PAUTA AUX 1

FI2002-2

2024-1

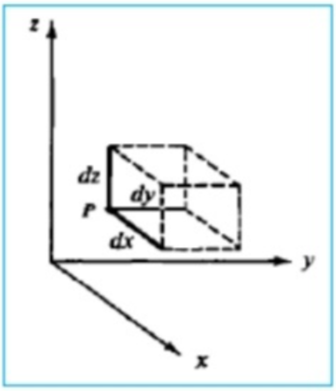
Profesor: Domenico Sapone
Auxiliares: Camila M., Bianca Z.
Ayudantes: Julio D., Gerd H.

P_1

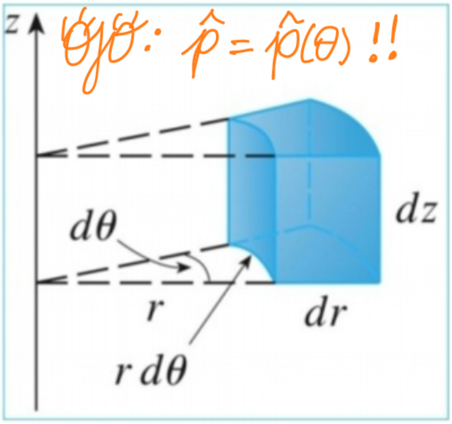
P1

Vean los simuladores de coordenadas si alguna vez tienen duda.

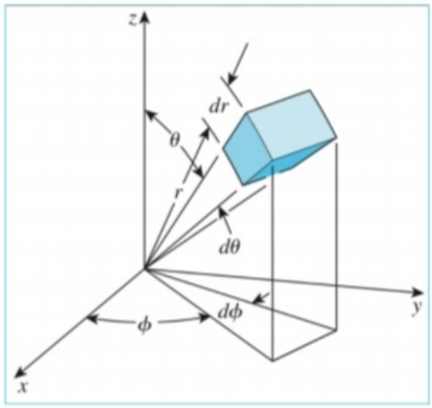
Identificando los sistemas coordenados:



cartesianas



cilíndricas



esféricas

Los elementos diferenciales se pueden deducir según las siguientes ideas, y viendo las imágenes:

- Entender la idea de un "diferencial". Se puede comprenderlo como un "pedacito" de algo, que caracterice un pedacito de largo, superficie o espacio.

- Diferencial de línea: Es posible moverse a lo largo de los 3 vectores de cada sistema. Luego, se expresa como la pequeña distancia y el versor que gobernó el movimiento ($dx\hat{x}$, $\rho d\theta\hat{\theta}$, etc.). El vector que considera las variaciones a lo largo de las 3 direcciones es el diferencial de línea.

1.1.1. De línea.

(1) Cartesianas.

$$d\vec{l} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$$

(2) Cilíndricas.

$$d\vec{l} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + dz\hat{k}$$

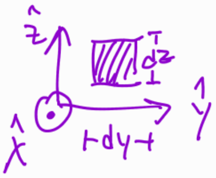
(3) Esféricas.

$$d\vec{l} = dr\hat{r} + rd\theta\hat{\theta} + rsen(\theta)d\varphi\hat{\varphi}$$

$\theta \equiv$ "ángulo que cae"

$\varphi \equiv \phi \equiv$ "ángulo que barre"

- <u>Diferencial de superficie</u>: Es posible hallar 3 planos para 3 vectores, cada uno de ellos estará orientado según el vector normal a dicha superficie, y el área de una superficie es lado · lado (aproximadamente). El vector que considera una "área" de los tres planos (i.e. <u>orientadas</u> según la normal) es el diferencial de superficie.
  su dirección

(Ejemplo: 

la normal es $\hat{x}$, luego, un pedacito de esta superficie es $dydz\,\hat{x}$.)

