PAUTA AUX 10

LEY DE OHM Y CONDUCTORES

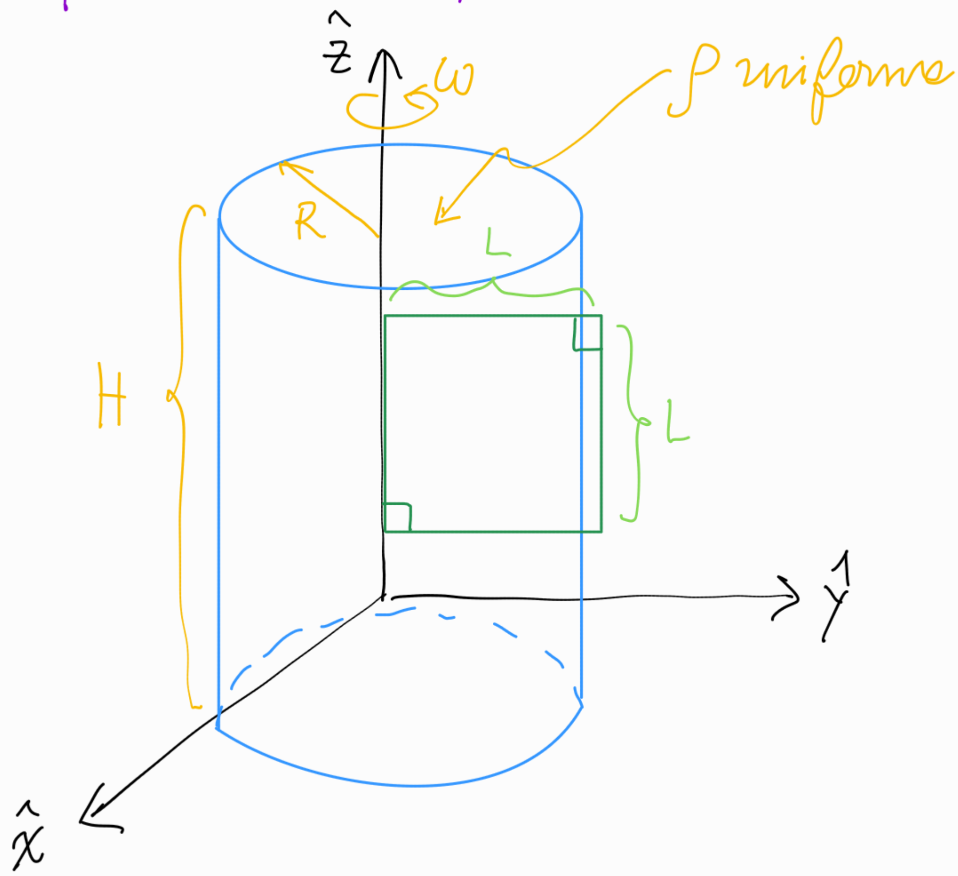
FI2002-2

2024-1

Profesor: Domenico Sapone
Auxiliares: Camila M., Bianca Z.
Ayudantes: Julio D., Gerd H.

P_1

Esquema del problema:



El objetivo es calcular la corriente que pasa por el cuadrado, y esta cantidad está dada por:

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

así que los ingredientes necesarios son: superficie que atraviesan, y el vector densidad de corriente.

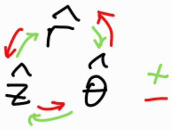
• Densidad de corriente:

$$\vec{J} = nq\vec{v} = \rho\vec{v}$$

$n \equiv$ cantidad de cargas por volumen
$q \equiv$ carga de cada una
$\rho \equiv$ densidad de carga
$\vec{v} \equiv$ velocidad de cada partícula

Como la distribución de carga (volumétrica) es uniforme, las cargas son del mismo tipo en cada volumen infinitesimal. Pero adicionalmente el cilindro gira con velocidad angular ω, luego la velocidad que porte cada carga dependerá de su distancia al eje del cilindro.

