IN77O - Modelos y Algoritmos de Optimización

Resumen Geometría de la Programación Lineal

Basado en el Capítulo 2 del libro *Introduction to linear optimization*

Profesor: Fernando Ordóñez
Auxiliares: Benjamín Barrientos, José Miguel González

2. Geometría de la Programación Lineal

2.1. Poliedros y conjuntos convexos

Definición 2.1. $P \subseteq \mathbb{R}^n$ es un **poliedro** si puede ser representado como un conjunto finito de inecuaciones lineales. Esto es:

$$P := \{\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{Ax} \geq \mathbf{b}\}$$

donde $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ y m es el número de inecuaciones. La región factible de un *problema de programación lineal* es un poliedro.

Definición 2.2. Un conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ es **acotado** si existe una constante K tal que el valor absoluto de cada componente de cada elemento de S es menor o igual que K.

Definición 2.3. Sea $\mathbf{a} \neq \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ y sea b un escalar:

(a) El conjunto $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}'\mathbf{x} = b\}$ corresponde a un **hiperplano**

(b) El conjunto $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}'\mathbf{x} \geq b\}$ corresponde a un **semiespacio**

Todo semiespacio está delimitado por el hiperplano correspondiente.

Definición 2.4. Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^n$ es **convexo** si:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in S,\ \forall \lambda \in [0, 1] \qquad \lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y} \in S$$

En particular, se tiene que los poliedros son conjuntos convexos.

Definición 2.5. Sean $\mathbf{x}^1, ..., \mathbf{x}^k$ vectores $\in \mathbb{R}^n$ y sean $\lambda_1, ..., \lambda_k \geq 0$ escalares tales que $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$:

(a) El vector $\sum_{i=1}^k \lambda_i \mathbf{x}^i$ es una **combinación convexa** de los vectores $\mathbf{x}^1, ..., \mathbf{x}^k$.

(b) La **envoltura convexa** de los vectores $\mathbf{x}^1, ..., \mathbf{x}^k$ es el conjunto de todas las combinaciones convexas de estos vectores

Teorema 2.1.

(a) La intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo.

(b) Todos los poliedros son conjuntos convexos.

(c) Una combinación convexa de un número finito de elementos de un conjunto convexo también pertenece a ese conjunto.

(d) La envoltura convexa de un número finito de vectores es un conjunto convexo.

2.2. Puntos extremos, vértices y soluciones básicas factibles

Definición 2.6. Un **punto extremo** es aquel que no puede ser expresado como una combinación convexa de otros dos puntos de un poliedro. Es decir, $\mathbf{x}$ es punto extremo si y solo si:

$$\nexists \mathbf{y}, \mathbf{z} \in P \setminus \{\mathbf{x}\}, \lambda \in [0,1] : \qquad \mathbf{x} = \lambda \mathbf{y} + (1-\lambda)\mathbf{z}$$

Definición 2.7. Un punto $\mathbf{x}$ es **vértice** de un poliedro P si existe un hiperplano que intersecta a P sólo en el punto $\mathbf{x}$. Esto es:

$$\exists \mathbf{c} \mid \mathbf{c}'\mathbf{x} < \mathbf{c}'\mathbf{y} \ \ \forall \mathbf{y} \neq \mathbf{x} \in P$$

Definición 2.8. Si un vector $\mathbf{x}^*$ satisface $\mathbf{a}_i'\mathbf{x}^* = b_i$ para algún i, se dice que la i-ésima restricción es **activa** en $\mathbf{x}^*$.

Teorema 2.2. Sea $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$ y sea $I = \{i : \mathbf{a}_i'\mathbf{x}^* = \mathbf{b}_i\}$ el conjunto de todas las restricciones activas en $\mathbf{x}^*$. Entonces, las siguientes son equivalentes:

(a) Existen n vectores en el conjunto $\{\mathbf{a}_i \mid i \in I\}$ que son linealmente independientes.

(b) La colección de vectores $\mathbf{a}_i$ con $i \in I$ son una base de $\mathbb{R}^n$

(c) El sistema de ecuaciones de todas las restricciones activas tiene solución única.

Definición 2.9. Sea un poliedro P definido por restricciones lineales de igualdad y desigualdad, y sea $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$:

(a) $\mathbf{x}^*$ es una **solución básica** si:

   (i) Todas las restricciones de igualdad son activas.

   (ii) De las restricciones que son activas en $\mathbf{x}^*$, hay n de ellas que son linealmente independientes.

(b) Si $\mathbf{x}^*$ es una solución básica que satisface todas las restricciones, se dice que es una **solución básica factible**.

Teorema 2.3. Sea P un poliedro no vacío, y sea $\mathbf{x}^* \in P$. Entonces, las siguientes son equivalentes:

(a) $\mathbf{x}^*$ es un vértice;

(b) $\mathbf{x}^*$ es un punto extremo;

(c) $\mathbf{x}^*$ es solución básica factible.

