PAUTA AUX 5

POTENCIAL, CONDUCTORES Y CONDENSADORES

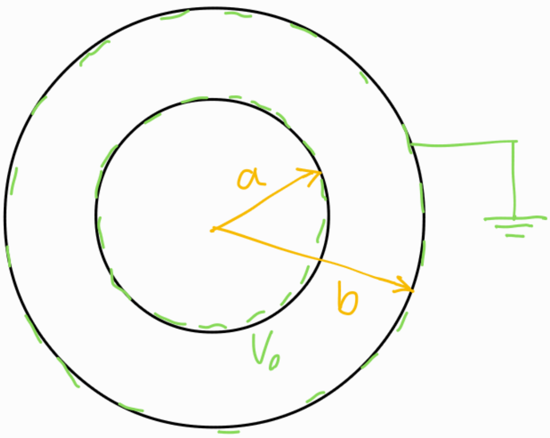
FI2002-2

2024-1

Profesor: Domenico Sapone
Auxiliares: Camila M., Bianca Z.
Ayudantes: Julio D., Gerd H.

P_1

Esquema del problema:



Se conoce el campo eléctrico, que es definido por partes, para esta distribución de simetría cilíndrica.

Se tiene como dato el valor del potencial en dos radios:

$V(r=a)=V_0$ y $V(r=b)=0$.

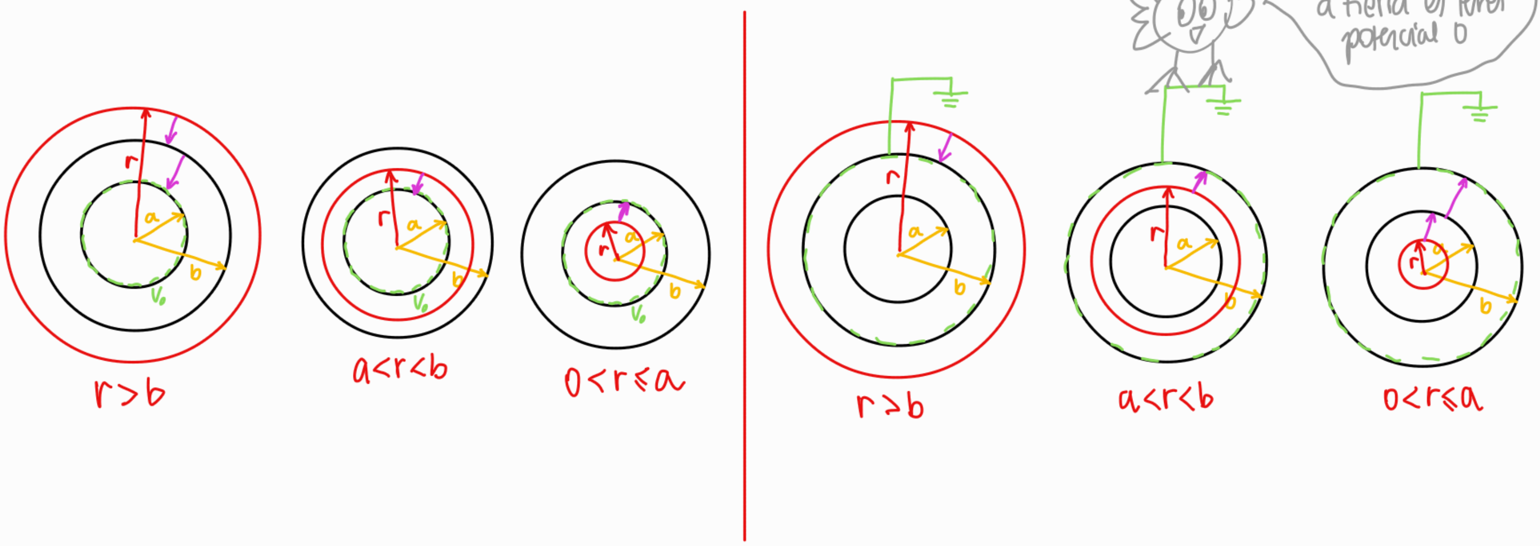
Para calcular el potencial en todo el espacio, siempre se requiere una referencia, tal que nos sea útil.

Como se conoce el valor del potencial ahí, se tomará esa ref.

Ya que el dato es el campo eléctrico, para llegar al potencial se utiliza $V(A)-V(B)=-\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l}$.

Debido a que el campo eléctrico está definido por partes, el potencial también (en los mismos espacios), pero ¡DEBE ser continuo!

La idea siempre es "acercarse" a la referencia. Al hacer eso, se podría pasar por zonas con distinto campo eléctrico; por eso hay que considerarlas.

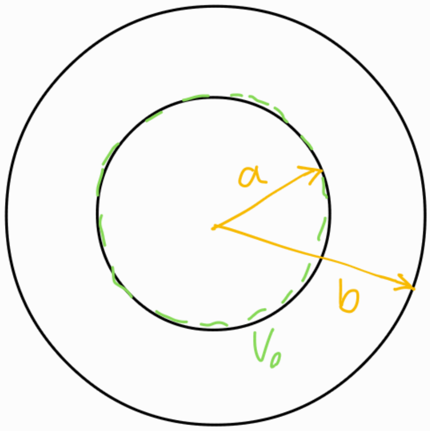


P.1 a) PROPUESTO

Hacerlo como ejercicio de Ley de Gauss !!

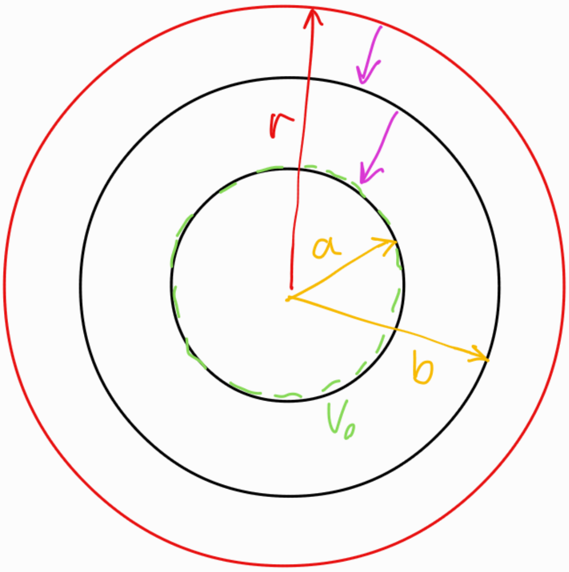
P1 b) Se tiene que:

- $V(r_{ref}=a)=V_0$



- $$\vec{E}=\begin{cases} \frac{\rho}{2\epsilon_0} r\,\hat{r}, & 0<r\leq a \\ \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\frac{1}{r}\hat{r}, & a<r<b \\ 0\,\hat{r}, & r>b \end{cases}$$

$r>b$



$$\bullet\ V(r>b) - \underbrace{V(a)}_{V_0} = -\int_a^r \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= -\Bigg(\underbrace{\int_b^r \vec{E}(r>b)\cdot d\vec{l}}_{\text{I} \atop r>b} + \underbrace{\int_a^b \vec{E}(a<r<b)\cdot d\vec{l}}_{\text{II} \atop r>b}\Bigg)$$

(ver desarrollo más abajo)

$$= -\Bigg(\underbrace{0}_{\text{I} \atop r>b} + \underbrace{\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}_{\text{II} \atop r>b}\Bigg)$$

$$\Rightarrow \boxed{V(r>b) = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + V_0} \ //$$

I $\quad$ $r>b$: $\displaystyle\int_b^r \vec{E}(r>b)\cdot d\vec{l}$ $\quad\Big\|\quad$ • $\vec{E}(r>b) = 0\hat{r}$ $\quad$ • $d\vec{l} = dr\,\hat{r}$

$$= 0\int_b^r dr = 0$$

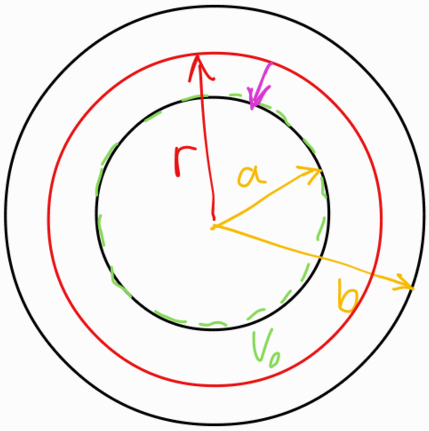
II $\quad$ $r>b$: $\displaystyle\int_a^b \vec{E}(a<r<b)\cdot d\vec{l}$ $\quad\Big\|\quad$ • $\vec{E}(a<r<b) = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\frac{1}{r}\hat{r}$ $\quad$ • $d\vec{r} = dr\,\hat{r}$

$$= \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\int_a^b \frac{1}{r}dr = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\left[\ln(|r|)\right]_a^b = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\left[\ln(b)-\ln(a)\right] = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$r>0$

