Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI2002: Electromagnetismo

Auxiliar 23

Fecha: 4 de julio de 2024
Profesor: Domenico Sapone
Auxiliares: Camila M., Bianca Z.
Ayudantes: Julio D., Gerd H.

"*Aprender* nos acerca más a entender nuestra realidad (y los secretos del Universo)."

P1. [**Campo eléctrico de un átomo**]
Un átomo está caracterizado por tener una gran concentración de cargas positivas en un pequeño núcleo, el cual está rodeado por una nube de cargas negativas. Este átomo se modela por la distribución volumétrica de carga $\rho(r) = \frac{Zq\alpha}{4\pi}\frac{1}{r^2}(1-\alpha)\, e^{-\alpha r}$, donde r es la coordenada radial, Z es el número atómico, q es la carga del electrón y α es un parámetro que da cuenta del apantallamiento de los electrones de capas inferiores. Determine el campo eléctrico en todo el espacio, bosqueje su gráfico según la variable radial y compare con el caso de una carga puntual $q_0 = Zq$.

P2. [**Campo eléctrico y su potencial en conductores**]
Se tiene una esferza maciza conductora de radio a a un potencial V_0 en toda su superficie. La esfera está recubierta por un casquete esférico conductor sin carga de radio interno b y radio externo c. Determine el campo eléctrico y el potencial eléctrico en todo el espacio, calculando las densidades de carga inducidas en todas las superficies.

P3. [**Condensadores**]
Considere un condensador formado por dos casquetes conductores cilíndricos concéntricos de largo L. El casquete interior es de radio a y tiene una carga Q distribuida, mientras que el casquete exterior de radio c tiene asociado una carga $-Q$. Si el espacio entre los casquetes se llena con dos materiales de constantes dieléctricas ε_1 y ε_2, haga un esquema y calcule la capacitancia del condensador:

(a) Cuando forman un par de capas cilíndricas, separadas en un radio b.

(b) Cuando están distribuidos a la mitad verticalmente.

P4. [**Dieléctricos**]
El volumen comprendido entre dos superficies esféricas conductoras y concéntricas de radio a y b para la interna y la externa, respectivamente, está relleno con un dieléctrico no homogéneo de permitividad $\epsilon(r) = \epsilon_0/(1+\beta r)$ con ϵ_0, β son constantes y r es la coordenada radial. En la superficie interna se pone una carga Q mientras que la exterior se conecta a tierra, tal que su diferencia de potencial con respecto al infinito es cero. Determine:

(a) Los vectores desplazamiento eléctrico y polarización, y el campo eléctrico en dicho volumen.

(b) La carga libre en la superficie conductora esférica externa; especifique el radio en que se distribuye y argumente porqué ocurre ese fenómeno físico.

(c) La capacitancia del sistema.

P5. [**Medios óhmicos**]
Se tiene un cable coaxial formado por dos cilindros metálicos concéntricos de longitud $d_1 + d_2$ y radios a y b (con $a \leq b$). El espacio entre ambos conductores se llena con dos medios dieléctricos no ideales, caracterizados por constantes dieléctricas y conductividades, en zonas de largo d_1 y d_2. Considere que se mantiene una diferencia de potencial V constante entre los cilindros conductores, y determine:

(a) El vector densidad de corriente, el campo eléctrico y desplazamiento eléctrico entre los conductores.

(b) La intensidad de corriente eléctrica que circula por el sistema, en cada medio.

(c) La resistencia y la capacidad del cable coaxial.

P6. [**Corriente**]
La radiación de una partícula radiactiva se puede modelar considerando una esfera de radio R_0 con carga inicial Q_0 que emite un flujo de carga $\vec{J} = J_0 \frac{1}{r^3} \hat{r}$, donde r y $\hat{r}$ son la coordenada y el vector unitario radial asociado al sistema de coordenadas esféricas con origen en el centro de la esfera.

(a) Determine el campo eléctrico en todo el espacio.

(b) Demuestre que el campo magnético al exterior de la partícula es nulo.

P7. [**Trayectoria de partículas y Ley de Lorentz**]
Una partícula de carga q y masa m se encuentra en reposo en el origen de coordenadas. Considere que se aplica un campo eléctrico $\vec{E}$ paralelo al eje x y un campo magnético $\vec{B}$ paralelo al eje z, ambos uniformes.