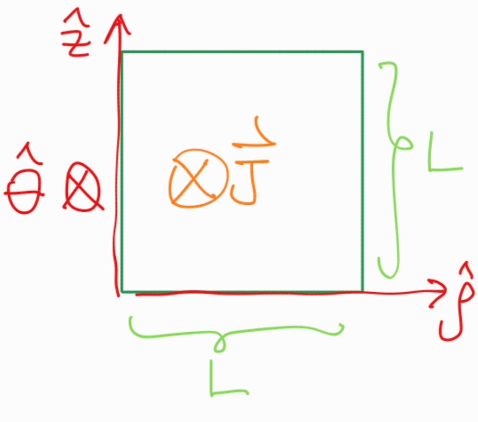
$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} \quad ; \quad \vec{\omega} = \omega\hat{z} \; ; \; \vec{r} = r\hat{r} \; ; \; \hat{z} \times \hat{r} = \hat{\theta}$$



$$\Rightarrow \vec{v} = \omega r\hat{\theta}$$

Luego, $\vec{J} = \rho\vec{v} \Rightarrow \vec{J} = \rho\omega r\hat{\theta}$

• Superficie:



No es más que un cuadrado, y para visitarlo en cilíndricas se usa $dS_{\hat{\theta}} = dr\,dz\,\hat{\theta}$. Aquí $0 \leq r \leq R$ y $0 \leq z \leq L$.

Finalmente, la corriente será:

- $I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S}$ $\left\| \begin{array}{l} \cdot\ \vec{J} = \rho \omega r \hat{\theta} \\ \cdot\ d\vec{S} = dr dz \hat{\theta}, \quad \begin{array}{l} 0 \leq r \leq R \\ 0 \leq z \leq L \end{array} \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{J} \cdot d\vec{S}\ ; \hat{\theta} \cdot \hat{\theta} = 1 \\ = \rho \omega r dr dz \end{array}$

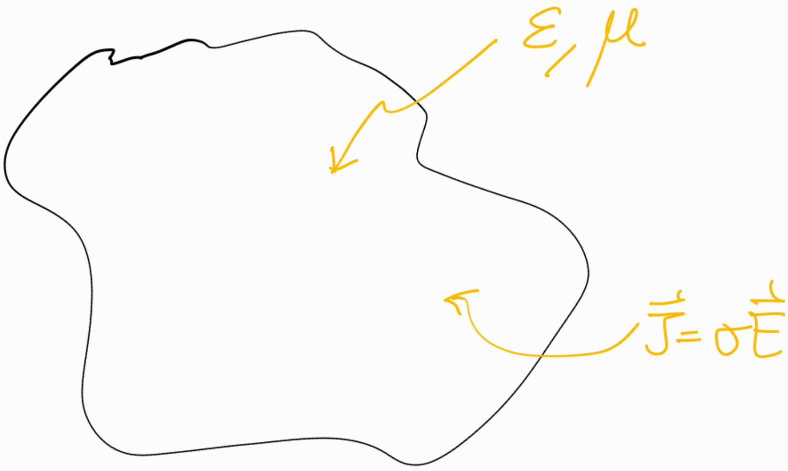
$$\Rightarrow I = \int_0^L \int_0^R \rho \omega r dr dz = \rho \omega \int_0^L dz \int_0^R r dr = \rho \omega \cdot [z]_0^L \cdot \frac{1}{2} [r^2]_0^R$$

$$= \rho \omega \cdot [L - 0] \cdot \frac{1}{2} [R^2 - 0]$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{2} \rho \omega L R^2}$$ //

P2

Esquema del problema:



$\varepsilon \equiv$ permitividad
$\mu \equiv$ permeabilidad
$\sigma \equiv$ conductividad

Solo se conocen características "genéricas" del medio conductor.

Hay que mostrar que:

existe carga inicial $\rho_0(\vec{r})$ en $t=0$ $\Rightarrow$ esta carga se disipará en el medio

condición inicial!