$\rightarrow |r| = r$

$\underline{a<r<b}$



$$\bullet\ V(a<r<b) - \cancel{V(a)}^{V_0} = -\int_a^r \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= -\underbrace{\left(\int_a^r \vec{E}(a<r<b)\cdot d\vec{l}\right)}_{\mathrm{I}_{a<r<b}}$$

(ver desarrollo más abajo)

$$= \underbrace{-\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{a}\right)}_{\mathrm{I}_{a<r<b}}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(a<r<b) = -\frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}\ln\left(\frac{r}{a}\right) + V_0}$$

//

$\textcircled{I}$: $\displaystyle\int_a^r \vec{E}(a<r<b)\cdot d\vec{l}$ $\quad\Bigg\|\;\; \cdot\, \vec{E}(a<r<b) = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\frac{1}{r}\hat{r}$

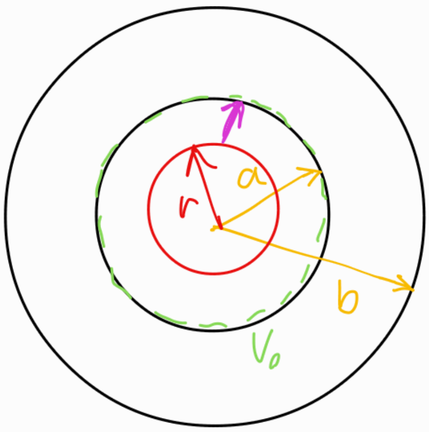
$a<r<b$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \cdot\, d\vec{l} = dr\,\hat{r}$

$$= \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\int_a^r \frac{1}{r}dr = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\Big[\ln(|r|)\Big]_a^r = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\Big[\ln(r)-\ln(a)\Big] = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{r}{a}\right)$$

$r>0$

$\Rightarrow |r| = r$

$0<r\leq a$



$$\bullet\; V(0<r\leq a) - \cancelto{V_0}{V(a)} = -\int_a^r \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= -\underbrace{\left(\int_a^r \vec{E}(0<r\leq a)\cdot d\vec{l}\right)}_{\mathrm{I}_{0<r\leq a}}$$

(ver desarrollo más abajo)

$$= \underbrace{-\frac{\rho}{4\epsilon_0}(r^2-a^2)}_{\mathrm{I}_{0<r\leq a}}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(0<r\leq a) = -\frac{\rho}{4\epsilon_0}(r^2-a^2)+V_0}$$

I : $0<r\leq a$

$$\int_a^r \vec{E}(0<r\leq a)\cdot d\vec{\ell}$$

- $\vec{E}(0<r\leq a) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r\hat{r}$
- $d\vec{\ell} = dr\,\hat{r}$

$$= \frac{\rho}{2\epsilon_0}\int_a^r r\,dr = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\left[r^2\right]_b^r = \frac{\rho}{4\epsilon_0}\left[r^2-a^2\right]$$

//

Entonces, queda el potencial definido en todo el espacio, con respecto a la referencia en $r=a$:

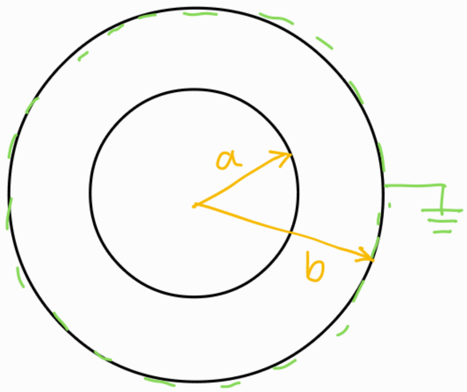
$$V_a(r) := \begin{cases} \bullet\ V(0<r\leq a) = -\dfrac{\rho}{4\epsilon_0}(r^2-a^2) + V_0 \\[2ex] \bullet\ V(a<r<b) = -\dfrac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\dfrac{r}{a}\right) + V_0 \\[2ex] \bullet\ V(r>b) = -\dfrac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\dfrac{b}{a}\right) + V_0 \end{cases}$$

Y además, está bien definido pues es continuo:

- $$V(0<r\leq a)\Big|_{r=a} = \cancelto{0}{-\frac{\rho}{4\epsilon_0}\cancelto{0}{(a^2-a^2)}} + V_0$$
$$= \cancelto{0}{-\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\cancelto{1}{\left(\frac{a}{a}\right)}} + V_0 = V(a<r<b)\Big|_{r=a} \quad //$$

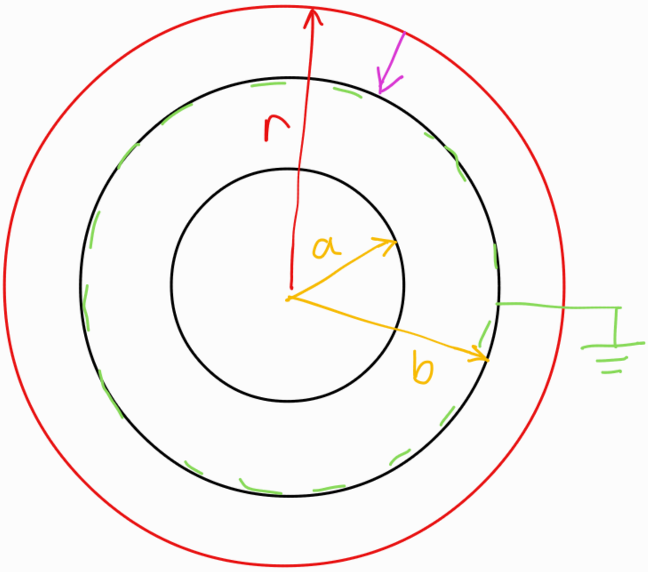
- $$V(a<r<b)\Big|_{r=b} = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + V_0 = V(r>b)\Big|_{r=b} \quad //$$

P1 c) Se tiene que: • $V(r_{ref} = b) = 0$



• $$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{\rho}{2\epsilon_0} r \,\hat{r} , & 0 < r \leq a \\ \dfrac{\rho a^2}{2\epsilon_0} \dfrac{1}{r} \,\hat{r} , & a < r < b \\ 0 \,\hat{r} , & r > b \end{cases}$$

$\underline{r>b}$



- $V(r>b) - \cancelto{0}{V(b)} = -\int_b^r \vec{E}\cdot d\vec{l}$

$$= -\int_b^r \vec{E}(r>b)\cdot d\vec{l}$$

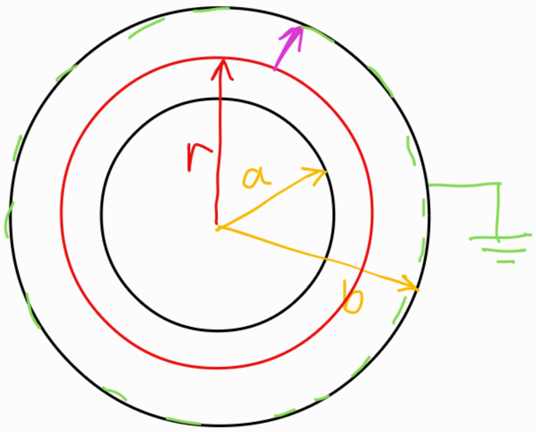
- $\vec{E}(r>b) = 0\,\hat{r}$
- $d\vec{l} = dr\,\hat{r}$

$$= -0\int_b^r dr = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{V(r>b) = 0}$$

//

$a<r<b$



$$\bullet\; V(a<r<b) - V(\cancelto{0}{b}) = -\int_b^r \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= -\underbrace{\left(\int_b^r \vec{E}(a<r<b)\cdot d\vec{l}\right)}_{\substack{\mathrm{I} \\ a<r<b}}$$

$$= \underbrace{-\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{r}{b}\right)}_{\substack{\mathrm{I} \\ a<r<b}}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(a<r<b) = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{r}{b}\right)}$$

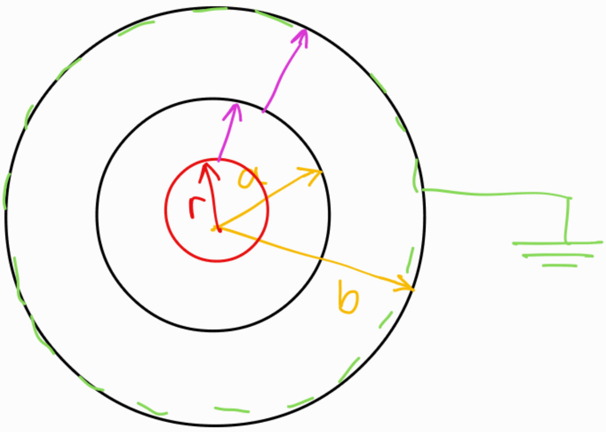
//

$\textcircled{I}$: $\displaystyle\int_b^r \vec{E}(a<r<b)\cdot d\vec{\ell}$
$a<r<b$