(a) Demuestre que las coordenadas de la partícula en función del tiempo t serán $x(t) = A(1-\cos(\omega t))$, $y(t) = -A(\omega t - \sin(\omega t))$ y $z(t) = 0$, con A y ω ciertas constantes reales.

(b) Determine el valor de las constantes A y ω.

(c) Bosqueje la trayectoria. Considere que se liberan electrones, de masa m_e y carga q_e, con velocidad nula desde una placa negativa de un condensador plano de placas paralelas, al cual se le aplica un campo magnético de magnitud B, uniforme paralelo a las placas. Considere que E es la magnitud del campo eléctrico entre las placas. Determine la separación crítica entre las placas tal que los electrones no alcancen a llegar a la placa positiva.

P8. [**Ley de Biot-Savart**]
Resuelva los siguientes problemas:

(a) Hay un alambre en forma de elipse paralelo al plano XY, cuya forma está descrita en coordenadas polares por la función $\rho(\phi) = \dfrac{R}{\alpha\cos(\phi)+1}$ para todo $\phi \in [0, 2\pi)$, con $R{>}0$ y $\alpha \in [0, 1)$. Determine el campo magnético que este alambre genera en el origen cuando hay una corriente de intensidad I circulando a través del hilo **(i)** en sentido horario y **(ii)** en sentido antihorario.

(b) Se tiene un circuito compuesto por dos alambres en forma de semicircunferencias de con radio interno y exxterno a y b, respectivamente, los cuales se unen a través de dos alambres rectos (como una “C”). Encuentre el campo magnético en un punto ubicado a una altura z medida sobre el eje que pasa de forma perpendicular por el centro de la circunferencia.

P9. [**Ley de Ampère**]
Considere un cilindro de radio R con un largo arbitrario con su sistema de coordenadas. Calcule el campo magnético en todos los puntos del espacio cuando por su manto circula:

(a) Una corriente superficial de densidad uniforme $\vec{K} = K_1\hat{z}$.

(b) Una corriente superficial de densidad uniforme $\vec{K} = K_2\hat{\theta}$.

Ahora, considere un solenoide cilíndrico lo suficientemente largo formado por un alambre que enrollado forma una hélice de radio R y paso de rosca (es decir la distancia entre dos espiras consecutivas) b. Calcule el campo magnético en todos los puntos del espacio si por el hilo circula una corriente I.

P10. [**Medios magnéticos**]
Se tiene un toroide de sección transversal circular A y de radio medio R. Dicho toroide está compuesto por tres medios de permeabilidades μ, μ_1,μ_2, los últimos dos distribuidos en un ángulo θ_1 y θ_2, respectivamente. Además, un cable por el cual circula una corriente I atraviesa perpendicular al toroide por su centro (considere que es un medio magnético perfecto para realizar aproximaciones adecuadas).

(a) Calcule los vectores intensidad magnética y campo magnético dentro del toroide.

(b) ¿Existen densidades de corriente de magnetización? Si existen, calcúlelas.

(c) ¿Cómo cambian los campos y las corrientes de magnetización calculadas si $\mu_1 = \alpha r$ o $\mu_1 = \alpha\theta$?

P11. [**Inducción electromagnética y Ley de Faraday-Lenz**]
Considere una bobina lo suficientemente larga, de radio R, con n vueltas por unidad de longitud, y de resistencia r. En algún punto dentro de esta bobina se ubica una espira circular de radio a (con $a << R$) tal que su eje de simetría forma un ángulo α con respecto al eje de simetría de la bobina.

(a) Haga un esquema del sistema.

(b) Calcule la inductancia de cada elemento.

(c) Calcule la inductancia mutua entre la bobina y la espira.

(d) Ahora considere que por la espira comienza a fluir una corriente $I(t) = I_0 \,\text{sen}(\omega t)$. Obtenga la corriente que se induce en la bobina, justificando porqué ocurre el fenómeno físico.

P12. [**Ondas electromagnéticas**]
El campo eléctrico de una onda electromagnética que se propaga en el vacío está dado por la expresión

$$\vec{E} = (E_{0x}\hat{x} + E_{0y}\hat{y})\cos(ky - \omega t)$$

(a) Determine la dirección de polarización y el campo magnético asociado a esta onda electromagnética.

