P2) Se tiene la siguiente expresiól del potencial en todo el espacio:

$$V(x,y,z) = \begin{cases} V_1(x,y,z) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}(x^2+y^2+z^2) & \text{si } r^2 < a^2 \\ V_2(x,y,z) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(-a^2 + \frac{2a^3}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}\right) & \text{si } r^2 > a^2 \end{cases}$$

En esta reconocemos $\underline{r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ de coordenadas esféricas. Haciendo la conversión se consigue: +0,2

$$V(r) = \begin{cases} V_1(r) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} r^2 & \text{si } r^2 < a^2 \\ V_2(r) = \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(-a^2 + \frac{2a^3}{r}\right) & \text{si } r^2 > a^2 \end{cases}$$

+0,2 $V_1(r)$

+0,2 $V_2(r)$

Para obtener el campo eléctrico recordamos la relación $\underline{\vec{E} = -\nabla V}$, donde el gradiente en esféricas viene dado por: +0,2

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial V}{\partial \varphi}\hat{\varphi}$$

Aplicando se tiene el campo eléctrico:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \vec{E}_1(r) = -\frac{\partial V_1}{\partial r}\hat{r} = \frac{-\rho_0 r}{2\pi\varepsilon_0}\hat{r} & \text{si } r^2 < a^2 \\ \vec{E}_2(r) = -\frac{\partial V_2}{\partial r}\hat{r} = \frac{a^3\rho_0}{2\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{r} & \text{si } r^2 > a^2 \end{cases}$$

+0,4 $\vec{E}_1(r)$

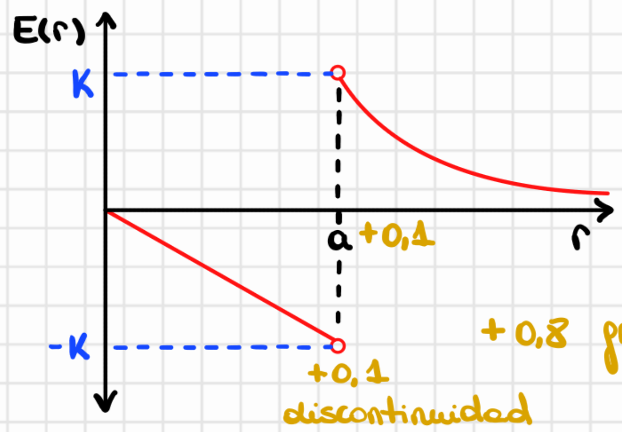
+0,4 $\vec{E}_2(r)$

Con esto se puede graficar la magnitud del campo en función de r:

+0,2 $E_1(r=a) = \frac{-\rho_0 a}{2\pi\varepsilon_0} = -K$

+0,2 $E_2(r=a) = \frac{\rho_0 a}{2\pi\varepsilon_0} = K$

Valor del campo en discontinuidad



+0,8 gráfico

Para encontrar las distribuciones de carga usamos la ecuación de Poisson que relaciona directamente densidades volumétricas con la expresión del potencial:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

+0,4 plantear Poisson

Donde el laplaciano en esféricas viene dado por:

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

Aplicamos esto a ambas expresiones del potencial y así obtener las distribuciones volumétricas presentes:

- $\nabla^2 V_1 = -\rho_1/\varepsilon_0$; $\nabla^2 V_1 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V_1}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} r^2\right)\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho_0 r^3}{2\pi\varepsilon_0}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{3\rho_0 r^2}{2\pi\varepsilon_0} = \frac{3\rho_0}{2\pi\varepsilon_0}$

+0,4

$$\therefore \frac{3\rho_0}{2\pi\varepsilon_0} = -\frac{\rho_1}{\varepsilon_0} \rightarrow \rho_1 = -\frac{3\rho_0}{2\pi}$$ + 0,4 ρ_1

- $\nabla^2 V_2 = -\rho_2/\varepsilon_0$; $\nabla^2 V_2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V_2}{\partial r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(-a^2 + \frac{2a^3}{r}\right)\right)\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\cancel{r^2} \cdot \frac{-\rho_0 a^3}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\cancel{r^2}}\right) = 0$

+0,4

$$\therefore 0 = -\frac{\rho_2}{\varepsilon_0} \rightarrow \rho_2 = 0$$ + 0,4 ρ_2

Por otra parte, a partir del gráfico del campo eléctrico se desprende que debe existir una densidad de carga superficial en r=a, pues de otra forma no se tendría la discontinuidad en dicho punto. Para determinarla usamos la condición de borde:

$$\hat{n}_{1\to 2} \cdot (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\Big|_{r=a} = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_0}$$ + 0,2 condición de borde

$$\hat{r} \cdot \left(\frac{\rho_0 a}{2\pi\varepsilon_0}\hat{r} + \frac{\rho_0 a}{2\pi\varepsilon_0}\hat{r}\right) = \frac{\sigma_s}{\varepsilon_0} \rightarrow \sigma_s = \frac{\rho_0 a}{\pi}$$ + 0,4 σ_s

+0,4