PAUTA AUX 8

Dieléctricos: Vectores $\vec{D}$ y $\vec{P}$, y Cargas de Polarización

FI2002-2

2024-1

Profesor: Domenico Sapone

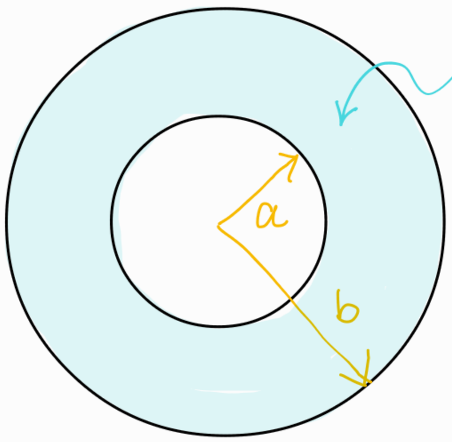
Auxiliares: Camila M., Bianca Z.

Ayudantes: Julio D., Gerd H.

P_1

Esquema del problema:

$\vec{P} = K\frac{1}{r}\hat{r}$ $(K \equiv \text{cte.})$



En esta configuración se conoce que la zona entre a y b se polariza según el vector $\vec{P}$. Esto significa que se trata de un dieléctrico y, por lo tanto, existen cargas de polarización durante el fenómeno, las cuales pueden ser: superficiales y volumétricas.

$\sigma_P^{r^*} = \vec{P}(r^*) \cdot \hat{n}$ que apunta hacia exterior del dieléctrico

evaluado en la posición, desde la referencia en que se ubica la superficie

$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}(r)$

expresión ¡GENÉRICA!

Por lo tanto, esta carga sería encerrada al utilizar Ley de Gauss con el campo eléctrico.

P1 a) Se calcularán las cargas de polarización.

Superficiales!

1) ¿Cuántas superficies tiene el dieléctrico?
R:// Dos. La del cascarón externo, y del interno

2) ¿Cuántas densidades de carga polarizada superficial se deben calcular?
R:// ¡Dos! (Pues hay 2 superficies).

radio interno: $\sigma_P^a = \vec{P}(a) \cdot \hat{n}_{\text{exterior al dieléctrico}}$; $\hat{n}_{\text{exterior al dieléctrico}} = -\hat{r}$

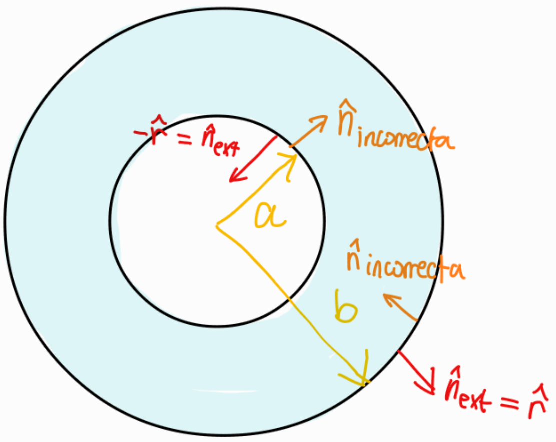
$= k\frac{1}{a}\hat{r} \cdot (-\hat{r})$; $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$ (vectores unitarios)

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_P^a = -\frac{k}{a}} //$$

radio externo: $\sigma_P^b = \vec{P}(b) \cdot \hat{n}_{\text{exterior al dieléctrico}}$; $\hat{n}_{\text{ext. al dieléctrico en superficie } b} = \hat{r}$

$= k\frac{1}{b}\hat{r} \cdot \hat{r}$; $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$ (vectores unitarios)

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_P^b = \frac{k}{b}} //$$



La normal que apunta hacia afuera del dieléctrico dependerá de cada superficie. Hay que pensar hacia que sentido se deja de estar en el dieléctrico, se grafican con rojo en el esquema de la izq.

volumétrica

Solo hay una para cada dieléctrico.