(b) Calcule el vector de Poynting.

Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI2002: Electromagnetismo

Principales ecuaciones usadas en Electromagnetismo[1]

Profesor: Domenico Sapone
Auxiliares: Camila M., Bianca Z.
Ayudantes: Julio D., Gerd H.

Campo Eléctrico y Potencial de Distribución Continua, y Relaciones

$$\vec{E} = -\nabla V \qquad \vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{\|\vec{r} - \vec{r}\|^3} dq \qquad V = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{r}\|} dq \qquad \Delta V = V(B) - V(A) = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Relaciones entre Vector Desplazamiento, Vector Polarización y Campo Eléctrico; y constantes

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{P} = \epsilon_0 (\kappa - 1) \vec{E} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \qquad \epsilon = \kappa \epsilon_0 \qquad \kappa = 1 + \chi$$

Cargas de polarización

$$\sigma^a_{polarización} = \vec{P}(a) \cdot \hat{n}_{\text{normal que apunta hacia afuera del dieléctrico}} \qquad \rho_{polarización} = -\nabla \cdot \vec{P}$$

Ley de Gauss, en su forma integral y diferencial, para Campo Eléctrico y Vector Desplazamiento

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0} = \frac{Q_{libre} + Q_{polarización}}{\epsilon_0} \qquad \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \nabla \cdot \vec{D} = \rho_{libre} \qquad \oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{libre}$$

Ley de Ohm, Intensidad de Corriente, Vector Densidad de Corriente, Ecuación de Continuidad

$$\Delta V = RI \qquad I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} \qquad \vec{J} = (\text{conductividad})\, \vec{E} \qquad \vec{J} = \rho \vec{v} \qquad \nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Fuerza de Lorentz, Elemento de Fuerza, y de Torque, y Ley de Biot-Savart

$$\vec{F} = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \qquad d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B} \qquad d\vec{T} = \vec{r} \times d\vec{F} \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}$$

Corrientes, Ley de Biot-Savart y Ley de Ampère[2]

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} \qquad I = \int (\vec{K} \times \hat{n}) \cdot d\vec{l} \qquad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \qquad \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlazada}} \iff \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

Magnetización y Corrientes de Magnetización

$$\vec{B} = \mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}\right) = \mu \vec{H} \qquad \vec{M} = \left(\frac{\mu}{\mu_0} - 1\right) \vec{H} \qquad \mu = \mu_0 \kappa_m \,;\, \chi_m = \kappa_m - 1 \qquad \vec{J}_m = \nabla \times \vec{M} \qquad \vec{K} = \vec{M} \times \hat{n}_{\text{exterior}}$$

Condiciones de borde

$$E_{1t} = E_{2t} \;;\; E_{2n} - E_{1n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \;;\; D_{2n} - D_{1n} = \sigma_{\text{libre}} \;;\; \frac{J_{1t}}{g_1} = \frac{J_{2t}}{g_2} \;;\; J_{2n} = J_{1n} \;;\; B_{1n} = B_{2n} \;;\; \hat{n}_{12} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \vec{K}$$

Ley de Faraday-Lenz, Flujo Magnético, f.e.m., Ecuación de Maxwell-Faraday, Autoinducción

$$\varepsilon = -\frac{\partial \Phi_{\vec{B}}}{\partial t} \qquad \Phi_{\vec{B}} = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \qquad \varepsilon = RI \qquad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad L = \frac{\Phi_{1 \longrightarrow 1}}{I_1}$$

Flujo Magnético, Inductancia y Mutua Inductancia, Fuerza Magnética, Energía Magnética

$$\Phi_{\vec{B}} = \oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \qquad L = \frac{\Phi_{1 \longrightarrow 1}}{I_1} \qquad M = \frac{\Phi_{1 \longrightarrow 2}}{I_1} \qquad F = \frac{dU_m}{dx} \qquad U_m = \frac{1}{2} L I^2 \qquad U_m = \frac{1}{2\mu_0} \iiint_V \vec{B} \cdot \vec{H}$$

[1]Espero que hayan disfrutado cada ejercicio que resolvimos durante el semestre tanto como yo <3

[2]Para generalizarla, las contribuciones de $\vec{H}$ a lo largo de una curva cerrada deben ser la corriente libre enlazada.