# IN77O - Modelos y Algoritmos de Optimización

Separación y Conos Propios

Basado en el Capítulo 2 del libro *Convex Optimization*

Profesor: Fernando Ordóñez
Auxiliares: Benjamín Barrientos, José Miguel González

## 1. Desigualdades generalizadas

### 1.1. Conos propios y desigualdades generalizadas

**Definición 1.1.** Un cono $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un **cono propio** si satisface las siguientes propiedades:

- $K$ es convexo.
- $K$ es cerrado.
- $K$ es sólido, es decir, tiene interior no vacío.
- K es "puntudo", es decir, no contiene una línea (o equivalentemente, si $\mathbf{x} \in K$ y $-\mathbf{x} \in K$, entonces $\mathbf{x} = \mathbf{0}$).

**Definición 1.2.** La **desigualdad generalizada** respecto al cono propio $K \subseteq \mathbb{R}^n$, que denotamos por $\preceq_K$ es una relación de orden parcial en $\mathbb{R}^n$ definida por:

$$\mathbf{x} \preceq_K \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} - \mathbf{x} \in K$$

Se utiliza también $\mathbf{x} \succeq_K \mathbf{y}$ para denotar $\mathbf{y} \preceq_K \mathbf{x}$. Se define similarmente la desigualdad generalizada estricta, $\prec_K$, como:

$$\mathbf{x} \prec_K \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{y} - \mathbf{x} \in \mathrm{int} K$$

y se utiliza también $\mathbf{x} \succ_K \mathbf{y}$ para denotar $\mathbf{y} \prec_K \mathbf{x}$.

**Observación:** Cuando $K = \mathbb{R}_+$, el orden parcial $\preceq_K$ es el orden usual $\leq$ sobre $\mathbb{R}$, y el orden parcial estricto $\prec_K$ es el orden estricto usual $<$ sobre $\mathbb{R}$.

### 1.2. Elementos mínimos y minimales

**Definición 1.3.** Decimos que $\mathbf{x} \in S$ es el **elemento mínimo** de $S$, respecto a la desigualdad generalizada $\preceq_K$, si para todo $\mathbf{y} \in S$ se tiene $\mathbf{x} \preceq_K \mathbf{y}$. Se define el elemento máximo de $S$ respecto a la desigualdad generalizada $\preceq_K$ en forma análoga.

**Observación:** Si un elemento tiene un elemento mínimo (o máximo), entonces es único.

**Definición 1.4.** Decimos que $\mathbf{x} \in S$ es un **elemento minimal** de $S$, respecto a la desigualdad generalizada $\preceq_K$, si para todo $\mathbf{y} \in S$ se tiene que $\mathbf{y} \preceq_K \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{x}$. Se define un elemento maximal de $S$ respecto a la desigualdad generalizada $\preceq_K$ en forma análoga.

**Observación:** Un conjunto puede tener varios elementos minimales (y maximales).
Si denotamos $\mathbf{x} + K$ a los puntos que son mayores o iguales a $\mathbf{x}$ según $\preceq_K$, y $\mathbf{x} - K$ a los puntos menores o iguales a $\mathbf{x}$ según $\preceq_K$, entonces:

- $\mathbf{x} \in S$ es el elemento mínimo de $S$ si y solo si:

$$S \subseteq \mathbf{x} + K$$

- $\mathbf{x} \in S$ es un elemento minimal de $S$ si y solo si:

$$(\mathbf{x} - K) \cap S = \{\mathbf{x}\}$$

# 2. Hiperplanos separadores y soporte

## 2.1. Teorema del hiperplano separador

**Teorema 2.1.** Suponga $C, D$ conjuntos convexos tales que $C \cap D = \varnothing$. Entonces, existe $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ y $b$ tal que $\mathbf{a'x} \leq b \ \forall \ \mathbf{x} \in C$ y $\mathbf{a'x} \geq b \ \forall \ \mathbf{x} \in D$.

El hiperplano $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{a'x} = b\}$ se llama **hiperplano separador** de los conjunto $C$ y $D$.

**Observación:** Imponiendo una condición adicional sobre los conjuntos tenemos una recíproca que nos permite escribir la siguiente equivalencia. Dos conjuntos convexos $C$ y $D$, de los cuales al menos uno es abierto, son disjuntos si y solo si existe un hiperplano separador (como el descrito en el teorema).

Añadiendo restricciones adicionales, también existe una versión del teorema con hiperplano separador estricto.

**Teorema 2.2.** Suponga $C, D$ conjuntos convexos y cerrados, al menos uno de ellos acotado y tales que $C \cap D = \varnothing$. Entonces, existe $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ y $b$ tal que $\mathbf{a'x} < b \ \forall \ \mathbf{x} \in C$ y $\mathbf{a'x} > b \ \forall \ \mathbf{x} \in D$.