Mencionan $\vec{J}, \rho,$ tiempo $\rightsquigarrow$ ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad es:

$$\nabla \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\star)$$

Pero $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ (cumple Ley de Ohm de conducción eléctrica) y σ es constante:

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = \nabla \cdot (\sigma \vec{E}) = \sigma \nabla \cdot \vec{E}$$

Pero $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ por Ley de Maxwell

$$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \rho$$

Así, $(\star)$: $\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \rho \longrightarrow \text{variables separables}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\rho} \partial \rho = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \partial t \quad / \int$$

integramos c/r al tiempo, en particular. Como es una EDP, la "constante" es c/r a la variable de integración, pero depende de la otra variable del problema.

$$\Rightarrow \ln(|\rho|) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} t + \xi(\vec{r})$$

Pero $\rho > 0 \Rightarrow |\rho| = \rho$

$$\Rightarrow \ln(\rho) = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} t + \xi(\vec{r}) \quad / \exp() \quad ; \quad \exp(\ln) = I$$

$$\Rightarrow \rho = e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0} t + \xi(\vec{r})} \quad ; \quad e^{\alpha + \beta} = e^{\alpha} e^{\beta}$$

$$\Rightarrow \rho = e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0} t} e^{\xi(\vec{r})}$$

Sea $\tilde{\xi}(\vec{r}) = e^{\xi(\vec{r})}$ se renombra solo para que sea más cómodo

$$\Rightarrow \rho = \tilde{\xi}(\vec{r})\, e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t} = \rho(\vec{r},t)$$

Para resolverla por completo se requiere una condición inicial, por enunciado:

$$\rho(\vec{r}, t=0) = \rho_0(\vec{r})$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\xi}(\vec{r})\, \cancelto{1}{e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\cdot 0}} = \rho_0(\vec{r})$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\xi}(\vec{r}) = \rho_0(\vec{r}) \rightsquigarrow \text{ahora se conoce } \tilde{\xi}(\vec{r})$$

Luego, $\rho = \rho_0(\vec{r})\, e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t} = \rho(\vec{r},t)$

¿Cómo mostrar que se disipa?

R:// Se disiparía si la distribución de carga en el conductor se hace cero.

Como es un conductor perfecto, la conductividad es mucha:

$$\Rightarrow \sigma \to \infty \Rightarrow \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \to \infty$$

$$\Rightarrow -\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \to -\infty \ ; \ t > 0$$

$$\Rightarrow -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t \to -\infty$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t} \to 0 \ ; \ \rho_0(\vec{r}) < \infty$$

$$\Rightarrow \rho_0(\vec{r})\, e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t} \to 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\rho(\vec{r},t) \to 0} \ //$$

Esto ocurre instantáneamente por la propiedad inherente del conductor.

Y la carga se va a los bordes:

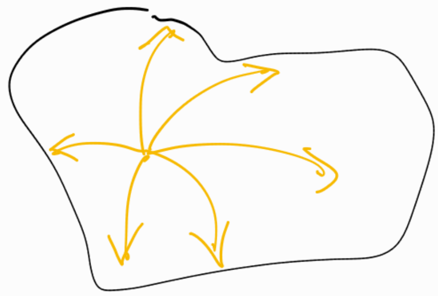
$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0(\vec{r})e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t}\right) \quad ; \ \rho_0(\vec{r}) \text{ cte. c/r a } t$$

$$= -\rho_0(\vec{r})\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t}\right)$$

$$= -\rho_0(\vec{r})\cdot\left(-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t}$$