1.1.2. De Superficie.

Ojo: la variable del vector no aparece en los diferenciales

(1) Cartesianas.

$$d\vec{S} = dydz\hat{\imath} + dxdz\hat{\jmath} + dxdy\hat{k}$$

(2) Cilíndricas.

$$d\vec{S} = rd\theta dz\hat{r} + drdz\hat{\theta} + rd\theta dr\hat{k}$$

(3) Esféricas.

$$d\vec{S} = r^2 sen(\theta)d\theta d\varphi\hat{r} + rsen(\theta)drd\varphi\hat{\theta} + rd\theta dr\hat{\varphi}$$

$\theta \equiv$ "ángulo que cae"
$\varphi \equiv \phi \equiv$ "ángulo que barre"

- <u>Diferencial de volumen</u>: Se puede representar un "pedacito" del espacio según cada sistema de coordenadas (es como un cubo de cartesianas, pero "deformado"), luego su volumen es (aproximadamente) lado · lado · lado. Naturalmente, al referirse al volumen, no es necesario darle una dirección caracterizada por un vector, por eso el diferencial es un "escalar".

1.1.3. De Volumen.

(1) Cartesianas.

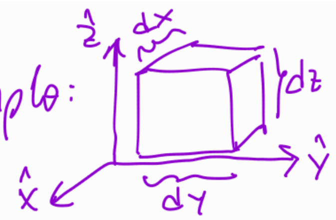
$$dV = dxdydz$$

(2) Cilíndricas.

$$dV = rdrd\varphi dz$$

(3) Esféricas.

$$dV = r^2 sen(\theta)drd\varphi d\theta$$

(Ejemplo: 

Volumen: $dxdydz$)

$\theta \equiv$ "ángulo que cae"
$\varphi \equiv \phi \equiv$ "ángulo que barre"

P2

P2 a) i) $\displaystyle\int \frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx, \quad a \in \mathbb{R}.$

Nos "molesta" el argumento del denominador, y esto es una señal para hacer cambio de variable:

$$u = a^2 + x^2$$

$$\Rightarrow du = 2x\,dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}du = x\,dx$$

luego, $\displaystyle\int \frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \frac{1}{u^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{1}{2}\,du$

$$= \frac{1}{2}\int u^{-\frac{3}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)}\cdot u^{-\frac{1}{2}} + \mathcal{C}, \quad \mathcal{C}\in\mathbb{R}$$

Nos devolvemos al cambio de variable

$$= -u^{-\frac{1}{2}} + \mathcal{C}, \quad \mathcal{C}\in\mathbb{R} \quad ; \; u = a^2+x^2$$

Si los límites fueran fijos, entonces se evalúa (T.F.C)

$$= -(a^2+x^2)^{-\frac{1}{2}} + \mathcal{C}, \quad \mathcal{C}\in\mathbb{R} \; //$$

P2 a) ii) $\displaystyle\int \frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}\,dx, \quad a \in \mathbb{R}.$

Nos "molesta" el argumento del denominador, y esto es una señal para hacer cambio de variable:

$$u = a^2 + x^2$$

$$\Rightarrow du = 2x\,dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}du = x\,dx$$

luego,
$$\int \frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{1}{2}}}\,dx = \int \frac{1}{u^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2}du$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot u^{\frac{1}{2}} + \varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

$$= u^{\frac{1}{2}} + \varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R} \quad ; u = a^2 + x^2$$

$$= (a^2+x^2)^{\frac{1}{2}} + \varphi, \quad \varphi \in \mathbb{R}$$

P2 a) iii) $\displaystyle\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx$, $a \in \mathbb{R}$

De nuevo:

Nos "molesta" el argumento del denominador, y esto es una señal para hacer cambio de variable:

$$u = a^2 + x^2$$

$$\Rightarrow du = 2x\,dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}du = x\,dx$$

no está en el integrando, entonces esta sustitución no sirve.