- $\vec{E}(a<r<b) = \dfrac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\dfrac{1}{r}\hat{r}$
- $d\vec{\ell} = dr\,\hat{r}$

$$= \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\int_b^r \frac{1}{r}dr = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\Big[\ln(|r|)\Big]_b^r \underset{\substack{r>0 \\ \Rightarrow |r|=r}}{=} \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\Big[\ln(r)-\ln(b)\Big] = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{r}{b}\right)$$

$0<r\leq a$



$$\bullet\; V(0<r\leq a) - V(\cancelto{0}{b}) = -\int_b^r \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= -\Bigg(\underbrace{\int_a^r \vec{E}(0<r\leq a)\cdot d\vec{l}}_{\mathrm{I}\ \ 0<r\leq a} + \underbrace{\int_b^a \vec{E}(a<r<b)\cdot d\vec{l}}_{\mathrm{II}\ \ 0<r\leq a} \Bigg)$$

$$= -\Bigg(\underbrace{\frac{\rho}{4\epsilon_0}(r^2-a^2)}_{\mathrm{I}\ \ 0<r\leq a} + \underbrace{\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{a}{b}\right)}_{\mathrm{II}\ \ 0<r\leq a} \Bigg)$$

$$\Rightarrow \boxed{V(0<r\leq a) = -\left(\frac{\rho}{4\epsilon_0}(r^2-a^2) + \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{a}{b}\right) \right)}$$

//

$\textcircled{I}$: $\displaystyle\int_a^r \vec{E}(0<r\leq a)\cdot d\vec{l}$ $\quad\Big\|\quad \cdot\, \vec{E}(0<r\leq a) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} r\,\hat{r}$ $\quad \cdot\, d\vec{l} = dr\,\hat{r}$

$0<r\leq a$

$$= \frac{\rho}{2\epsilon_0}\int_a^r r\,dr = \frac{\rho}{2\epsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\left[r^2\right]_a^r = \frac{\rho}{4\epsilon_0}\left[r^2 - a^2\right]$$

$\textcircled{II}$: $\displaystyle\int_b^a \vec{E}(a<r<b)\cdot d\vec{l}$ $\quad\Big\|\quad \cdot\, \vec{E}(a<r<b) = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\frac{1}{r}\hat{r}$ $\quad \cdot\, d\vec{l} = dr\,\hat{r}$

$0<r\leq a$

$$= \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\int_b^a \frac{1}{r}dr = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\left[\ln(|r|)\right]_b^a = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\left[\ln(a) - \ln(b)\right] = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

$r>0$
$\Rightarrow |r| = r$

Entonces, queda el potencial definido en todo el espacio, con respecto a la referencia en $r=b$:

$$V_b(r) := \begin{cases} \bullet\, V(0<r\leq a) = -\left(\dfrac{\rho}{4\epsilon_0}(r^2-a^2) + \dfrac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)\right) \\[2ex] \bullet\, V(a<r<b) = -\dfrac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\dfrac{r}{b}\right) \\[2ex] \bullet\, V(r>b) = 0 \end{cases}$$

Y además, está bien definido pues es continuo:

$$\bullet\, V(0<r\leq a)\Big|_{r=a} = -\left(\cancel{\frac{\rho}{4\epsilon_0}(a^2-a^2)}^{\,\to 0} + \boxed{\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{a}{b}\right)}\right)$$

$$= \boxed{-\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{a}{b}\right)} = V(a<r<b)\Big|_{r=a}$$

$$\bullet\, V(a<r<b)\Big|_{r=b} = \cancel{-\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{b}\right)}^{\,\to 0}$$

$$= 0 = V(r>b)\Big|_{r=b}$$

P1 d) Se tienen los siguientes potenciales

$$V_a(r) := \begin{cases} \bullet\ V(0<r\leq a) = -\dfrac{\rho}{4\epsilon_0}(r^2-a^2) + V_0 \\ \bullet\ V(a<r<b) = -\dfrac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\dfrac{r}{a}\right) + V_0 \\ \bullet\ V(r>b) = -\dfrac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\dfrac{b}{a}\right) + V_0 \end{cases}$$

$$V_b(r) := \begin{cases} \bullet\ V(0<r\leq a) = -\left(\dfrac{\rho}{4\epsilon_0}(r^2-a^2) + \dfrac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)\right) \\ \bullet\ V(a<r<b) = -\dfrac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\dfrac{r}{b}\right) \\ \bullet\ V(r>b) = 0 \end{cases}$$

$V_0 = -\dfrac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$

$-\dfrac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\left(\ln\left(\dfrac{r}{b}\right) + \ln\left(\dfrac{a}{b}\right)\right)$

Ambos difieren por una constante, pero describen el mismo campo eléctrico en el espacio, ya que si $V_a = V_b + \beta$, $\underbrace{\beta \in \mathbb{R}}_{\text{constante}}$

$$\Rightarrow \nabla V_a = \nabla(V_b + \beta) = \nabla V_b + \underbrace{\cancel{\nabla \beta}^{\,0}}_{\text{es constante}} \Rightarrow \vec{E} = -\nabla V_a = -\nabla V_b \,//$$

Notar que dicha constante es $\beta = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) - V_0$.

En efecto:

- $$V_a(r>b) + \beta = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) + V_0 + \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) - V_0$$
$$= 0 = V_b(r>b)$$

- $$V_a(a<r<b) + \beta = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{r}{a}\right) + V_0 + \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) - V_0$$
$$= \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\left(\ln\left(\frac{b}{a}\right) - \ln\left(\frac{r}{a}\right)\right) = \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{\frac{b}{a}}{\frac{r}{a}}\right)$$
$$= \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{r}\right) = -\frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{r}{b}\right) = V_b(a<r<b)$$

- $$V_a(0<r\leq a) + \beta = \frac{-\rho}{4\epsilon_0}(r^2 - a^2) + V_0 + \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) - V_0$$
$$= -\frac{\rho}{4\epsilon_0}(r^2 - a^2) + \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$
$$= -\frac{\rho}{4\epsilon_0}(r^2 - a^2) - \frac{\rho a^2}{2\epsilon_0}\ln\left(\frac{b}{a}\right) = V_b(0<r\leq a)$$

P_2

P2 a) Sí es un condensador porque es un arreglo de conductores.

P2 b) Como solo se pide la capacitancia, se requiere una d.d.p. entre las placas.

Para calcular dicha d.d.p., se requiere el campo!

Por simetría cilíndrica, se usa Ley de Gauss entre las placas, asumiendo que existe una carga en una de las armaduras:

$a<r<b$

$$\Rightarrow \oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \int_0^L\int_0^{2\pi} E(r)\hat{r}\cdot r\,d\theta\,dz\,\hat{r} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow 2\pi r L E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\frac{1}{r}\hat{r}$$

Se calcula la d.d.p.:

$$V(a)-V(b) = -\int_a^b \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

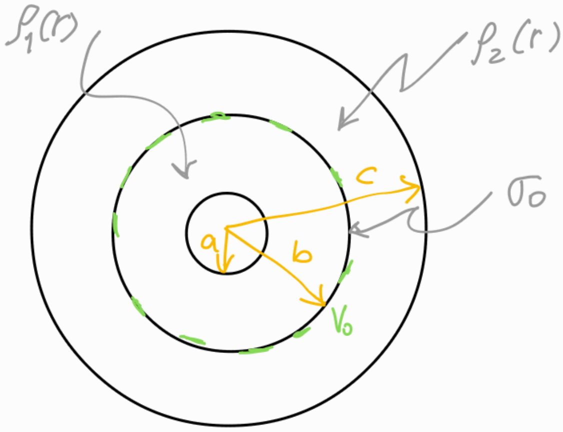
$$\Rightarrow \Delta V = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)} = \frac{Q}{\Delta V L}$$

Justamente es $\frac{\text{capacitancia}}{\text{unidad de largo}}$ //

P_3

Esquema del problema: (Resolución: muy similar a P_1)



Se conoce el campo eléctrico, que es definido por partes, para esta distribución de simetría cilíndrica.

Se tiene como dato el valor del potencial en $\rho = b$, $V(b) = V_0$.

