IN77O - Modelos y Algoritmos de Optimización

Conjuntos Convexos

Basado en el Capítulo 2 del libro *Convex Optimization*

Profesor: Fernando Ordóñez
Auxiliares: Benjamín Barrientos, José Miguel González

2. Conjuntos convexos

2.1. Conjuntos afines y convexos

2.1.1. Líneas y segmentos de línea

Definición 2.1. Una **línea** entre dos puntos $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x_2} \in \mathbb{R}^n$ se define como

$$\mathbf{y} = \theta\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 \qquad \theta \in \mathbb{R}$$

Si $\theta \in [0,1]$, $\mathbf{y}$ corresponde al **segmento de línea** entre $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$

2.1.2. Conjuntos afines

Definición 2.2. Un conjunto $C \in \mathbb{R}^n$ es **afín** si para todo par de puntos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C$ y para todo $\theta \in \mathbb{R}$, se tiene que $\theta\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 \in C$.

Observación: Si C es un conjunto afín y $\mathbf{x}_0 \in C$, entonces el conjunto $V = C - \mathbf{x}_0 = \{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \mid x \in C\}$ es un subespacio vectorial, es decir, es cerrado para la suma y el producto por escalares.

Definición 2.3. Sean $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ y sean $\theta_1, ..., \theta_k \in \mathbb{R}$ tales que $\theta_1 + ... + \theta_k = 1$. Se define la **combinación afín** de los vectores $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_k$ como:

$$\mathbf{y} = \theta_1\mathbf{x}_1 + ... + \theta_k\mathbf{x}_k$$

Definición 2.4. La **envoltura afín** de un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$, denotada aff C, es:

$$\text{aff } C = \{\theta_1\mathbf{x}_1 + \ldots \theta_k\mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in C, \theta_1 + \ldots + \theta_k = 1\}$$

aff C es el conjunto afín más pequeño que contiene a C.

2.1.3. Dimensión afín e interior relativo

Definición 2.5. La **dimensión** de un conjunto afín C se define como la dimensión del subespacio vectorial $C - \mathbf{x}_0$, donde $\mathbf{x}_0$ es cualquier elemento de C.

Definición 2.6. El **interior relativo** de un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$, denotado relint C, es su interior considerado en relación a aff C, es decir:

$$\text{relint } C = \{\mathbf{x} \in C \mid \exists\ r > 0 : B(\mathbf{x}, r) \cap \text{aff } C \subseteq C\}$$

donde $B(\mathbf{x}, r) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid ||y - x|| \leq r\}$ es la bola de radio r y centro $\mathbf{x}$ respecto a la norma $|| \cdot ||$.

2.1.4. Conjuntos convexos

Definición 2.7. Un conjunto $C \in \mathbb{R}^n$ es **convexo** si para todo par de puntos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C$ y para todo $\theta \in [0,1]$, se tiene que $\theta\mathbf{x}_1 + (1-\theta)\mathbf{x}_2 \in C$.

Observación: Todo conjunto afín es convexo.

Definición 2.8. La **envoltura convexa** de un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$, denotada conv C, es:

$$\text{conv } C = \{\theta_1\mathbf{x}_1 + \ldots \theta_k\mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in C, \theta_1, \ldots, \theta_k \geq 0, \theta_1 + \ldots + \theta_k = 1\}$$

conv C es el conjunto convexo más pequeño que contiene a C.

2.1.5. Conos

Definición 2.9. Un conjunto $C \in \mathbb{R}^n$ es un **cono** si para todo $\mathbf{x} \in C$ y $\theta \geq 0$, se tiene que $\theta\mathbf{x} \in C$. C es un **cono convexo** si es un cono y es convexo, lo que equivale a que para todo par de puntos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in C$ y para todo $\theta_1, \theta_2 \geq 0$, se tiene que $\theta_1\mathbf{x}_1 + \theta_2\mathbf{x}_2 \in C$.

Definición 2.10. La **envoltura cónica** de un conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ es:

$$\{\theta_1\mathbf{x}_1 + \ldots \theta_k\mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k \in C, \theta_1, \ldots, \theta_k \geq 0\}$$

Este es el cono convexo más pequeño que contiene a C.

2.3. Operaciones que preservan la convexidad de conjuntos

2.3.1. Intersección

Si S_1 y S_2 son conjuntos convexos, entonces $S_1 \cap S_2$ también lo es. Esto es igualmente cierto para la intersección de un número infinito de conjuntos, y no solo para conjuntos convexos sino también para subespacios vectoriales, conjuntos afines y conos convexos.

2.3.2. Funciones afines

Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es afín si tiene la forma $f(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}$, donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$.
Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo y $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función afín. Entonces, la imagen de S bajo f, es decir:

$$f(S) = \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in S\}$$

es un conjunto convexo. Asimismo, si $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ es una función afín, la preimagen de S bajo f, es decir:

$$f^{-1}(S) = \{\mathbf{x} \mid f(\mathbf{x}) \in S\}$$

es un conjunto convexo.

2.3.3. Función perspectiva y proyectiva

Se define la **función perspectiva** $P : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, con dominio $\mathrm{dom}P = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++}$, como $P(\mathbf{z}, t) = \frac{1}{t}\mathbf{x}$.
Si $C \subseteq \mathrm{dom}P$ es convexo, entonces su imagen:

$$P(C) = \{P(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in C\}$$

también lo es.
Se define la **función proyectiva** como la composición de la función perspectiva con una función afín. Más específicamente, una función proyectiva $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tiene la forma:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{c}'\mathbf{x} + d}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b})$$

donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ y $d \in \mathbb{R}$, y el dominio de f es $\mathrm{dom}f = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{c}'\mathbf{x} + d > 0\}$. Si $\mathbf{c} = 0$ y $d > 0$, f es una función afín, por tanto podemos pensar en las funciones afines como casos especiales de funciones proyectivas. Si $C \subseteq \mathrm{dom}f$ es convexo, entonces su imagen:

$$f(C) = \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in C\}$$

también lo es.