. Representación de poliedros

Teorema 4.15. Sea

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}\}$$

un poliedro no vacío con al menos un punto extremo. Sean $\mathbf{x}^1, ..., \mathbf{x}^k$ los puntos extremos, y sea $\mathbf{w}^1, ..., \mathbf{w}^r$ el conjunto completo de los rayos extremos de P. Sea además:

$$Q = \left\{ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{x}^i + \sum_{j=1}^{r} \theta_j \mathbf{w}^j \middle| \lambda_i \geq 0, \theta_j \geq 0, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

Entonces, $Q = P$.

Corolario 4.4. Un poliedro no vacío y acotado es la envoltura convexa de sus puntos extremos.

Corolario 4.5. Asuma que el cono $C = \{\mathbf{x} | \mathbf{Ax} \geq \mathbf{0}\}$ es punteado. Entonces, cada elemento de C puede ser expresado como una combinación lineal no negativa de los rayos extremos de C.

Referencias

[1] D. Bertsimas y J.N. Tsitsiklis. *Introduction to linear optimization*. Athena Scientific, 1997.