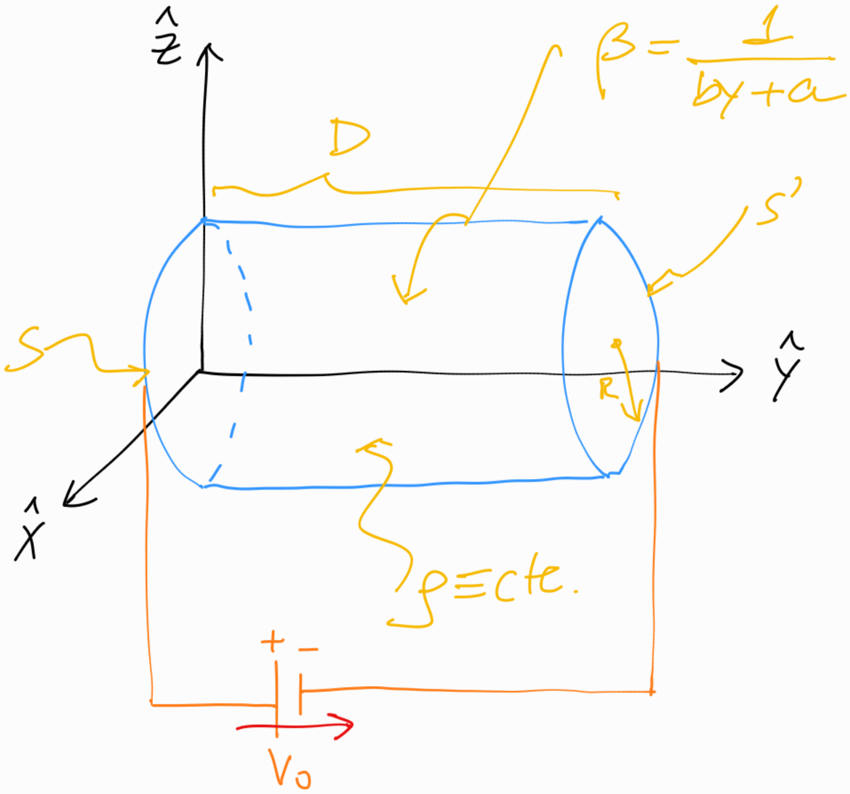
$$= \underbrace{\rho_0(\vec{r})}_{>0}\underbrace{\frac{\sigma}{\varepsilon_0}}_{>0}\underbrace{e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon_0}t}}_{>0}$$

$\Rightarrow \nabla \cdot \vec{J} > 0 \rightarrow$ "fuente" $\rightarrow$ 

P3

Esquema del problema:

ρ = resistividad



La d.d.p. aplicada determinará la dirección en que fluye la corriente (de mayor a menor potencial), y así, del vector $\vec{J}$, por lo tanto, del vector $\vec{E}$ también ($\vec{J}$ = conductividad $\vec{E}$).

En este caso la densidad de carga es constante $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, luego se tiene el estado estacionario: $\nabla \cdot \vec{J} = 0$

Reuniendo lo anterior:

Por la simetría del problema, la densidad de corriente va en $\hat{y}$ y solo depende de esa coordenada:

$$\vec{J} = J_y \hat{y}$$

Pero $\vec{J} = \text{conductividad}\,\vec{E}$

$$\Leftrightarrow \vec{E} = \underbrace{\text{resistividad}}\,\vec{J}$$

} Ley de Ohm de la conducción eléctrica

$$\Rightarrow \vec{E} = \underbrace{\frac{1}{\beta}}\vec{J} \Leftrightarrow \vec{J} = \beta\vec{E} \quad ; \quad \beta = by + a$$

$$\Leftrightarrow \vec{J} = (by+a)\vec{E}$$

$$\Leftrightarrow J_y \hat{y} = (by+a)E_y \hat{y}$$

Como se tiene estado estacionario:

$$\nabla\cdot\vec{J} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial J_y}{\partial y} = 0 \quad ; \quad J_y = (by+a)E_y$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}\left((by+a)E_y\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}(by+a)\,E_y + (by+a)\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

$$\Leftrightarrow bE_y + (by+a)\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(by+a)\frac{\partial E_y}{\partial y} + bE_y = 0} \longrightarrow$$

ecuación diferencial que satisface el campo eléctrico

Para calcular la resistencia total de la barra entre las secciones S y S' se puede utilizar la Ley de Ohm para conductores metálicos:

$$\Delta V = R I$$

mnemotecnia:
"ΔViva la Reina Isabel"

Luego $R = \dfrac{\Delta V}{I}$, donde:

- $\Delta V \equiv$ d.d.p. entre placas

  → pero se conoce y es V_0

- $I \equiv$ intensidad de corriente a través de placas

  → $\iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$; $S \equiv$ superficie de placa

  → Pero $\vec{J}$ no se conoce, sin embargo, se tiene una ecuación para $\vec{E}$ y existe una relación $\vec{J} =$ conductividad $\vec{E}$

Luego, el objetivo es obtener $\vec{E}$. O sea... resolver la ecuación encontrada.