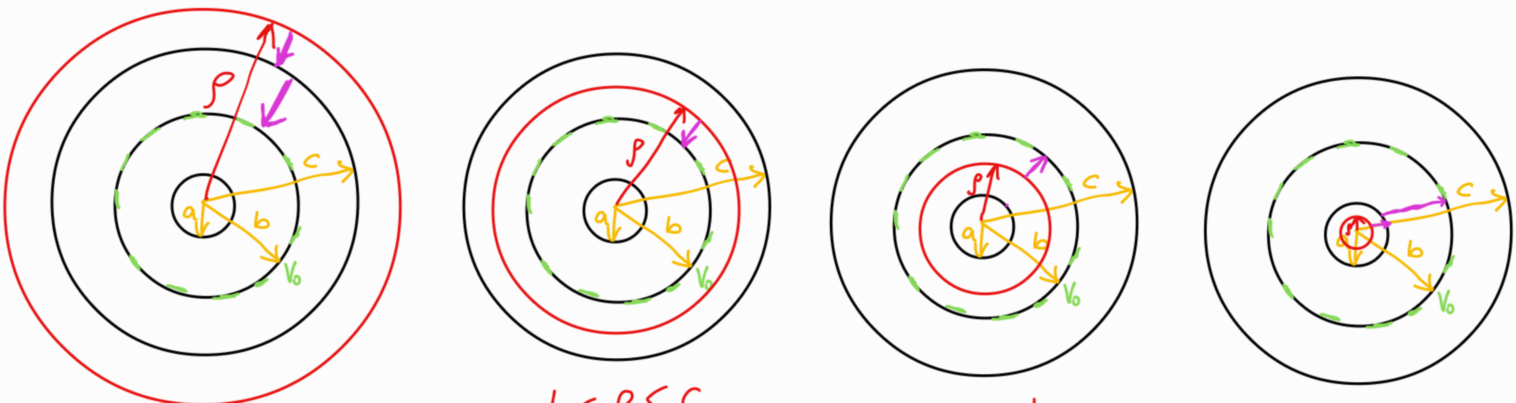
Para calcular el potencial en todo el espacio, siempre se requiere una referencia, tal que nos sea útil.

Como se conoce el valor del potencial ahí, se tomará esa ref.

Ya que el dato es el campo eléctrico, para llegar al potencial se utiliza $V(A) - V(B) = -\int_B^A \vec{E} \cdot d\vec{l}$.

Debido a que el campo eléctrico está definido por partes, el potencial también (en los mismos espacios), pero ¡DEBE ser continuo!

La idea siempre es "acercarse" a la referencia. Al hacer eso, se podría pasar por zonas con distinto campo eléctrico; por eso hay que considerarlos.



$\rho > c$ $\qquad$ $b < \rho \leq c$ $\qquad$ $a < \rho < b$ $\qquad$ $0 < \rho \leq a$

El campo eléctrico tiene la forma:

$$\vec{E} = \begin{cases} \dfrac{a}{\epsilon_0}\hat{\rho} \ , & 0<\rho\leq a \\[2ex] \dfrac{a^2}{\epsilon_0}\dfrac{1}{\rho}\hat{\rho}, & a<\rho<b \\[2ex] \left(\dfrac{a^2}{\epsilon_0}+\dfrac{\sigma_0 b}{\epsilon_0}\right)\dfrac{1}{\rho} + \underbrace{\dfrac{bc}{\epsilon_0}\dfrac{1}{\rho}\ln\left(\dfrac{\rho}{b}\right)}\hat{\rho}, & b<\rho\leq c \\[2ex] \quad = \dfrac{bc}{\epsilon_0}\dfrac{1}{\rho}\left(\ln(\rho)-\ln(b)\right) & \\[2ex] \quad = \dfrac{bc}{\epsilon_0}\dfrac{1}{\rho}\ln(\rho) - \dfrac{bc}{\epsilon_0}\ln(b)\dfrac{1}{\rho} & \\[2ex] = \left(\dfrac{a^2}{\epsilon_0}+\dfrac{\sigma_0 b}{\epsilon_0}-\dfrac{bc}{\epsilon_0}\ln(b)\right)\dfrac{1}{\rho} + \dfrac{bc}{\epsilon_0}\dfrac{1}{\rho}\ln(\rho) & \\[2ex] \underbrace{\left(\dfrac{a^2}{\epsilon_0}+\dfrac{\sigma_0 b}{\epsilon_0}+\dfrac{bc}{\epsilon_0}\ln\left(\dfrac{c}{b}\right)\right)}_{\mu = \text{cte}}\dfrac{1}{\rho}\hat{\rho} \ , & \rho>c \end{cases}$$

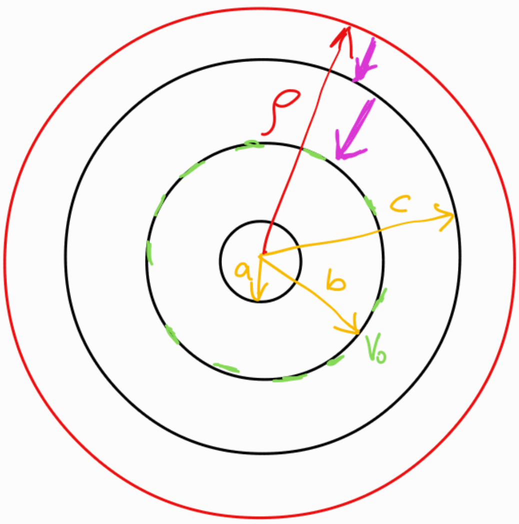
Si tomamos $r_{ref} = \infty$ y $V(r_{ref}) = 0$:

$$V(\rho>c) - \cancel{V(\infty)}^{0} = -\int_{\infty}^{\rho}\vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{\infty}^{\rho}\vec{E}(\rho>c)\cdot d\vec{l}$$

$$= -\mu\int_{\infty}^{\rho}\frac{1}{\rho}d\rho = -\mu\left[\ln(|\rho|)\right]_{\infty}^{\rho} = -\mu\left[\ln(\rho) - \underbrace{\ln(\rho\to\infty)}_{\to\infty}\right] \ !!$$

Moraleja: como cilindro no está acotado en el espacio, siempre tomar la referencia en algún radio conocido.

$\underline{\rho > c}$



$$\bullet\ V(\rho>c) - \cancel{V(b)}^{\,V_0} = -\int_b^{\rho} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= -\left(\underbrace{\int_c^{\rho} \vec{E}(\rho>c)\cdot d\vec{l}}_{\mathrm{I}\ \ \rho>c} + \underbrace{\int_b^{c} \vec{E}(b<\rho\leq c)\cdot d\vec{l}}_{\mathrm{II}\ \ \rho>c} \right)$$

(ver desarrollo más abajo)

$$= -\left[\underbrace{\left(\frac{a^2}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} + \frac{bc}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{c}{b}\right)\right) \ln\left(\frac{\rho}{c}\right)}_{\mathrm{I}\ \ \rho>c} + \underbrace{\left(\frac{a^2}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} + \frac{bc}{2\epsilon_0}\ln(bc)\right) \ln\left(\frac{c}{b}\right)}_{\mathrm{II}\ \ \rho>c} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{V(\rho>c) = -\left[\left(\frac{a^2}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} + \frac{bc}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{c}{b}\right)\right) \ln\left(\frac{\rho}{c}\right) + \left(\frac{a^2}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} + \frac{bc}{2\epsilon_0}\ln(bc)\right) \ln\left(\frac{c}{b}\right) \right] + V_0}$$

I : $\int_c^\rho \vec{E}(\rho>c)\cdot d\vec{l}$

$\rho>c$

$\bullet\ \vec{E}(\rho>c) = \left(\frac{a^2}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} + \frac{bc}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{c}{b}\right)\right)\frac{1}{\rho}\hat{\rho}$

$\bullet\ d\vec{l} = d\rho\,\hat{\rho}\ ,\ \rho>c$

$$= \left(\frac{a^2}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} + \frac{bc}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{c}{b}\right)\right)\int_c^\rho \frac{1}{\rho}\,d\rho$$

$$= \left(\frac{a^2}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} + \frac{bc}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{c}{b}\right)\right)\Big[\ln(|\rho|)\Big]_c^\rho \quad ; \quad |\rho|>0 \Rightarrow |\rho|=\rho$$

$$= \left(\frac{a^2}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} + \frac{bc}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{c}{b}\right)\right)\Big[\ln(\rho)-\ln(c)\Big]$$

$$= \left(\frac{a^2}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} + \frac{bc}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{c}{b}\right)\right)\ln\left(\frac{\rho}{c}\right) \;//$$