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$$

Como $\vec{P}$ está parametrizado en esféricas, hay que utilizar la divergencia en esas coordenadas:

$$\nabla \cdot \vec{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P_r\right) +$$ cosas ponderadas por $\frac{\partial}{\partial \theta}(P_\theta), \frac{\partial}{\partial \phi}(P_\phi)$ las cuales son cero pues $\vec{P} = P_r\hat{r} + 0\hat{\theta} + 0\hat{\phi}$.

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r^2} \cdot K \cdot \frac{1}{\cancel{r}}\right)$$; se factoriza cte.

$$= \frac{1}{r^2} K \cancelto{1}{\frac{\partial}{\partial r}(r)}$$

$$= K\frac{1}{r^2} \,//$$

$$\Rightarrow -\nabla \cdot \vec{P} = \boxed{-K\frac{1}{r^2} = \rho_P} \,//$$

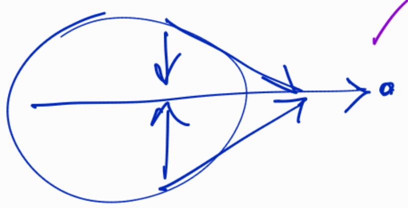
(P1) b) Por simetría esférica, es conveniente calcularlo por ley de Gauss. Además, como se conocen todas las cargas, es factible hacerlo para el campo eléctrico.

O sea, no se requiere del vector $\vec{D}$ para hacer ley de Gauss...

esa es la otra forma de abordarlo! usando el vector $\vec{D}$ tal que $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$. Queda propuesto el resto :)

(si les surgen dudas, pregunten!)

0) Justificación



solo quedan componentes de $\vec{E}$ en $\hat{r}$

$\Rightarrow \vec{E} = E\hat{r}$.

$* \; E = E(r)$ y no $E = E(\theta, \phi)$ por simetría angular.

1) Tramos

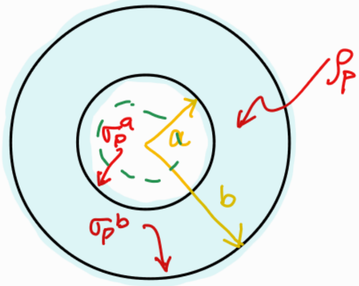
(i) $0 < r \overset{!}{<} a$

(ii) $a \overset{!}{<} r \overset{!}{<} b$

(iii) $b \overset{!}{<} r$

! ≡ no se alcanza igualdad porque hay densidad de cargas superficiales ahí! (las calculamos)

(i) $0<r<a$



Ley de Gauss: $\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{Q_{encerrada}}{\epsilon_0}$

L.I.

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E(r)\cdot 4\pi r^2$$

superficie de manto esférico arbitrario para un radio entre 0 y a

L.D.

- $Q_{encerrada} = 0$ ← no hay carga! Por enunciado

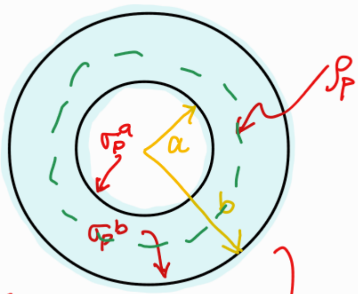
— o —

$$\Rightarrow E(r)\cdot 4\pi r^2 = 0$$

$$\Rightarrow E(r) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0} = 0\hat{r}}$$ para $0<r<a$ //

(iii) $a < r < b$



Ley de Gauss: $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{encerrada}}{\epsilon_0}$

L.I.)

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \cdot 4\pi r^2$$

superficie de manto esférico arbitrario para un radio entre a y b

L.D.)