## 2.2. Hiperplano soporte

**Definición 2.1.** Sea $C \subseteq \mathbb{R}^n$ y sea $\mathbf{x}_0$ un punto en el borde de $C$. Esto es:

$$\mathbf{x}_0 \in \text{bd } C = \text{cl } C \setminus \text{int } C$$

Si $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ satisface $\mathbf{a'x} \leq \mathbf{a'x}_0$, entonces el hiperplano $\{\mathbf{x} \mid \mathbf{a'x} = \mathbf{a'x}_0\}$ es llamado **hiperplano soporte** a $C$ en $\mathbf{x}_0$.

**Definición 2.2.** Si un hiperplano soporte intersecta a $C$ solo en $\mathbf{x}_0$, se le llama **hiperplano soporte estricto** a $C$ en $\mathbf{x}_0$.

**Teorema 2.3.** Para cualquier conjunto convexo $C \neq \varnothing$ y para cualquier $\mathbf{x}_0 \in \text{bd } C$, existe un hiperplano soporte a $C$ en $\mathbf{x}_0$.

**Observación:** Nuevamente, imponiendo condiciones adicionales sobre el conjunto tenemos una recíproca al teorema. Si un conjunto $C$ es cerrado, tiene interior no vacío y para todo $\mathbf{x}_0 \in \text{bd } C$ existe un hiperplano soporte a $C$ en $\mathbf{x}_0$, entonces $C$ es convexo.

# 3. Conos duales y desigualdades generalizadas

## 3.1. Conos duales

**Definición 3.1.** Sea $K$ un cono. El conjunto:

$$K^* = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{x'y} \geq 0 \ \forall x \in K\}$$

se denomina como el **cono dual** de $K$.

Como el nombre lo sugiere, $K^*$ es un cono y es siempre convexo, incluso cuando el cono original $K$ no lo es. Si $K^* = K$, se dice que $K$ es "autodual".

Un cono dual $K^*$ satisface las siguientes propiedades

- $K^*$ es convexo y cerrado

- Si $K_1 \subseteq K_2 \Longrightarrow K_2^* \subseteq K_1^*$
- Si $K$ tiene interior no vacío, entonces $K^*$ es puntudo.
- Si cl $K$ es puntudo, entonces $K^*$ tiene interior no vacío.
- $K^{**} = \text{cl}\,(\text{conv}\,K)$. Por lo tanto, si $K$ es convexo y cerrado, entonces $K^{**} = K$.

**Corolario 3.1.** Si $K$ es un cono propio, entonces su cono dual $K^*$ también lo es, y además se tiene que $K^{**} = K$

## 3.2. Desigualdades duales generalizadas

Sea $K$ un cono propio. Como su cono dual $K^*$ también es propio, y ambos inducen desigualdades generalizadas denotadas como $\preceq_K$ y $\preceq_{K^*}$ respectivamente. La desigualdad $\preceq_{K^*}$ será la dual de la desigualdad generalizada $\preceq_K$ Algunas propiedades importantes para una desigualdad generalizada y su dual son:

- $\mathbf{x} \preceq_K \mathbf{y}$ si y solo si $\boldsymbol{\lambda}'\mathbf{x} \leq \boldsymbol{\lambda}'\mathbf{y}$ para todo $\boldsymbol{\lambda} \succeq_{K^*} \mathbf{0}$
- $\mathbf{x} \prec_K \mathbf{y}$ si y solo si $\boldsymbol{\lambda}'\mathbf{x} < \boldsymbol{\lambda}'\mathbf{y}$ para todo $\boldsymbol{\lambda} \succeq_{K^*} \mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$

## 3.3. Elementos mínimos y minimales via desigualdades duales

**Definición 3.2.** Decimos que $\mathbf{x}$ es el **elemento mínimo** de $S$ con respecto a la desigualdad generalizada $\preceq_K$ si y solo si para todo $\boldsymbol{\lambda} \prec_{K^*}$, $\mathbf{x}$ es el único minimizador de $\boldsymbol{\lambda}'\mathbf{z}$ con $\mathbf{z} \in S$

Geométricamente, esto significa que para cualquier $\boldsymbol{\lambda} \prec_{K^*} \mathbf{0}$, el hiperplano

$$\{\mathbf{z} \mid \boldsymbol{\lambda}'(\mathbf{z} - \mathbf{x}) = \mathbf{0}\}$$

es un hiperplano soporte estricto a $S$ en $\mathbf{x}$.

**Teorema 3.1.** Si $\boldsymbol{\lambda} \prec_{K^*} \mathbf{0}$ y $\mathbf{x}$ minimiza $\boldsymbol{\lambda}'\mathbf{z}$ con $\mathbf{z} \in S$, entonces $\mathbf{x}$ es minimal de $S$.

**Teorema 3.2.** Sea $S$ convexo. $\mathbf{x}$ es minimal de $S$ si y solo si $\boldsymbol{\lambda} \preceq_{K^*} \mathbf{0}$ y $\mathbf{x}$ minimiza $\boldsymbol{\lambda}'\mathbf{z}$ con $\mathbf{z} \in S$ y $\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0}$.