(II): $\rho > c$

$$\int_b^c \vec{E}(b<\rho\leq c)\cdot d\vec{l} \quad \Bigg\| \; \cdot \vec{E}(b<\rho\leq c) = \left(\frac{a^2}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} - \frac{bc}{\epsilon_0}\ln(b)\right)\frac{1}{\rho} + \frac{bc}{\epsilon_0}\frac{1}{\rho}\ln(\rho) \qquad \cdot d\vec{l} = d\rho\,\hat{\rho}$$

$$= \left(\frac{a^2}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} - \frac{bc}{\epsilon_0}\ln(b)\right)\int_b^c \frac{1}{\rho}d\rho + \frac{bc}{\epsilon_0}\int_b^c \frac{1}{\rho}\ln(\rho)d\rho$$

$$\left\} \begin{array}{l} \cdot\, u = \ln(\rho) \\ \Rightarrow du = \frac{1}{\rho} \end{array} \right\| \begin{array}{l} \rho = c \Rightarrow u = \ln(c) \\ \rho = b \Rightarrow u = \ln(b) \end{array}$$

$$= \left(\frac{a^2}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} - \frac{bc}{\epsilon_0}\ln(b)\right)\Big[\ln(|\rho|)\Big]_b^c + \frac{bc}{\epsilon_0}\int_{\ln(b)}^{\ln(c)} u\,du \quad ; \quad \rho > 0 \Rightarrow |\rho| = \rho$$

$$= \left(\frac{a^2}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} - \frac{bc}{\epsilon_0}\ln(b)\right)\Big[\ln(c) - \ln(b)\Big] + \frac{bc}{\epsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\Big[u^2\Big]_{\ln(b)}^{\ln(c)}$$

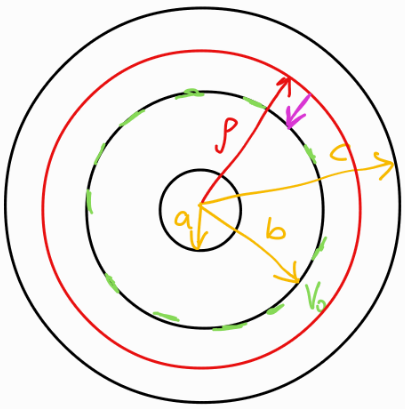
$$= \left(\frac{a^2}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} - \frac{bc}{\epsilon_0}\ln(b)\right)\Big[\ln(c) - \ln(b)\Big] + \frac{bc}{2\epsilon_0}\underbrace{\Big[\ln(c)^2 - \ln(b)^2\Big]}_{[\ln(c)+\ln(b)][\ln(c)-\ln(b)]}$$

$$= \Big[\ln(c) - \ln(b)\Big]\left(\frac{a^2}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} \underline{- \frac{bc}{\epsilon_0}\ln(b)} + \underbrace{\frac{bc}{2\epsilon_0}\Big[\ln(c) + \ln(b)\Big]}_{= \frac{bc}{2\epsilon_0}\ln(c) + \underline{\frac{bc}{2\epsilon_0}\ln(b)}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{c}{b}\right)\left(\frac{a^2}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} + \frac{bc}{2\epsilon_0}\ln(b) + \frac{bc}{2\epsilon_0}\ln(c)\right)$$

$$= \left(\frac{a^2}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} + \frac{bc}{2\epsilon_0}\ln(bc)\right)\ln\left(\frac{c}{b}\right)$$

$\underline{b<\rho\leq c}$



$$\cdot\, V(b<\rho\leq c) - \cancel{V(b)}^{V_0} = -\int_b^{\rho} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= -\underbrace{\left(\int_b^{\rho} \vec{E}(b<\rho\leq c)\cdot d\vec{l}\right)}_{\mathrm{I}_{b<\rho\leq c}}$$

(ver desarrollo más abajo)

$$= \underbrace{\left(\frac{a^2}{\epsilon_0}+\frac{\sigma_0 b}{\epsilon_0}+\frac{bc}{2\epsilon_0}\ln(b\rho)\right)\ln\left(\frac{\rho}{b}\right)}_{\mathrm{I}_{b<\rho\leq c}}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(b<\rho\leq c) = -\ln\left(\frac{\rho}{b}\right)\left(\frac{a^2}{\epsilon_0}+\frac{\sigma_0 b}{\epsilon_0}+\frac{bc}{2\epsilon_0}\ln(b\rho)\right)+V_0} \;//$$

$\textcircled{II}$ $\rho > c$ SS

$\textcircled{I}$: $b < \rho < c$

$$\int_b^\rho \vec{E}(b<\rho\leq c)\cdot d\vec{l} \quad \Bigg\| \begin{array}{l} \cdot\ \vec{E}(b<\rho\leq c) = \left(\frac{a^2}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} - \frac{bc}{\epsilon_0}\ln(b)\right)\frac{1}{\rho} + \frac{bc}{\epsilon_0}\frac{1}{\rho}\ln(\rho) \\ \cdot\ d\vec{l} = d\rho\,\hat{\rho} \end{array}$$

$$= \left(\frac{a^2}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} - \frac{bc}{\epsilon_0}\ln(b)\right)\int_b^\rho \frac{1}{\rho}d\rho + \frac{bc}{\epsilon_0}\int_b^\rho \frac{1}{\rho}\ln(\rho)d\rho \quad \left\{ \begin{array}{l} \cdot\ u = \ln(\rho) \\ \Rightarrow du = \frac{1}{\rho} \end{array} \right. \Bigg\| \begin{array}{l} \rho=\rho \Rightarrow u=\ln(\rho) \\ \rho=b \Rightarrow u=\ln(b) \end{array}$$

$$= \left(\frac{a^2}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} - \frac{bc}{\epsilon_0}\ln(b)\right)\Big[\ln(|\rho|)\Big]_b^\rho + \frac{bc}{\epsilon_0}\int_{\ln(b)}^{\ln(\rho)} u\,du \quad ; \quad \rho>0 \Rightarrow |\rho| = \rho$$

$$= \left(\frac{a^2}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} - \frac{bc}{\epsilon_0}\ln(b)\right)\Big[\ln(\rho) - \ln(b)\Big] + \frac{bc}{\epsilon_0}\cdot\frac{1}{2}\Big[u^2\Big]_{\ln(b)}^{\ln(\rho)}$$

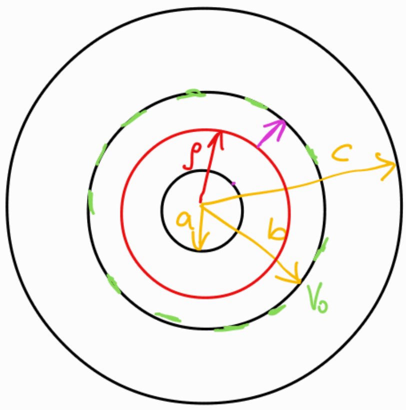
$$= \left(\frac{a^2}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} - \frac{bc}{\epsilon_0}\ln(b)\right)\Big[\ln(\rho) - \ln(b)\Big] + \frac{bc}{2\epsilon_0}\underbrace{\Big[\ln(\rho)^2 - \ln(b)^2\Big]}_{[\ln(\rho)+\ln(b)][\ln(\rho)-\ln(b)]}$$

$$= \Big[\ln(\rho) - \ln(b)\Big]\left(\frac{a^2}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} \underbrace{- \frac{bc}{\epsilon_0}\ln(b)} + \underbrace{\frac{bc}{2\epsilon_0}\Big[\ln(\rho) + \ln(b)\Big]}_{= \underbrace{\frac{bc}{2\epsilon_0}\ln(\rho)} + \underbrace{\frac{bc}{2\epsilon_0}\ln(b)}}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{\rho}{b}\right)\left(\frac{a^2}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} + \frac{bc}{2\epsilon_0}\ln(b) + \underbrace{\frac{bc}{2\epsilon_0}\ln(\rho)}\right)$$

$$= \left(\frac{a^2}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} + \frac{bc}{2\epsilon_0}\ln(b\rho)\right)\ln\left(\frac{\rho}{b}\right) \;//$$

$\underline{a<\rho\leq b}$



$$\cdot\; V(a<\rho<b) - \cancel{V(b)}^{\,V_0} = -\int_b^{\rho} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= -\left(\underbrace{\int_b^{\rho} \vec{E}(a<\rho<b)\cdot d\vec{l}}_{\mathrm{I}_{\;a<\rho\leq b}}\right)$$

(ver desarrollo más abajo)