$\cdot\, Q_{encerrada} = \sigma_p^a \cdot$ (Área en que se distribuye) $+$ (porción de dist. de carga volumétrica encerrada)

$$= \sigma_p^a \cdot \underbrace{4\pi a^2}_{\text{manto esférico de radio "a"}} + \underbrace{\iiint \rho(r)\, dV}_{\text{la densidad de carga ya calculada}}$$

en esféricas $\rightsquigarrow dV = r^2 \operatorname{sen}(\theta) dr d\theta d\phi$

¡Para r ARBITRARIO! (porque se encierra una porción y no el total)

$$= \left(\frac{-k}{\cancel{a}}\right) \cdot 4\pi a^{\cancel{2}} + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_a^{r} \left(\frac{-k}{\cancel{r^2}}\right) \cdot \cancel{r^2} \operatorname{sen}(\theta) dr d\theta d\phi$$

factorizo constante

$$= -4\pi k a \; -k \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \underbrace{\operatorname{sen}(\theta) d\theta d\phi}_{d\Omega}}_{\Omega = 4\pi} \underbrace{\int_a^r dr}_{=[r]_a^r = (r-a)} = -4\pi k a - 4\pi k (r-a)$$

$$= \cancel{-4\pi k a} - 4\pi k r \cancel{+ 4\pi k a}$$

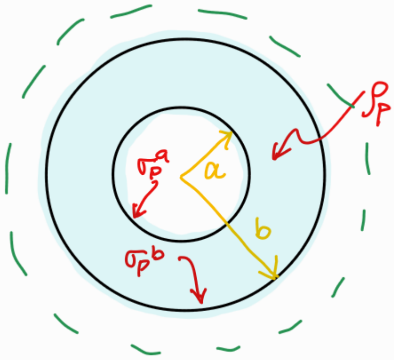
$$= -4\pi k r \;//$$

— o —

$$\Rightarrow E(r) \cdot \cancel{4\pi} r^2 = \frac{-\cancel{4\pi} k r}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{-k}{\epsilon_0 r} \hat{r}} \;, \; a < r < b \;//$$

(iii) $b<r$



Ley de Gauss: $\oint\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{Q_{encerrada}}{\epsilon_0}$

L.I.

$$\oint\!\!\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E(r)\cdot 4\pi r^2$$

superficie de manto esférico arbitrario para un radio entre b, el infinito y + allá

L.D.

· $Q_{encerrada} = 0$ → porque si el objeto no está polarizado originalmente, sus cargas de polarización deben sumar cero. Hay que checarlo.

$=$ (dens. sup.)·(Área que cubren) + (dens. vol. evaluada en b fijo, porque ya cubrió toda la zona)

$= \sigma_p^a\cdot 4\pi a^2 + \sigma_p^b\cdot 4\pi b^2 + \left(-4\pi K(b-a)\right)$ reciclado de la zona anterior

$= -\dfrac{K}{\cancel{a}}\cdot 4\pi a^{\cancel{2}} + \dfrac{K}{\cancel{b}}\cdot 4\pi b^{\cancel{2}} - 4\pi Kb + 4\pi Ka$

$= \cancel{-4\pi Ka}\ \cancel{+4\pi Kb}\ \cancel{-4\pi Kb}\ \cancel{+4\pi Ka} = 0$ ☺

—o—

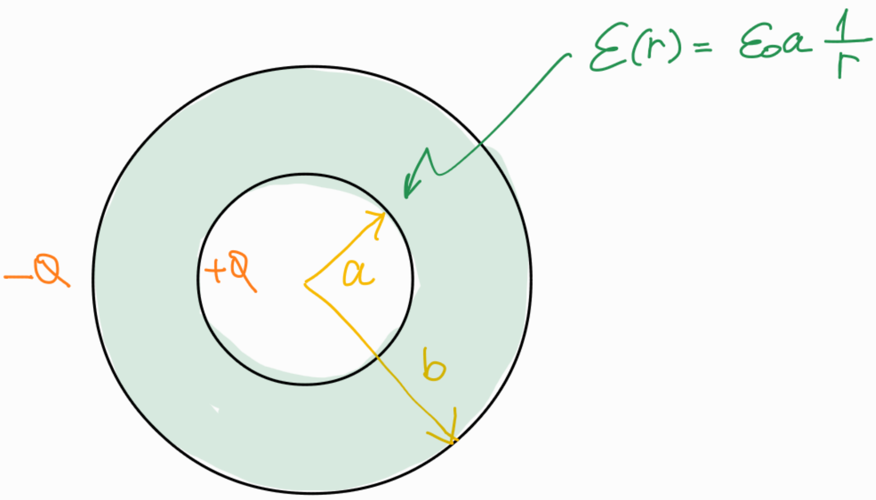
$\Rightarrow E(r)\cdot 4\pi r^2 = 0$

$\Rightarrow E(r) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0} = 0\hat{r}}$ para $b<r$ //