Usemos cambio trigonométrico: $\begin{pmatrix}\text{variable}\\ \text{integrada}\end{pmatrix} = \sqrt{\text{constante}}\, tg\begin{pmatrix}\text{nueva}\\ \text{variable}\end{pmatrix}$

$$x = a\,tg(t) \Rightarrow x^2 = a^2 tg^2(t) \Leftrightarrow a^2+x^2 = a^2 + a^2 tg^2(t)$$

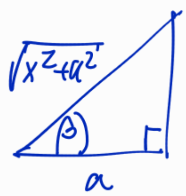
$$\Leftrightarrow a^2+x^2 = a^2 sec^2(t)$$

$$\Rightarrow dx = a\,sec^2(t)\,dt \qquad \boxed{arctg\left(\tfrac{1}{a}x\right)} = t \qquad \Leftrightarrow (a^2+x^2)^{\frac{3}{2}} = a^3 sec^3(t)$$

Luego, $$\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \int \frac{1}{a^3 sec^3(t)}\, a\,sec^2(t)\,dt = \frac{1}{a^2}\int \frac{1}{sec(t)}\,dt$$

$$= \frac{1}{a^2}\int cos(t)\,dt = \frac{1}{a^2} sen(t) + \mathcal{C},\ \mathcal{C} \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{1}{a^2} sen\left(arctg\left(\frac{1}{a}x\right)\right) + \mathcal{C},\ \mathcal{C} \in \mathbb{R}$$



- $tg(\beta) = \dfrac{x}{a}$

$\Rightarrow \beta = arctg\left(\frac{1}{a}x\right)$

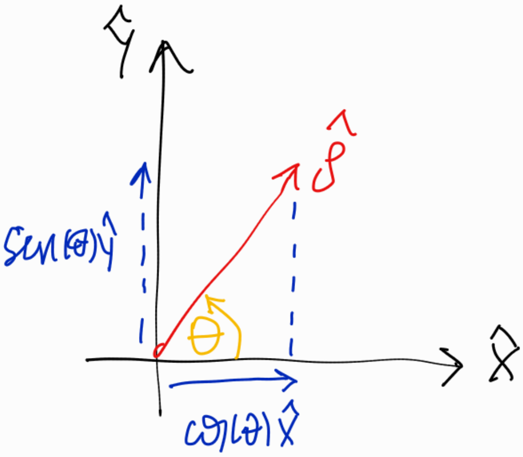
$\Rightarrow sen(\beta) = \dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$

$$= \frac{1}{a^2}\cdot \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \mathcal{C},\ \mathcal{C} \in \mathbb{R}.$$ //

P2) b) i) $\int_0^{2\pi} \hat{\rho}\, d\theta$ → $\hat{\rho}$ es de cilíndricas.

A simple vista, nos dan ganas de que $\int_0^{2\pi} \hat{\rho}\, d\theta = \hat{\rho} \cdot 2\pi \ldots$

Pero... ¡$\hat{\rho} = \hat{\rho}(\theta)$! No podemos factorizarlo.



La convención dice que

$$\hat{\rho} = \cos(\theta)\hat{x} + \mathrm{sen}(\theta)\hat{y}$$

Luego, $\int_0^{2\pi} \hat{\rho}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \cos(\theta)\hat{x} + \mathrm{sen}(\theta)\hat{y}\, d\theta$; $\hat{x}, \hat{y}$ fijos

$$= \hat{x} \int_0^{2\pi} \cos(\theta)\, d\theta + \hat{y} \int_0^{2\pi} \mathrm{sen}(\theta)\, d\theta$$

$$= \hat{x} \left[\mathrm{sen}(\theta) \right]_0^{2\pi} + \hat{y} \left[-\cos(\theta) \right]_0^{2\pi}$$

$$= \hat{x} \cancelto{0}{[0-0]} + \hat{y} \cancelto{0}{[1-1]}$$

$= 0$ // → Siempre recordarlo!! (:

P2 b) ii) $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(\theta)\,d\theta\,d\phi$ ⇝ 2 ángulos ⇝ esféricas

Como los límites son fijos, podemos multiplicar las integrales:

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\operatorname{sen}(\theta)\,d\theta\,d\phi}_{=d\Omega} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(\theta)\,d\theta$$