Se sabe que $\frac{\partial J_y}{\partial y} = 0$, y eso significa que $J_y =$ cte.
¡Tampoco hay info. para deducir esa cte!

$$(by+a)\frac{\partial E_y}{\partial y}+bE_y=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial E_y}{\partial y}=\frac{-b}{by+a}E_y$$ → separación de variables

$$\Rightarrow \frac{1}{E_y}\partial E_y=\frac{-b}{by+a}\partial y \quad / \int$$

$$\Rightarrow \ln(|E_y|)=-\ln(|by+a|)+\varphi\ ,\quad \varphi\in\mathbb{R}$$

Se usará $E_y,\ by+a>0 \Rightarrow |E_y|=E_y,\ |by+a|=by+a$

$$\Rightarrow \ln(E_y)=-\ln(by+a)+\varphi\ ,\ \varphi\in\mathbb{R} \qquad ;\ \alpha\ln(x)=\ln(x^{\alpha})$$

$$\Leftrightarrow \ln(E_y)=\ln\left(\frac{1}{by+a}\right)+\varphi\ ,\ \varphi\in\mathbb{R} \qquad /\exp()\ ;\ \exp(\ln)=I$$

$$\Rightarrow E_y=e^{\ln\left(\frac{1}{by+a}\right)+\varphi}\ ,\ \varphi\in\mathbb{R} \qquad / e^{\alpha+x}=e^{\alpha}e^{x}$$

$$=e^{\ln\left(\frac{1}{by+a}\right)}e^{\varphi}\ ,\ \varphi\in\mathbb{R}\ ;\ \gamma:=e^{\varphi},\ \gamma\in\mathbb{R}^+$$

$$\Rightarrow E_y=\gamma\frac{1}{by+a}\ ,\ \gamma\in\mathbb{R}^+$$ //

$$V_0 = \int_0^D E_y\,dy \quad ; \quad E_y = (by+a)\delta$$

$$= \int_0^D \frac{\gamma}{by+a}\,dy = \gamma \cdot \frac{1}{b}\int_0^D \frac{b}{by+a}\,dy$$

$$= \frac{\gamma}{b}\Big[\ln(|by+a|)\Big]_0^D \quad ; \quad by+a > 0 \Rightarrow |by+a| = by+a$$

$$= \frac{\gamma}{b}\Big[\ln(bD+a) - \ln(a)\Big] = \frac{\gamma}{b}\ln\left(\frac{bD+a}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow V_0 = \frac{\gamma}{b}\ln\left(\frac{bD+a}{a}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\gamma = \frac{V_0 b}{\ln\left(\frac{bD+a}{a}\right)}} \quad // \qquad \rightsquigarrow \text{ahora es conocida} //$$

Luego, $\boxed{\vec{E}}$ está determinado por completo.

Sigue que $\vec{J} = \beta\vec{E}$ también.

$$\Rightarrow \vec{J} = (by+a)\,\gamma\,\frac{1}{by+a}\,\hat{y}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{J} = \gamma\,\hat{y}} \longleftarrow \text{coincide con lo previsto}$$

Ahora se puede calcular la corriente:

$$I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iint J_y \, dS = \underbrace{J_y}_{\gamma} \underbrace{\iint dS}_{\text{la superficie es un círculo de radio } R}$$

$$\Rightarrow \iint dS = \pi R^2$$

$$\Rightarrow I = \gamma \pi R^2$$

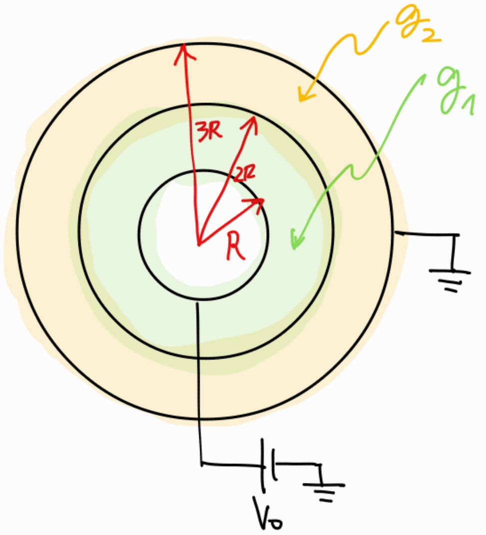
$$= \frac{V_0 b}{\ln\left(\frac{bD+a}{a}\right)} \pi R^2$$