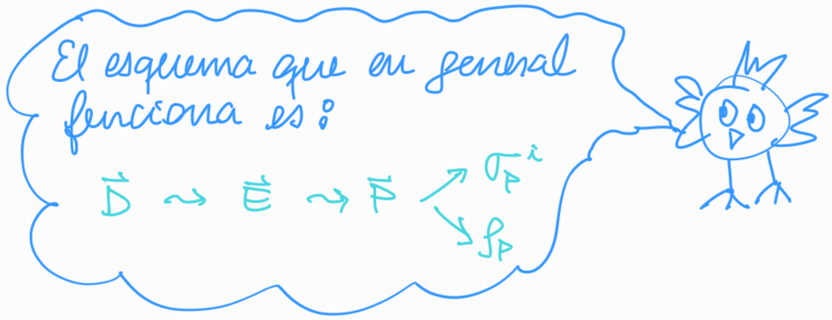
P_2

Esquema del problema:



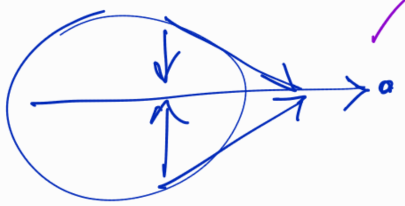
En este caso se tiene un condensador esférico, y por eso se puede asumir alguna carga $|Q|$ en sus armaduras (sin pérdida de generalidad, la de la armadura interna se tomará con signo +), y el espacio entre las armaduras es rellenado con un dieléctrico de permitividad variable.

Para calcular $\vec{D}$, $\vec{E}$, $\vec{P}$, quizá suena "usual" comenzar con el campo eléctrico, por Ley de Gauss, pero en dieléctricos podría no ser apropiado ya que encierra cargas libres y polarizadas, y no hay manera de obtener las polarizadas salvo con el vector $\vec{P}$ (o que las den en el enunciado). Pero el vector $\vec{D}$ viene a solucionar esto, y encierra solo las cargas libres.



P2 a) Por simetría esférica, es conveniente calcularlo por ley de Gauss.

0) Justificación



solo quedan componentes de $\vec{E}$ en $\hat{r}$

$\Rightarrow \vec{E} = E\hat{r}$.

$\times$ $E = E(r)$ y no $E = E(\theta, \phi)$ por simetría angular.

Aplica lo mismo para $\vec{D} \Rightarrow \vec{D} = D(r)\hat{r}$ //

1) Tramos

(i) $0 < r \overset{!}{<} a$

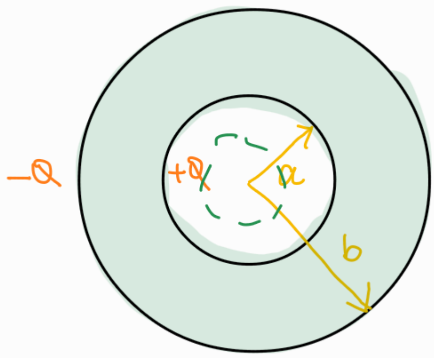
(ii) $a \overset{!}{<} r \overset{!}{<} b$

(iii) $b \overset{!}{<} r$

! ≡ no se alcanza igualdad porque habrán densidad de cargas superficiales ahí!

(i) $0<r<a$

Ley de Gauss: $\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$



L.I.

$$\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E(r)\cdot 4\pi r^2$$

superficie de manto esférico arbitrario para un radio entre 0 y a

L.D.

