Electromagnetismo FI2002-3 Otoño 2024
Profesora: Macarena Muñoz
Auxiliares: Martín Leiva, Andrés Lueiza
Ayudante: Hugo Cortés

Auxiliar 5: Potencial Eléctrico

P1: El cable que se comió mi gato

Un cable cilíndrico infinito de radio R con su eje de simetría coincidente con el eje z tiene una distribución de carga volumétrica $\rho(r)$ desconocida, pero se sabe que el campo eléctrico en el interior de este sigue la siguiente ley

$$\vec{E}(r < R) = kr^2\hat{r}$$

Donde k es una constante conocida y r es la distancia que hay de donde se mide el campo eléctrico hasta el eje z. Para $r > R$ hay vacío.

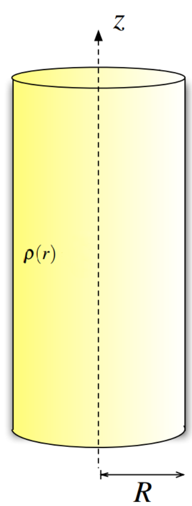

Figura 1: P1

a) Encuentre la distribución de carga $\rho(r)$ del cable.

b) El campo eléctrico $\vec{E}(r)$ en todo el espacio.

c) El potencial eléctrico $V(r)$ en todo el espacio. ¿Se puede usar un potencial tal que $V(r = \infty) = 0$?

d) Corrobore que $-\nabla V(r) = \vec{E}(r)$.

Recuerde: La divergencia y gradiente en coordenadas cilíndricas es

$$\nabla \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

P2: GRIFFIIIITHS!!! 2.28

Considere una esfera solida de radio R y carga total Q, encuentre el potencial eléctrico en el interior de esta usando:

a) Integración directa de la densidad de carga.

b) La integral de trabajo de $\vec{E}$, use un potencial tal que $V(r \to \infty) = 0$. Compare los resultados.

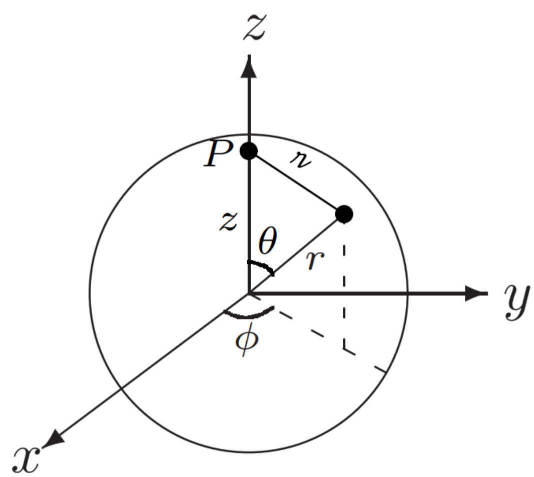

Figura 2: P2

P3: Propuesto

a) Determine el potencial eléctrico en todos los puntos del espacio producido por una línea recta infinita cargada con una densidad uniforme λ, estando el origen de potencial situado a una distancia a de la línea. ¿Por qué no puede tomarse el infinito como origen de potencial?

b) A partir del resultado anterior, calcule el potencial creado por dos líneas infinitas de carga, con densidades uniformes $+\lambda$ y $-\lambda$, situadas paralelamente a una distancia $2a$, tomando como origen de potencial un punto equidistante de ambas líneas.

c) Muestre que las superficies equipotenciales (a potencial constante) vienen dadas por casquetes cilíndricos cilindros.

Hint: Calcule el potencial de cada cable de forma individual, luego con principio de superposición encuentre el potencial de la configuración pedida. Para la parte c) basta con llegar a una ecuación de la circunferencia con x libre.