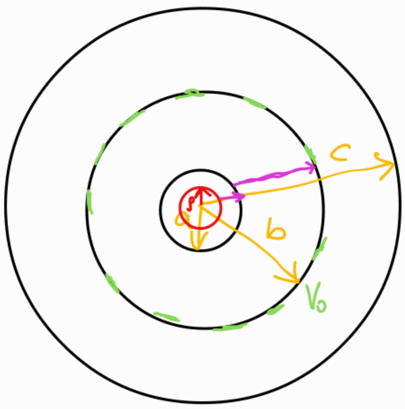
$$= \underbrace{-\frac{a^2}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{\rho}{b}\right)}_{\mathrm{I}_{\;a<\rho\leq c}}$$

$$\Rightarrow \boxed{V(b<\rho\leq c) = -\frac{a^2}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{\rho}{b}\right) + V_0} \;//$$

$$\textcircled{I}_{a<\rho\leq b} : \int_b^\rho \vec{E}(a<\rho<b)\cdot d\vec{l} \quad \Bigg\| \quad \begin{array}{l} \cdot\ \vec{E}(a<\rho<b) = \dfrac{a^2}{\epsilon_0}\dfrac{1}{\rho}\hat{\rho} \\ \cdot\ d\vec{l} = d\rho\,\hat{\rho}\ ,\ a<\rho\leq b \end{array}$$

$$= \frac{a^2}{\epsilon_0}\int_b^\rho \frac{1}{\rho}\,d\rho \underset{\rho>0\Rightarrow|\rho|=\rho}{=} \frac{a^2}{\epsilon_0}\Big[\ln(|\rho|)\Big]_b^\rho = \frac{a^2}{\epsilon_0}\Big[\ln(\rho)-\ln(b)\Big] = \frac{a^2}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{\rho}{b}\right)$$

$0<\rho\leq a$



$$\cdot\, V(0<\rho\leq a) - \cancel{V(b)}^{\,V_0} = -\int_b^{\rho} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= -\Bigg(\underbrace{\int_a^{\rho} \vec{E}(0<\rho\leq a)\cdot d\vec{l}}_{\mathrm{I}\;\; 0<\rho\leq a} + \underbrace{\int_b^{a} \vec{E}(a<\rho<b)\cdot d\vec{l}}_{\mathrm{II}\;\; 0<\rho\leq a}\Bigg)$$

(ver desarrollo más abajo)

$$= -\Bigg(\underbrace{\frac{a}{\epsilon_0}(\rho-a)}_{\mathrm{I}\;\; 0<\rho\leq a} + \underbrace{\frac{a^2}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{a}{b}\right)}_{\mathrm{II}\;\; 0<\rho\leq a}\Bigg)$$

$$\Rightarrow \boxed{V(0<\rho\leq a) = -\left(\frac{a}{\epsilon_0}(\rho-a) + \frac{a^2}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{a}{b}\right)\right) + V_0}$$

//

$\textcircled{I}$ $0<\rho\leqslant a$: $\displaystyle\int_a^\rho \vec{E}(0<\rho\leqslant a)\cdot d\vec{l}$ $\Bigg\|$ $\cdot\ \vec{E}(0<\rho\leqslant a)=\frac{a}{\epsilon_0}\hat{\rho}$

$\cdot\ d\vec{l}=d\rho\hat{\rho}\ ,\ 0<\rho\leqslant a$

$$= \frac{a}{\epsilon_0}\int_a^\rho d\rho = \frac{a}{\epsilon_0}\left[\rho\right]_a^\rho = \frac{a}{\epsilon_0}\left[\rho-a\right] \ //$$

$\textcircled{I}$ $a<\rho<b$ $\mathbin{\S\S}$ $\textcircled{II}$ $0<\rho\leqslant a$: $\displaystyle\int_b^a \vec{E}(a<\rho<b)\cdot d\vec{l}$ $\Bigg\|$ $\cdot\ \vec{E}(a<\rho<b)=\frac{a^2}{\epsilon_0}\frac{1}{\rho}\hat{\rho}$

$\cdot\ d\vec{l}=d\rho\hat{\rho}\ ,\ a<\rho<b$

$$= \frac{a^2}{\epsilon_0}\int_b^a \frac{1}{\rho}d\rho = \frac{a^2}{\epsilon_0}\left[\ln(|\rho|)\right]_b^a = \frac{a^2}{\epsilon_0}\left[\ln(a)-\ln(b)\right] = \frac{a^2}{\epsilon_0}\ln\left(\frac{a}{b}\right) //$$

$\rho>0 \Rightarrow |\rho|=\rho$

Entonces, queda el potencial definido en todo el espacio, con respecto a la referencia en $\rho = b$:

$$\begin{cases} \bullet\, V(0<\rho\leq a) = -\left(\dfrac{a}{\epsilon_0}(\rho-a) + \dfrac{a^2}{\epsilon_0}\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)\right) + V_0 \\[2ex] \bullet\, V(a<\rho<b) = -\dfrac{a^2}{\epsilon_0}\ln\left(\dfrac{\rho}{b}\right) + V_0 \\[2ex] \bullet\, V(b<\rho\leq c) = -\left(\dfrac{a^2}{\epsilon_0} + \dfrac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} + \dfrac{bc}{2\epsilon_0}\ln(b\rho)\right)\ln\left(\dfrac{\rho}{b}\right) + V_0 \\[2ex] \bullet\, V(\rho>c) = -\left[\left(\dfrac{a^2}{\epsilon_0} + \dfrac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} + \dfrac{bc}{\epsilon_0}\ln\left(\dfrac{c}{b}\right)\right)\ln\left(\dfrac{\rho}{c}\right) + \left(\dfrac{a^2}{\epsilon_0} + \dfrac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} + \dfrac{bc}{2\epsilon_0}\ln(bc)\right)\ln\left(\dfrac{c}{b}\right)\right] + V_0 \end{cases}$$

Y además, está bien definido pues es continuo:

$$\bullet\, V(0<\rho\leq a)\Big|_{\rho=a} = -\left(\cancelto{0}{\dfrac{a}{\epsilon_0}(\cancelto{0}{a-a})} + \dfrac{a^2}{\epsilon_0}\ln\left(\dfrac{a}{b}\right)\right) + V_0$$

$$= -\dfrac{a^2}{\epsilon_0}\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) + V_0 = V(a<\rho<b)\Big|_{\rho=b} \quad //$$

$$\bullet\, V(a<\rho<b)\Big|_{\rho=b} = \cancelto{0}{-\dfrac{a^2}{\epsilon_0}\ln\left(\cancelto{1}{\dfrac{b}{b}}\right)} + V_0$$

$$= \cancelto{0}{-\left(\dfrac{a^2}{\epsilon_0} + \dfrac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} + \dfrac{bc}{2\epsilon_0}\ln(bb)\right)\ln\left(\cancelto{1}{\dfrac{b}{b}}\right)} + V_0 = V(b<\rho\leq c)\Big|_{\rho=b} \quad //$$

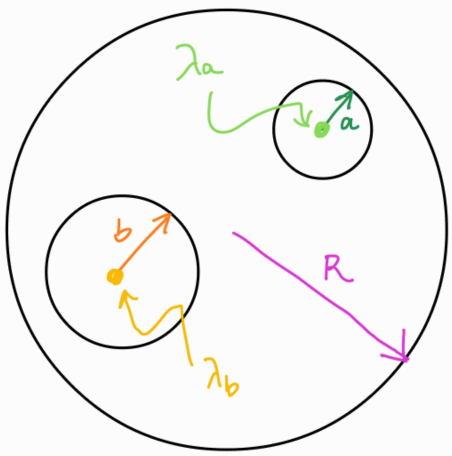
$$\bullet\, V(b<\rho\leq c)\Big|_{\rho=c} = -\left(\dfrac{a^2}{\epsilon_0} + \dfrac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} + \dfrac{bc}{2\epsilon_0}\ln(bc)\right)\ln\left(\dfrac{c}{b}\right) + V_0$$

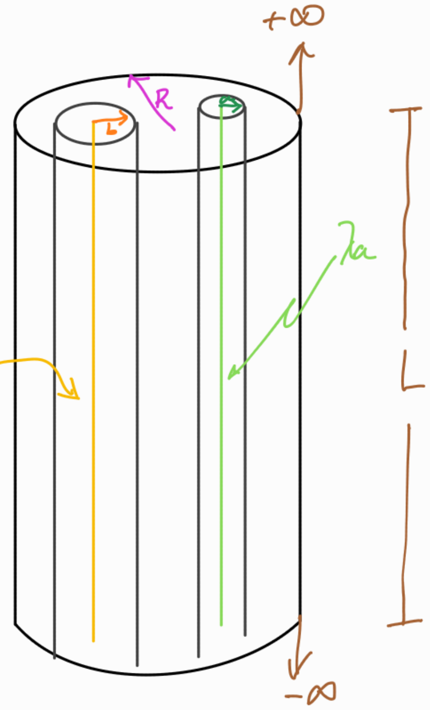
$$= -\left[\cancelto{0}{\left(\dfrac{a^2}{\epsilon_0} + \dfrac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} + \dfrac{bc}{\epsilon_0}\ln\left(\dfrac{c}{b}\right)\right)\ln\left(\cancelto{1}{\dfrac{c}{c}}\right)} + \left(\dfrac{a^2}{\epsilon_0} + \dfrac{\sigma_0 b}{\epsilon_0} + \dfrac{bc}{2\epsilon_0}\ln(bc)\right)\ln\left(\dfrac{c}{b}\right)\right] + V_0$$

$$= V(\rho>c)\Big|_{\rho=c} \quad //$$

P4

Esquema del problema:





Ya que el conductor está descargado, tiene carga neta cero; pero esto no significa que no pueda tener carga en el exterior.