- $Q_{encerrada} = 0$ ← no hay carga! Por enunciado

— o —

$\Rightarrow E(r)\cdot 4\pi r^2 = 0$

$\Rightarrow E(r) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \vec{0} = 0\hat{r}}$ para $0<r<a$ //

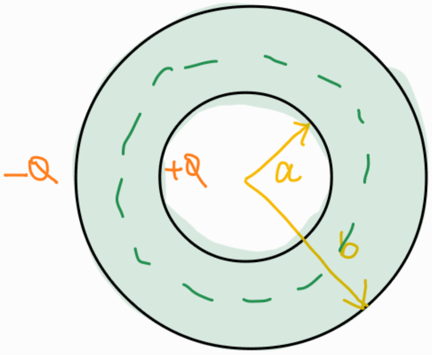
- $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$; $\vec{E} = \vec{0}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{D} = \vec{0} = 0\hat{r}}$ para $0<r<a$ //

- $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$; $\vec{D} = \vec{0} = \vec{E}$

$\Rightarrow \boxed{\vec{P} = \vec{0} = 0\hat{r}}$ para $0<r<a$ //

(ii) $a<r<b$ |



En esta zona la carga encerrada es:

* carga de armadura (libre)
* carga en superficie a de dieléctrico
* porción de carga en volumen de dieléctrico

Pero las últimas 2 son de polarización y su forma explícita NO se conoce aún. Por lo que para el campo eléctrico no se puede obtener explícitamente. Pero el vector $\vec{D}$ captura efectos de Q_{libre}! Se usa:

Ley de Gauss "generalizada": $\oiint \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{\substack{libre\\encerrada}}$

L.I.|

$\bullet \oiint \vec{D}\cdot d\vec{S} = D(r)\cdot 4\pi r^2$

superficie de manto esférico arbitrario para un radio entre 0 y a

L.D.|

$\bullet\, Q_{\substack{libre\\encerrada}} = +Q$

—o—

$$\Rightarrow D(r)\cdot 4\pi r^2 = Q \Rightarrow \boxed{\vec{D} = \frac{Q}{4\pi}\frac{1}{r^2}\hat{r}}\ ,\quad a<r<b$$

$$\bullet\ \vec{D} = \varepsilon\vec{E} \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon}\vec{D} = \vec{E}\quad ;\ \varepsilon = \varepsilon(r) = \varepsilon_0 a\frac{1}{r}$$

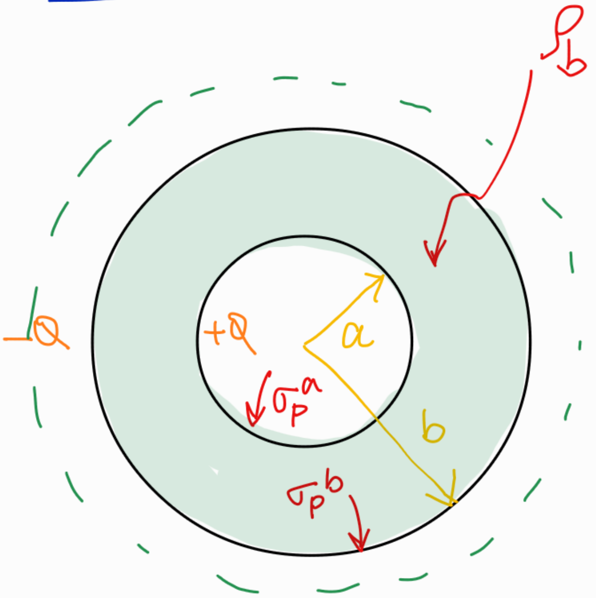
$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0 a}\cdot \cancel{r}\cdot\frac{Q}{4\pi}\frac{1}{\cancel{r^2}}\hat{r}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\frac{1}{r}\hat{r}}\ ,\quad a<r<b\ //$$

$$\bullet\ \vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon\vec{E} - \varepsilon_0\vec{E} = (\varepsilon-\varepsilon_0)\vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{P} = \left(\cancel{\varepsilon_0} a\frac{1}{r} - \cancel{\varepsilon_0}\right)\frac{Q}{4\pi\cancel{\varepsilon_0} a}\frac{1}{r}\hat{r} \Rightarrow \boxed{\vec{P} = \left(a\frac{1}{r}-1\right)\frac{Q}{4\pi a}\frac{1}{r}\hat{r}}\ ,\quad a<r<b\ //$$