Sigue que $\boxed{R = \dfrac{V_0}{\dfrac{V_0 b}{\ln\left(\frac{bD+a}{a}\right)} \pi R^2} = \dfrac{\ln\left(\frac{bD+a}{a}\right)}{b \pi R^2}}$,

o simplemente $\boxed{R = \dfrac{V_0}{\gamma \pi R^2}}$ //

P4

Esquema del problema:



Obs.: No todas las interfaces está a la misma d.d.p.
$\Rightarrow$ están en serie

Para determinar la resistencia del sistema, se puede utilizar la Ley de Ohm:

$$\Delta V = R\,I$$

mnemotecnia:
"ΔViva la Reina Isabel"

Luego $R = \dfrac{\Delta V}{I}$, donde:

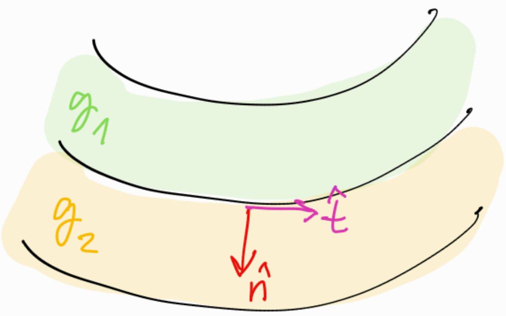
- $\Delta V \equiv$ d.d.p. entre superficies
  - ↳ pero se conoce y es V_0

- $I \equiv$ intensidad de corriente a través de los conductores
  - ↳ $\iint_S \vec{J}\cdot d\vec{S}$; $S \equiv$ superficie de placa
    - ↳ Pero $\vec{J}$ no se conoce.

Entonces el objetivo es determinar $\vec{J}$.

Por la simetría del problema, $\vec{J} = J(r)\hat{r}$.

Notar que



$\hat{n} := \hat{r}$

$\hat{t} := \hat{\theta}$

y $J_{1n} = J_{2n}$; pero $\vec{J}$ va en $\hat{r}$

$\Rightarrow J_{1r} = J_{2r}$; pero $\vec{J} = J(r)$

$\Rightarrow \vec{J}$ es el mismo en ambas interfaces.

En este caso, hay estado estacionario: $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, lo cual provoca que la ecuación de continuidad sea $\nabla \cdot \vec{J} = 0$; como $\vec{J}$ está en esféricas

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 J_r\right) = 0$$

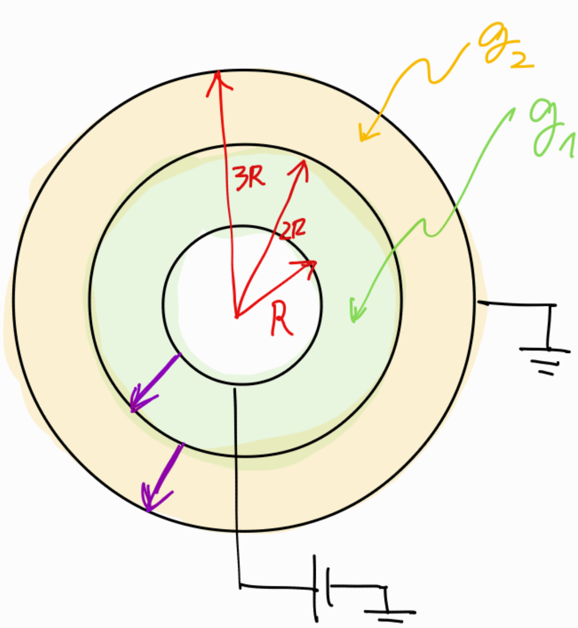
$$\Rightarrow r^2 J_r = J_0 \quad , \quad J_0 \in \mathbb{R} \text{ (cte. a determinar)}$$

$$\Rightarrow J_r = J_0 \frac{1}{r^2} \quad //$$

¿Cómo determinar una constante desconocida?