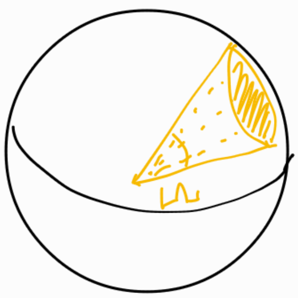
$$= \left[\phi\right]_0^{2\pi}\left[-\cos(\theta)\right]_0^{\pi}$$

$$= \left[2\pi-0\right]\left[1-(-1)\right]$$

$$= 2\pi\cdot 2$$

$$= 4\pi$$

se llama $\underbrace{\text{ángulo sólido}}_{\Omega}$



Es la abertura de un conjunto de semirectas que comparten su origen, formando un cono en el espacio

P3

Para calcular el valor de ρ_0, esperamos obtener el valor total de la carga, e imponer alguna condición.

Integrar en el volumen es considerar todas las contribuciones de densidad:

$\dfrac{\text{carga}}{\text{volumen}} \cdot \text{volumen} = \text{carga}$

carga total (q_e) son todas las contribuciones de la densidad de carga volumétrica

la distribución conocida

$$\bullet\ q_e = \iiint_V \rho\, dV \quad \Bigg\| \quad \rho = \rho(r)$$

$$dV = r^2 \operatorname{sen}(\theta)\, dr\, d\theta\, d\phi, \quad \begin{cases} 0 \leq r \leq R = 3a_0 \\ 0 \leq \theta \leq \pi \\ 0 \leq \phi \leq 2\pi \end{cases}$$

es una esfera

enunciado

Estos límites nos permiten recorrer TODA la esfera.

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \rho(r)\, r^2 \operatorname{sen}(\theta)\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^R \rho(r) r^2 dr \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}(\theta)\, d\theta\, d\phi$$

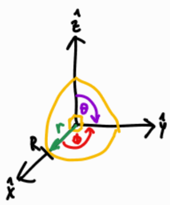
$d\Omega = 4\pi$

Ejemplo: 1/4 de esfera

$0 \leq r \leq R$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$

$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$



Ejercicio: Delimitar los parámetros para 1/2 de esfera.

$$= 4\pi \int_0^R \rho(r) r^2 dr \ ; \quad \rho(r<R) = \rho_0 e^{-\frac{r}{a_0}}\left(3 - \frac{r}{a_0}\right) = 3\rho_0 e^{-\frac{r}{a_0}} - \frac{\rho_0}{a_0} r e^{-\frac{r}{a_0}}$$

$$\Rightarrow \rho(r) r^2 = 3\rho_0 r^2 e^{-\frac{r}{a_0}} - \frac{\rho_0}{a_0} r^3 e^{-\frac{r}{a_0}}$$

$$= 4\pi\left(3\rho_0 \underbrace{\int_0^R r^2 e^{-\frac{r}{a_0}} dr}_{\mathrm{I}} - \frac{\rho_0}{a_0} \underbrace{\int_0^R r^3 e^{-\frac{r}{a_0}} dr}_{\mathrm{II}}\right)$$

— o —

$\mathrm{I} = a_0^3(-17e^{-3}+2)$

(ver más abajo)

$\mathrm{II} = a_0^4(-78e^{-3}-6)$

— o —

$$= 4\pi\left(3\rho_0 a_0^3\left(-17e^{-3}+2\right) - \frac{\rho_0}{\cancel{a_0}} a_0^{\cancel{4}\,3}\left(-78e^{-3}-6\right)\right)$$

$$= 4\pi\left(-51\rho_0 a_0^3 e^{-3} \cancel{+6\rho_0 a^3} + 78\rho_0 a_0^3 e^{-3} \cancel{-6\rho_0 a^3}\right)$$

$$= 4\pi\left(27\rho_0 a_0^3 e^{-3}\right)$$

$\Rightarrow \rho(r<R) = 108\pi\rho_0 a_0^3 e^{-3}$; pero la carga es q_e (por enunciado)