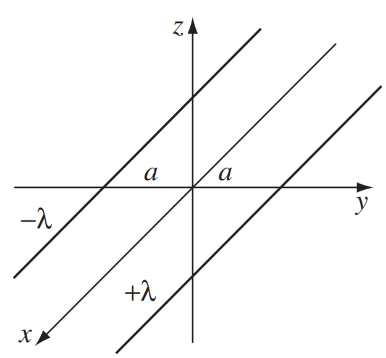

Figura 3: P3

Respuesta:

a) $V(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{\rho}{a}\right)$

b) $V(x, y, z) = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\left[\frac{(y+a)^2+z^2}{(y-a)^2+z^2}\right]$

c) $\left(y + a\frac{1+k}{1-k}\right)^2 + z^2 = \frac{4a^2k}{(1-k)^2}$, donde $k = e^{\frac{4\pi\varepsilon_0 V_0}{\lambda}}$ y V_0 es la constante a la que esta una equipotencial arbitraria, la ecuación representa un cilindro paralelo al eje x.

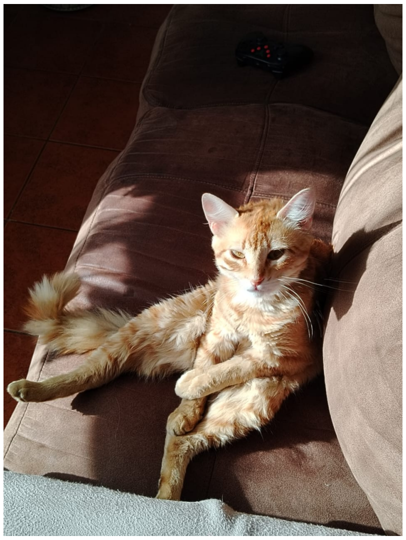

Figura 4: Relajao

Resumen

Ley de Gauss

La ley de Gauss en su forma diferencial es

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Realizando una integral de volumen y aplicando el teorema de la divergencia se llega a la forma integral de la ley de Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

La ley de Gauss es siempre valida, pero solo es útil cuando se tienen las siguientes simetrías en el campo eléctrico. Pasa asumir las simetrias correctas hay que ver que simetrias tiene ρ ya que $\vec{E}$ imita esas simetrias.

Potencial Eléctrico

Otra ley de la electrostática es la siguiente

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

Debido a la irrotacionalidad de $\vec{E}$ se puede definir un campo escalar V (potencial eléctrico) tal que

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Asi para la carga puntual se tiene que

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{||\vec{r} - \vec{r}\,'||}$$

Luego la extensión a distribuciones continuas es tomando $dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{||\vec{r} - \vec{r}\,'||}$, luego se integra, así

$$V(\vec{r}) = \int dV = \int \frac{\rho(\vec{r})}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d^3r'}{||\vec{r} - \vec{r}\,'||}, \int \frac{\sigma(\vec{r})}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d^2r'}{||\vec{r} - \vec{r}\,'||}, \int \frac{\lambda(\vec{r})}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dr'}{||\vec{r} - \vec{r}\,'||}$$

Dependiendo del tipo de distribución.

OJO: las integrales mostradas convergen únicamente si $\rho(\vec{r} \to \infty) = 0$, $\sigma(\vec{r} \to \infty) = 0$, $\lambda(\vec{r} \to \infty) = 0$, no significa que el potencial no exista, sino que se debe usar otros metodos como el siguiente

$$V(\vec{r}_b) - V(\vec{r}_a) = -\int_{\vec{r}_a}^{\vec{r}_b} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Notese que puedo definir $V' = V + \ "constante"$, luego como el gradiente de una constante es nulo, $\nabla V' = -\vec{E}$, lo que significa que un potencial no es único, por ende cuando se trabaje con el potencial **se necesita establecer cual de todos se usa**, para eso se debe mencionar cuanto vale el potencial es un lugar dado del espacio, **cuando la distribución de carga es finita usualmente se impone** $V(\vec{r} \to \infty) = 0$ por comodidad, aunque no hay problema si no se desea usar lo antes mencionado (pero es recomendable).