(si estuviese cargado, la única forma de que tuviese carga es que esta se distribuya en la superficie, ya que dentro no puede encerrar carga pues su campo eléctrico es nulo dentro).

Sin embargo, las paredes internas de las cavidades de radio a y b también son conductores (pues son parte del cilindro macizo), luego si existe carga en esas cavidades, las superficies deben estar cargadas de manera tal que se anulen las cargas (y así, también se cumple que el campo eléctrico es nulo).

P3) a) Ya que $(\text{densidad de carga lineal}) = \dfrac{(\text{carga})}{(\text{largo})}$, entonces en cada caso:

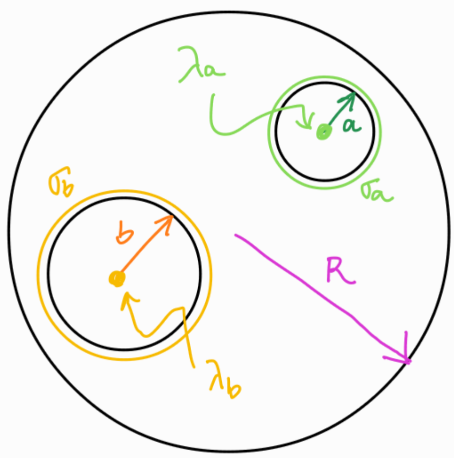
- $\lambda_b = \dfrac{Q_b}{L}$ $\Rightarrow Q_a = \lambda_b L$ //
- $\lambda_a = \dfrac{Q_a}{L}$ $\Rightarrow Q_a = \lambda_a L$ //

} las cargas que se distribuyen en la línea no tienen por qué ser iguales (por eso se usan etiquetas) (pero sí el largo, por la geometría)

Por otro lado, $(\text{densidad de carga superficial}) = \dfrac{(\text{carga})}{(\text{área})}$, entonces en cada manto entorno a las distribuciones lineales, se debe distribuir la carga opuesta a su respectivas distribuciones en el centro:

- $\sigma_b = \dfrac{-Q_b}{2\pi b L} = \dfrac{-\lambda_b L}{2\pi b L}$ $\Rightarrow \boxed{\sigma_b = \dfrac{-\lambda_b}{2\pi b}}$
- $\sigma_a = \dfrac{-Q_a}{2\pi a L} = \dfrac{-\lambda_a L}{2\pi a L}$ $\Rightarrow \boxed{\sigma_a = \dfrac{-\lambda_a}{2\pi a}}$

} Y entonces se tiene esto:

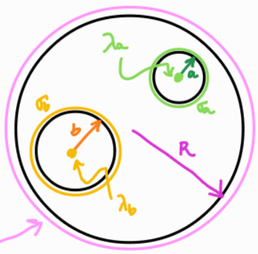


Pero debido a σ_b y σ_a, se está generando una carga neta negativa en el cilindro macizo. Pero como está descargado, esta carga no puede ir a esa superficie; luego debe haber otra carga que lo cancele.

- $\sigma_R = \dfrac{-((-Q_a)+(-Q_b))}{2\pi R L} = \dfrac{Q_a+Q_b}{2\pi R L} = \dfrac{\lambda_a L + \lambda_b L}{2\pi R L} = \dfrac{(\lambda_a+\lambda_b)L}{2\pi R L}$

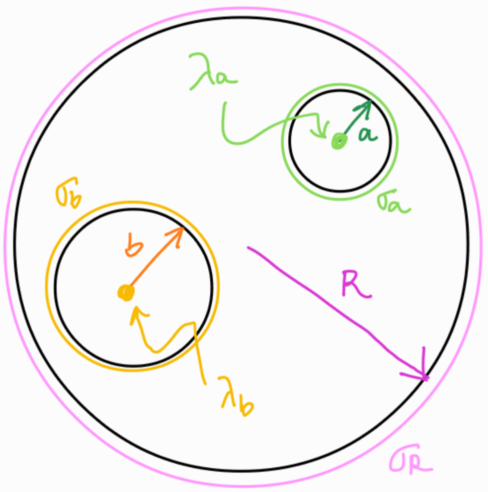
$\Rightarrow \boxed{\sigma_R = \dfrac{\lambda_a+\lambda_b}{2\pi R L}}$

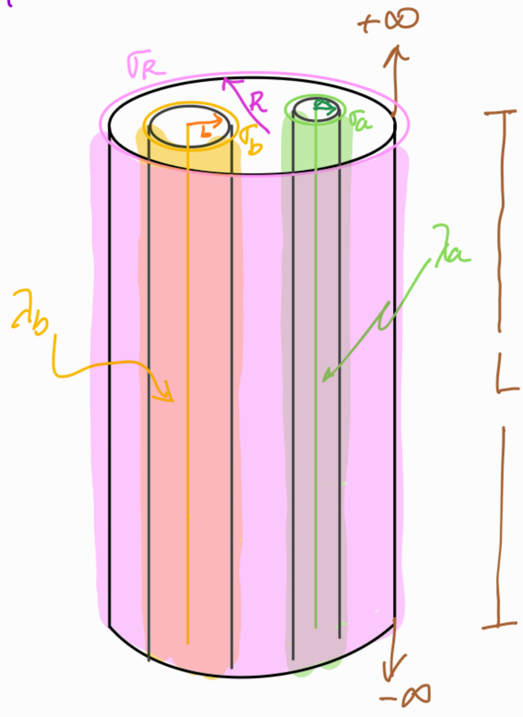
Y queda: σ_R



La densidad volumétrica de carga es nula! (no hay carga en total; es conductor).

(P3) b) De lo anterior, se obtuvo que:





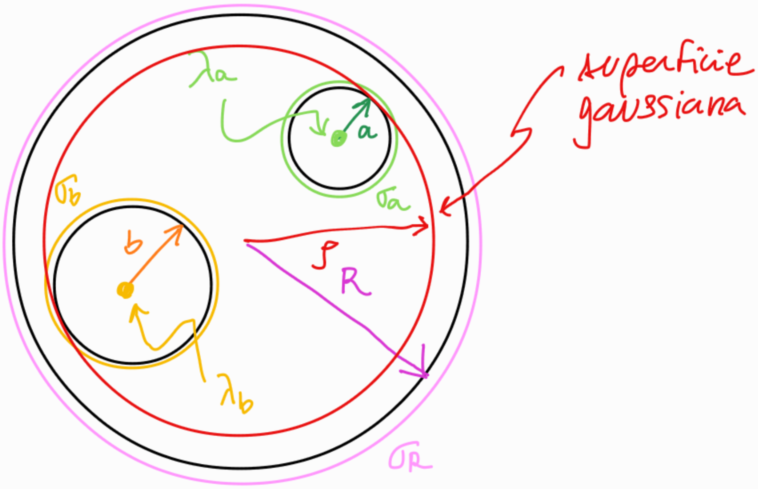
Hay simetría cilíndrica ⇝ $\vec{E} = \vec{E}(\rho,\theta,z)$

* el sistema se ve igual al rotarlo ⇒ $\vec{E} = \vec{E}(\rho,z)$
* el sistema luce igual en toda altura ⇒ $\vec{E} = \vec{E}(\rho)$ ☆
* las líneas de campo van en $\hat{\rho}$ ⇒ $\vec{E} = E(\rho)\hat{\rho}$

Entonces se puede usar ley de Gauss: $\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{encerrada}}{\epsilon_0}$

El cilindro macizo diferencia 2 regiones: (i) $0<\rho<R$ (dentro)
(ii) $R<\rho$ (fuera)

(i) $0<\rho<R$



L.I.|

$$\bullet \oiint \vec{E}\cdot d\vec{S} \quad \left\| \begin{array}{l} \vec{E} = E(\rho)\hat{\rho} \\ d\vec{S} = \rho d\theta dz\,\hat{\rho} + d\rho dz\,\hat{\theta} + \rho d\rho d\theta\,\hat{z} \end{array} \right\| \; \vec{E}\cdot d\vec{S} = E(\rho)\rho d\theta dz$$

$(0<\rho<R)$
$(0<\theta<2\pi)$
$(0<z<L)$

$$\Rightarrow \oiint_{0\,0}^{L\,2\pi} E(\rho)\rho d\theta dz = E(\rho)\rho\int_0^L dz\int_0^{2\pi} d\theta = E(\rho)\rho\,[z]_0^L\,[\theta]_0^{2\pi}$$

$$= E(\rho)\rho\cdot[L-0]\cdot[2\pi-0] = E(\rho)\cdot 2\pi\rho L$$

superficie de un manto de cilindro de largo L y radio ρ, entre 0 y R.