(iii) $b<r$



Por ser un condensador, al encerrar ambas armaduras, ya no se tendrá su contribución de cargas. Sí habría que considerar que se encerrarían las cargas de polarización dadas por el vector $\vec{P}$ (las cuales suman cero).

Pero nuevamente con el vector $\vec{D}$ se simplifica, porque solo se encierra la carga libre, en este caso de las armaduras, y es cero!:

Ley de Gauss "generalizada": $\oint\!\!\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{\substack{libre\\encerrada}}$

L.I.|

• $\oint\!\!\oint \vec{D}\cdot d\vec{S} = D(r)\cdot 4\pi r^2$ superficie de manto esférico arbitrario para un radio entre 0 y a

L.D.|

• $Q_{\substack{libre\\encerrad}} = 0$

—o—

$D(r)\cdot 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{D}=\vec{0}}$, $b<r$

• $\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$; $\vec{D}=\vec{0} \Rightarrow \boxed{\vec{E}=\vec{0}}$, $b<r$

• $\vec{D}=\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P} \Rightarrow \vec{P}=\vec{D}-\varepsilon_0\vec{E}$; $\vec{D}=\vec{0}=\vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{P}=\vec{0}}$, $b<r$

En resumen, se tiene que:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0\hat{r}, & 0<r<a \\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a}\dfrac{1}{r}\hat{r}, & a<r<b \\ 0\hat{r}, & b<r \end{cases}$$

$$\vec{D} = \begin{cases} 0\hat{r}, & 0<r<a \\ \dfrac{Q}{4\pi}\dfrac{1}{r^2}\hat{r}, & a<r<b \\ 0\hat{r}, & b<r \end{cases}$$

no es nulo solo donde hay dieléctrico!

$$\vec{P} = \begin{cases} 0\hat{r}, & 0<r<a \\ \left(a\dfrac{1}{r}-1\right)\dfrac{Q}{4\pi a}\dfrac{1}{r} = \dfrac{Q}{4\pi}\left(\dfrac{1}{r^2}-\dfrac{1}{ar}\right), & a<r<b \\ 0\hat{r}, & b<r \end{cases}$$

(P2) b) Nuevamente, hay cargas superficiales y otras distribuidas en el volumen.

Superficiales |

1) ¿Cuántas superficies tiene el dieléctrico?

R:// Dos. La del cascarón externo, y del interno

2) ¿Cuántas densidades de carga polarizada superficial se deben calcular?

R:// ¡Dos! (Pues hay 2 superficies).

radio interno: $\sigma_p^a = \vec{P}(a)\cdot\hat{n}_{\text{exterior al dieléctrico}}$; $\hat{n}_{\text{exterior al dieléctrico}} = -\hat{r}$

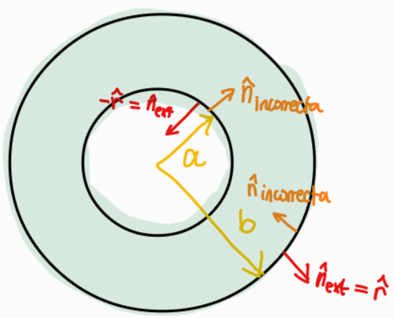
$$= \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{a\cdot a}\right)\hat{r}\cdot(-\hat{r}) \quad ; \quad \hat{r}\cdot\hat{r} = 1 \text{ (vectores unitarios)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_p^a = 0}$$

radio externo: $\sigma_p^b = \vec{P}(b)\cdot\hat{n}_{\text{exterior al dieléctrico}}$; $\hat{n}_{\text{ext. al dieléctrico en superficie } b} = \hat{r}$

$$= \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{ab}\right)\hat{r}\cdot\hat{r} \quad ; \quad \hat{r}\cdot\hat{r} = 1 \text{ (vectores unitarios)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_p^b = \frac{Q}{4\pi b}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)}$$