Corolario 2.1. Dado un número finito de restricciones lineales de desigualdad, solo puede haber un número finito de soluciones básicas o soluciones básicas factibles.

2.3. Poliedros en forma estándar

Un poliedro en **forma estándar** es aquel que puede ser representado solo con restricciones de igualdad y solo con variables no negativas. Es decir:

$$P := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$

Sin pérdida de generalidad, se asume que las m restricciones son linealmente independientes, lo que implica que $m \leq n$.
Para representar la región factible de un PPL como un poliedro en forma estándar, puede ser útil considerar:

- Sumar o restar *variables de holgura* $x_{h_k} \geq 0$ en desigualdades para transformarlas en igualdades.
- En el caso que $x_j \leq 0$, cambiar x_j por $-x_j$ y así poder definir $x_j \geq 0$.
- Escribir como $x_i^+ - x_i^-$ con $x_i^+, x_i^- \geq 0$ las variables x_i que no tengan restricción de signo ($x_i \in \mathbb{R}$).

Teorema 2.4. Considere las restricciones $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $\mathbf{x} \geq 0$, y asuma que la matriz $\mathbf{A}$ tiene filas linealmente independientes. Un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ es una solución básica si y sólo si $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, y si existen índices $B(1), ..., B(m)$ tales que:

(a) Las columnas $\mathbf{A}_{B(1)}, ..., \mathbf{A}_{B(m)}$ son linealmente independientes;

(b) Si $i \neq B(1), ..., B(m)$, entonces $x_i = 0$.

El procedimiento para construir soluciones básicas es:

1. Elegir m columnas linealmente independientes $\mathbf{A}_{B(1)}, ..., \mathbf{A}_{B(m)}$.
2. Dejar $x_i = 0$ para todos los $i \neq B(1), ..., B(m)$.
3. Resolver el sistema de m ecuaciones $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ para las incógnitas $x_{B(1)}, ..., x_{B(m)}$. Estas incógnitas recibirán el nombre de **variables básicas**.

Teorema 2.5. Sea $P = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$ un poliedro no vacío, donde $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $\mathbf{a}'_1, ..., \mathbf{a}'_m$ son las filas de $\mathbf{A}$, rango$(\mathbf{A}) = k < m$, y las filas $\mathbf{a}'_{i_1}, ..., \mathbf{a}'_{i_k}$ son linealmente independientes. Sea

$$Q = \left\{\mathbf{x} \mid \mathbf{a}'_{i_1}\mathbf{x} = b_{i_1}, ..., \mathbf{a}'_{i_k}\mathbf{x} = b_{i_k}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\right\}$$

Entonces, $Q = P$.

2.4. Degenerancia

Definición 2.10. Una solución básica $\mathbf{x}$ se dice **degenerada** si hay más de n restricciones activas en $\mathbf{x}$,

Definición 2.11. Considere el poliedro en forma estándar $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n | \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq 0\}$ y sea $\mathbf{x}$ una solución básica. Sea m el número de filas de $\mathbf{A}$. El vector $\mathbf{x}$ es solución básica **degenerada** si hay más de $n - m$ componentes de $\mathbf{x}$ que son cero.

2.5. Existencia de puntos extremos y optimalidad

Definición 2.12. Un poliedro $P \subset \mathbb{R}^n$ **contiene una línea** si existe un vector $\mathbf{x} \in P$ y un vector no nulo $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\mathbf{x} + \lambda \mathbf{d} \in P$ para cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema 2.6. Dado un poliedro $P := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{a}_i'\mathbf{x} \geq b_i,\ i = 1, ..., m\}$ no vacío, entonces, las siguientes son equivalentes:

(a) El poliedro P tiene al menos un punto extremo.

(b) El poliedro P no contiene una recta.

(c) Existen n vectores de la familia $\mathbf{a}_1, ..., \mathbf{a}_m$ que son linealmente independientes.

Corolario 2.2. Todo poliedro no vacío acotado y todo poliedro no vacío en forma estándar tiene al menos una solución básica factible.

2.6. Optimalidad de puntos extremos

Teorema 2.7. Considere el problema de programación lineal que consiste en minimizar $\mathbf{c}'\mathbf{x}$ con $\mathbf{x} \in P$. Suponga además que P tiene al menos un punto extremo. Entonces, o el costo óptimo es $-\infty$, o existe un punto extremo de P que es óptimo.

Corolario 2.3. Considere el problema de programación linear de minimizar $\mathbf{c}'\mathbf{x}$ sobre un poliedro no vacío. Entonces, o el costo óptimo es $-\infty$, o existe una solución óptima.

Referencias

[1] D. Bertsimas y J.N. Tsitsiklis. *Introduction to linear optimization.* Athena Scientific, 1997.