L.D.|

$\bullet\ Q_{encerrada} = Q_a + Q_b + (-Q_a) + (-Q_b)\ \ 0$ (es un conductor!)

$$\Rightarrow \frac{Q_{encerrada}}{\epsilon_0} = 0$$

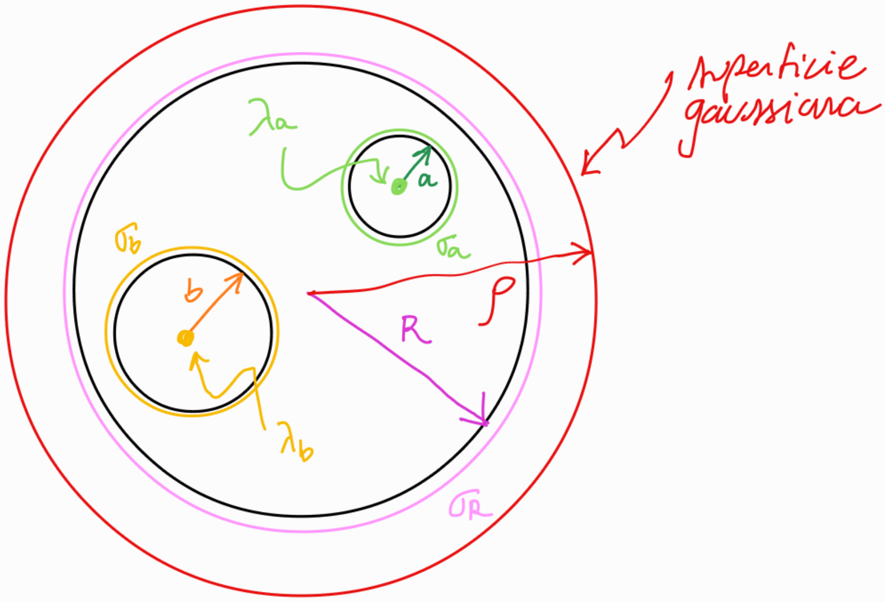
—o—

$$\Rightarrow E(\rho)\cdot 2\pi\rho L = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(\rho) = 0\hat{\rho}},\quad 0<\rho<R \;//$$

(lo cual tiene mucho sentido pues es un conductor)

(ii) $R < \rho$



L.I.|

- $\oiint \vec{E} \cdot d\vec{S}$ $\left\| \begin{array}{l} \vec{E} = E(\rho)\hat{\rho} \\ d\vec{S} = \rho d\theta dz\, \hat{\rho} + d\rho dz \hat{\theta} + \rho d\rho d\theta \hat{z} \end{array} \right| \Rightarrow \vec{E}\cdot d\vec{S} = E(\rho)\rho d\theta dz$

$(R \leq \rho)$
$(0 < \theta < 2\pi)$
$(0 < z < L)$

$$\Rightarrow \oiint_{0\ 0}^{L\ 2\pi} E(\rho)\rho d\theta dz = E(\rho)\rho \int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\theta = E(\rho)\rho\, [z]_0^L\, [\theta]_0^{2\pi}$$

$$= E(\rho)\rho \cdot [L-0]\cdot[2\pi - 0] = E(\rho)\cdot 2\pi\rho L$$

superficie de un manto de cilindro de largo L y radio ρ, entre 0 y R.

L.D.|

- $Q_{encerrada} = \sigma_R \cdot 2\pi R L = \lambda_a + \lambda_b$

$$\Rightarrow \frac{Q_{encerrada}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda_a + \lambda_b}{\epsilon_0}$$

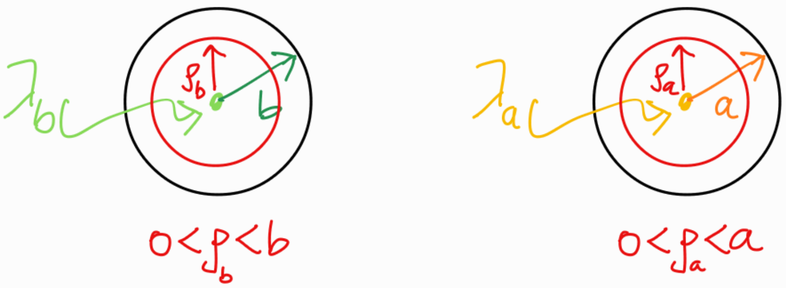
—o—

$$\Rightarrow E(\rho)\cdot 2\pi\rho L = \frac{\lambda_a + \lambda_b}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{E}(\rho) = \frac{\lambda_a + \lambda_b}{2\pi\epsilon_0 L}\frac{1}{\rho}\hat{\rho}} \quad , \quad \rho > R$$

//

P3 c) Si se pide en cada cavidad, entonces es dentro de un radio que no supere su borde (medido desde el centro respectivo):



Se puede usar Ley de Gauss por la justificación ☆.
Para λ y radio r genéricos:

L.I.

- $\oiint \vec{E}\cdot d\vec{S}$ $\left\| \begin{array}{l} \vec{E} = E(\rho)\hat{\rho} \\ d\vec{S} = \rho\, d\theta\, dz\,\hat{\rho} + d\rho\, dz\,\hat{\theta} + \rho\, d\rho\, d\theta\,\hat{z} \end{array} \right\rangle$ $\vec{E}\cdot d\vec{S} = E(\rho)\,\rho\, d\theta\, dz$

$(0<\rho<r)$
$(0<\theta<2\pi)$
$(0<z<L)$

$$\Rightarrow \int_0^L\int_0^{2\pi} E(\rho)\,\rho\, d\theta\, dz = E(\rho)\cdot 2\pi\rho L$$

L.D.

- $Q_{encerrada} = \lambda\cdot L$

$$\Rightarrow \frac{Q_{encerrada}}{\epsilon_0} = \frac{\lambda\cdot L}{\epsilon_0}$$

—o—

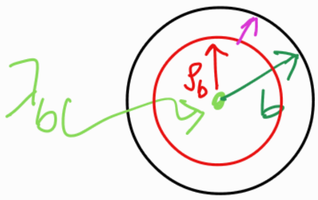
$$\Rightarrow E(\rho)\cdot 2\pi\rho L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \Rightarrow \vec{E}(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{\rho}\hat{\rho}, \quad 0<\rho<r$$

En particular, $\boxed{\vec{E}_{a,b}(\rho) = \frac{\lambda_{a,b}}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{\rho_{a,b}}\hat{\rho}_{a,b}}$, $0<\rho_{a,b}<a,b$ //

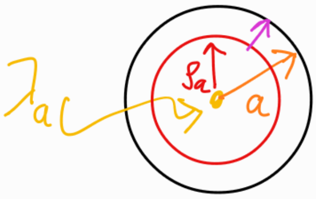
P3) d) Para calcular d.d.p., con $\vec{E}$ conocido, se usa:

$$\Delta V = V(A) - V(B) = -\int_B^A \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

Y se puede tomar como referencia el borde del conductor, pues es equipotencial (llámese $V_a(a) = V_b(b) = V_0$)



$0<\rho_b<b$



$0<\rho_a<a$

Para el caso de b, en detalle:

$$V_b(\rho_b<b) - \underbrace{V_b(b)}_{V_0} = -\int_b^{\rho_b} \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$= -\int_b^{\rho_b} \vec{E}_b(0<\rho_b<b)\cdot d\vec{l} \quad \left\| \begin{array}{l} \cdot\ \vec{E}_b(0<\rho_b<b) = \dfrac{\lambda_b}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{\rho_b}\hat{\rho}_b \\ \cdot\ d\vec{l} = d\rho_b\,\hat{\rho}_b \end{array} \right| \Rightarrow \begin{array}{l} \cdot\ \vec{E}_b(0<\rho_b<b)\cdot d\vec{l} \\ = \dfrac{\lambda_b}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{\rho_b} \end{array}$$

$$= -\frac{\lambda_b}{2\pi\varepsilon_0}\int_b^{\rho_b}\frac{1}{\rho_b}\,d\rho = -\frac{\lambda_b}{2\pi\varepsilon_0}\Big[\ln(|\rho_b|)\Big]_b^{\rho_b} = -\frac{\lambda_b}{2\pi\varepsilon_0}\Big[\ln(\rho_b) - \ln(b)\Big]$$

$\rho_b>0 \Rightarrow |\rho_b| = \rho_b$

$$\Rightarrow \boxed{V_b(\rho_b<b) = -\frac{\lambda_b}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{\rho_b}{b}\right) + V_0} \quad //$$

Análogamente, $\boxed{V_a(\rho_b<a) = -\dfrac{\lambda_a}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{\rho_a}{b}\right) + V_0}$ //

ánimo! ☺

⚠ P.D.: En general, el desarrollo de los ejercicios no suele ser taaaan extenso; pero yo lo hice así aquí para no saltarme pasos! De a poco encontrarán su método.