La normal que apunta hacia afuera del dieléctrico dependerá de cada superficie. Hay que pensar hacia qué sentido se deja de estar en el dieléctrico, se grafican con rojo en el esquema de la izq.

volumétrica

Solo hay una para cada dieléctrico

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P}$$

Como $\vec{P}$ está parametrizado en esféricas, hay que utilizar la divergencia en esas coordenadas:

$$\nabla \cdot \vec{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P_r\right) +$$ cosas ponderadas por $\frac{\partial}{\partial \theta}(P_\theta)$, $\frac{\partial}{\partial \phi}(P_\phi)$ las cuales son cero pues $\vec{P} = P_r\hat{r} + 0\hat{\theta} + 0\hat{\phi}$.

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{Q}{4\pi}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{ar}\right)\right)$$

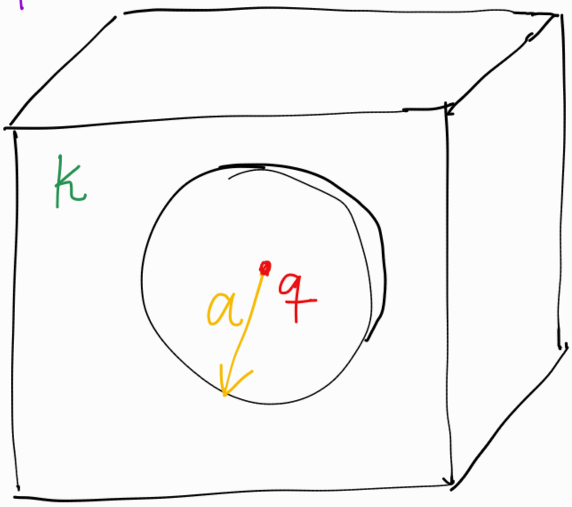
$$= \frac{1}{r^2}\left(\frac{Q}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{1}{r^2}\right) - \frac{Q}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \cdot \frac{1}{r}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{r^2}\cdot\left(-\frac{Q}{4\pi a}\right)$$

$$\Rightarrow -\nabla \cdot \vec{P} = \boxed{\frac{Q}{4\pi a}\frac{1}{r^2} = \rho_P} \quad //$$

P3

Esquema del problema:



Hay que mostrar que la carga total ~~en la~~ en el sistema (el bloque) es fija, $\frac{q}{k}$.

Para esto, se deben considerar todas las cargas que podrían aportar:

* carga puntual → carga libre

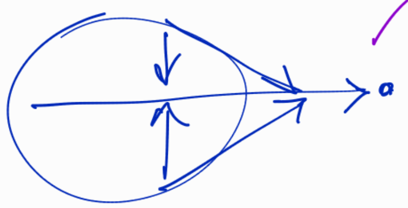
* carga en superficie } aparecen por polarización
* carga en volumen } en el dieléctrico

Ya se tiene la carga puntual por enunciado.

El objetivo es llegar a las cargas de polarización, y para hacer eso se requiere el vector $\vec{P}$.

¿Cómo llegar al vector $\vec{P}$? Es de interés en $0<r<a$ (c/r al centro de cavidad); si se hace Ley de Gauss para $\vec{E}$, no necesariamente se van a encerrar todas las cargas, entonces mejor hacerlo para el vector $\vec{D}$.

0) Justificación



solo quedan componentes de $\vec{E}$ en $\hat{r}$

$\Rightarrow \vec{E} = E\hat{r}$.

$*\ E = E(r)$ y no $E = E(\theta, \phi)$ por simetría angular.