$\Leftrightarrow q_e = 108\pi\rho_0 a_0^3 e^{-3}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\rho_0 = \frac{q_e e^3}{108\pi a_0^3}}$$ //

$$\text{I} = \int_0^R r^2 e^{-\frac{r}{a_0}}\,dr \quad ; \quad R = 3a_0$$

Lo resolveremos integrando por partes, pero con el método de la tabla ⚠

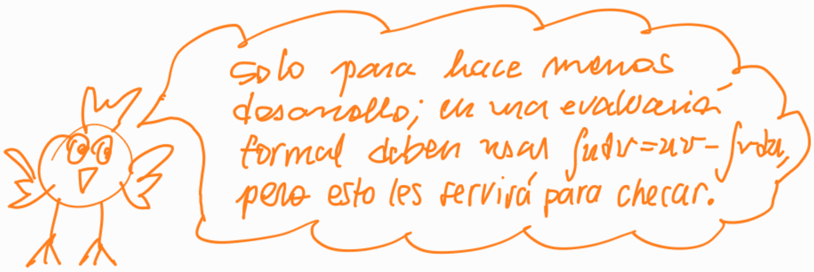
	D	I
$+$	r^2	$e^{-\frac{r}{a_0}}$
$-$	$2r$	$-a_0 e^{-\frac{r}{a_0}}$
$+$	2	$a_0^2 e^{-\frac{r}{a_0}}$
$-$	0	$-a_0^3 e^{-\frac{r}{a_0}}$

1°) elegir función más fácil de derivar, y derivarla en columna D

2°) elegir función más fácil de integrar, e integrarla en columna I

3°) alternar signos comenzando por ⊕

4°) multiplicar en diagonal, e integrar ese producto (cuando se llega a 0, se acaba!).



$$= -a_0\underbrace{\left[r^2 e^{-\frac{r}{a_0}}\right]_0^{3a_0}} - 2a_0^2\underbrace{\left[r e^{-\frac{r}{a_0}}\right]_0^{3a_0}} - 2a_0^3\underbrace{\left[e^{-\frac{r}{a_0}}\right]_0^{3a_0}}$$

$$= -a_0\left[9a_0^2 e^{-3} - 0\right] - 2a_0^2\left[3a_0 e^{-3} - 0\right] - 2a_0^3\left[e^{-3} - 1\right]$$

$$= -9a_0^3 e^{-3} - 6a_0^3 e^{-3} - 2a_0^3 e^{-3} + 2a_0^3$$

$$= -17a_0^3 e^{-3} + 2a_0^3$$

$$\Rightarrow \text{I} = a_0^3\left(-17e^{-3} + 2\right)$$

$$\text{II} = \int_0^R r^3 e^{-\frac{r}{a_0}}\, dr \quad ; \quad R = 3a_0$$

Consideren las mismas notas de la plana anterior.

	D	I
$+$	r^3	$e^{-\frac{r}{a_0}}$
$-$	$3r^2$	$-a_0 e^{-\frac{r}{a_0}}$
$+$	$6r$	$a_0^2 e^{-\frac{r}{a_0}}$
$-$	6	$-a_0^3 e^{-\frac{r}{a_0}}$
$+$	0	$a_0^4 e^{-\frac{r}{a_0}}$

$$= -a_0\left[r^3 e^{-\frac{r}{a_0}}\right]_0^{3a_0} - 3a_0^2\left[r^2 e^{-\frac{r}{a_0}}\right]_0^{3a_0} - 6a_0^3\left[r e^{-\frac{r}{a_0}}\right]_0^{3a_0} - 6a_0^4\left[e^{-\frac{r}{a_0}}\right]_0^{3a_0}$$

$$= -a_0\left[27a_0^3 e^{-3} - 0\right] - 3a^2\left[9a_0^2 e^{-3} - 0\right] - 6a_0^3\left[3a_0 e^{-3} - 0\right]$$

$$-6a_0^4\left[e^{-3} - 1\right]$$

$$= -27a_0^4 e^{-3} - 27a_0^4 e^{-3} - 18a_0^4 e^{-3} - 6a_0^4 e^{-3} - 6a_0^4$$

$$= -78 a_0^4 e^{-3} - 6a_0^4$$

$$\Rightarrow \text{II} = a_0^4\left(-78e^{-3} - 6\right)$$