Se conoce el potencial en dos lugares:

$$\overset{V_0}{V(R)} - \overset{0}{V(3R)} = -\int_{3R}^{R} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$



$$\Leftrightarrow V_0 = \int_{R}^{3R} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= \int_{R}^{2R} \vec{E}_1\cdot d\vec{l} + \int_{2R}^{3R} \vec{E}_2\cdot d\vec{l}$$

Y por Ley de Ohm, $\vec{J} = \text{conductividad}\ \vec{E}$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\text{conductividad}}\vec{J}$$

Aplicando eso en cada interfaz (con respectiva conductividad):

$$= \int_{R}^{2R} \frac{J_0}{g_1}\frac{1}{r^2}\,dr + \int_{2R}^{3R} \frac{J_0}{g_2}\frac{1}{r^2}\,dr$$

$$= \frac{J_0}{g_1}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R}^{2R} + \frac{J_0}{g_2}\left[-\frac{1}{r}\right]_{2R}^{3R}$$

$$= \frac{J_0}{g_1}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2R}\right) + \frac{J_0}{g_2}\left(\frac{1}{2R} - \frac{1}{3R}\right)$$

$$= \frac{J_0}{g_1}\left(\frac{2-1}{2R}\right) + \frac{J_0}{g_2}\left(\frac{3-2}{6R}\right)$$

$$= \frac{J_0}{g_1}\frac{1}{2R} + \frac{J_0}{g_2}\frac{1}{6R}$$

$$\Leftrightarrow V_0 = \frac{J_0}{R}\left(\frac{1}{2g_1} + \frac{1}{6g_2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{J_0 = \frac{V_0 R}{\left(\frac{1}{2g_1} + \frac{1}{6g_2}\right)}}$$

$\rightarrow$ ahora $\vec{J} = J_0 \frac{1}{r^2}\hat{r}$ está completamente determinado!

Luego, $I = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S}$ $\Bigg\|$ $\cdot \vec{J} = J_0 \frac{1}{r^2}\hat{r}$; $\hat{r}\cdot\hat{r} = 1$

$\cdot d\vec{S} = r^2 \operatorname{sen}(\theta) d\theta d\phi \hat{r}$

$$\Rightarrow I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} J_0 \frac{1}{\cancel{r^2}} \cancel{r^2} \operatorname{sen}(\theta) d\theta d\phi = J_0 \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\operatorname{sen}(\theta) d\theta d\phi}_{d\Omega}}_{\Omega = 4\pi}$$

$$\Leftrightarrow I = J_0 4\pi$$

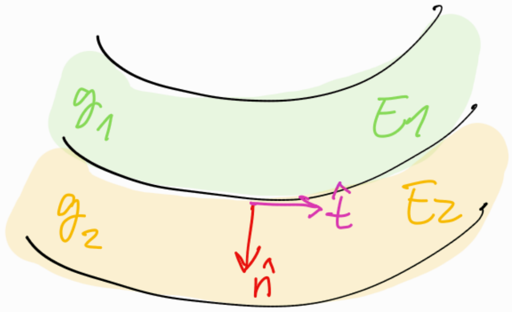
$$\Leftrightarrow I = \frac{V_0 R}{\left(\frac{1}{2g_1} + \frac{1}{6g_2}\right)} 4\pi \Leftrightarrow \boxed{\frac{V_0}{I} = \frac{\left(\frac{1}{2g_1} + \frac{1}{6g_2}\right)}{4\pi R} = \mathcal{R}}$$

$\hookrightarrow$ resistencia

//

Para determinar la densidad de carga en la interfaz se puede utilizar la condición de borde para el campo eléctrico:

$$E^{ext}_{normal} - E^{int}_{normal} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



$\hat{n} := \hat{r}$

$\hat{t} := \hat{\theta}$

Aplicando: $E_2 \cdot \hat{r} - E_1 \cdot \hat{r} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$

$$\Leftrightarrow \frac{J_0}{g_2}\frac{1}{r^2} - \frac{J_0}{g_1}\frac{1}{r^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{J_0}{r_2}\left(\frac{1}{g_2} - \frac{1}{g_1}\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = J_0 \varepsilon_0 \left(\frac{1}{g_2} - \frac{1}{g_1}\right)\frac{1}{r^2}} \;//$$

↪ donde J_0 ya se determinó,


¡Ánimo!