Aplica lo mismo para $\vec{D} \Rightarrow \vec{D} = D(r)\hat{r}$ //

1) Tramos

! ≡ no se alcanza igualdad porque habrán densidad de cargas superficiales ahí!

(i) $0 < r \overset{!}{<} a$

Ley de Gauss generalizada: $\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\substack{encerrada \\ libre}}$

<u>L.I.1</u>

- $\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = D(r) \cdot 4\pi r^2$

superficie de manto esférico arbitrario para un radio entre 0 y a

<u>L.D.1</u>

- $Q_{\substack{libre \\ encerrad}} = q$

—o—

$$\Rightarrow D(r) \cdot 4\pi r^2 = q \Rightarrow \boxed{\vec{D} = \frac{q}{4\pi} \frac{1}{r^2} \hat{r}}, \quad 0 < r < a$$

- $$\vec{D} = \varepsilon \vec{E} = \varepsilon_0 K \vec{E} \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon_0 K} \vec{D} = \vec{E} \Rightarrow \boxed{\vec{E} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 K} \frac{1}{r^2} \hat{r}}, \quad 0 < r < a$$

- $$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} = (K-1)\varepsilon_0 \vec{E}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{P} = \frac{(K-1)q}{4\pi K} \frac{1}{r^2} \hat{r}}, \quad 0 < r < a$$

Luego, las distribuciones de carga de polarización son:

Superficiales |

1) ¿Cuántas superficies tiene el dielec
R:// Una! La coraza de la cavidad.

2) ¿Cuántas densidades de carga polarizada superficial se deben calcular?
R:// ¡Una! (Pues hay 1 superficie).

radio interno: $\sigma_P^a = \vec{P}(a)\cdot\hat{n}_{\substack{\text{exterior al}\\ \text{dieléctrico}}}$; $\hat{n}_{\substack{\text{exterior al}\\ \text{dieléctrico}}} = -\hat{r}$

$$= \frac{(k-1)q}{4\pi k}\frac{1}{a^2}\hat{r}\cdot(-\hat{r}) \quad ; \quad \hat{r}\cdot\hat{r} = 1 \text{ (vectores unitarios)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_P^a = -\frac{q(k-1)}{4\pi k a^2}} \quad //$$

volumétrica |

Solo hay una para cada dieléctrico

$$\rho_P = -\nabla\cdot\vec{P}$$

Como $\vec{P}$ está parametrizado en esféricas, hay que utilizar la divergencia en esas coordenadas:

$\nabla\cdot\vec{P} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 P_r\right) +$ cosas ponderadas por $\frac{\partial}{\partial\theta}(P_\theta)$, $\frac{\partial}{\partial\phi}(P_\phi)$ las cuales son cero pues $\vec{P} = P_r\hat{r} + 0\hat{\theta} + 0\hat{\phi}$.

$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r^2}\cdot\frac{(k-1)q}{4\pi k}\frac{1}{\cancel{r^2}}\right) = 0 \;// \quad \Rightarrow \boxed{\rho_P = -\nabla\cdot\vec{P} = 0} \quad //$$

Luego, la carga total es:

$$q + \sigma_p^{a} \cdot \left(\text{superficie en que se distribuye}\right) + \cancelto{0}{0 \cdot \left(\text{volumen en que se distribuye}\right)}$$

$$= q + \sigma_p^{a} \cdot 4\pi a^2$$

$$= q + \frac{q}{\cancel{4\pi a^2}} \frac{1-K}{K} \cdot \cancel{4\pi a^2}$$

$$= q + q\left(\frac{1}{K} - \cancelto{1}{\frac{K}{K}}\right)$$

$$= \cancel{q} + \frac{q}{K} - \cancel{q}$$

$$= \frac{q}{K},$$ mostrando justamente lo pedido. $\blacksquare$

P4

PROPUESTA

Quedo atenta a si tienen dudas

Si llegaste hasta acá:

Ánimo con semana 6-7,

(o el momento del semestre que sea)

y disfruten su pronto receso ^^