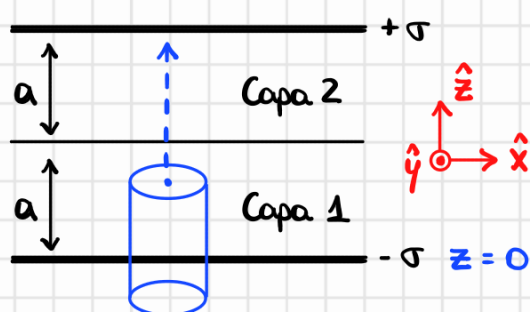


P1

Cuando se trabaja con el vector desplazamiento, el procedimiento es idéntico al que veníamos haciendo con el campo eléctrico normal. Para este problema, y para usar la Ley de Gauss generalizada, consideraremos un cilindro el cual irá creciendo en altura hasta encerrar la totalidad de las **cargas libres** de la configuración:



Por la simetría del problema, se tendrá $\vec{D} = D(z)\hat{z}$. Luego se tendrá:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre}}$$

$$\int_0^r \int_0^\pi D(z)\hat{z} \cdot r dr d\theta \hat{z} = \pi r^2 D(z)$$

$z < 0$ No se está encerrando ningún tipo de carga libre, y así:

$$\vec{D} = 0$$

$0 < z < 2a$ Dentro de los dieléctricos no existen **cargas libres** (pero si ligadas que no se consideran en este cálculo). Así, dentro del volumen sólo le existe la presente en la placa inferior, la cual corresponde a la densidad multiplicada por el área considerada, lo que resulta $Q_{\text{libre}} = -\sigma \cdot \pi r^2$. Luego:

$$\pi r^2 D(z) = -\sigma \pi r^2 \rightarrow \vec{D} = -\sigma \hat{z}$$

$z > 2a$ En este caso, se está encerrando carga libre en las placas superior e inferior. Luego:

$$\pi r^2 D(z) = -\cancel{\sigma \pi r^2} + \cancel{\sigma \pi r^2} \rightarrow \vec{D} = 0$$

Rescapitulando:

$$\vec{D}(z) = \begin{cases} -\sigma \hat{z} & \text{si } 0 < z < 2a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

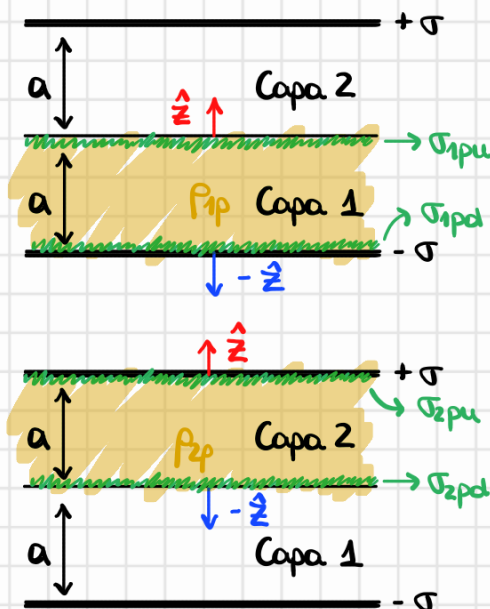
Para obtener el campo eléctrico, usamos la relación $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ en cada material. En el enunicado nos dan los valores de las constantes dieléctricas, pero no las permitividades. Recordando la relación $\epsilon_i = \epsilon_0 \epsilon_r$, se tiene $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$ y $\epsilon_2 = \frac{3}{2}\epsilon_0$, con lo que se obtiene:

$$\vec{E}(z) = \begin{cases} -\sigma/2\epsilon_0 \hat{z} & \text{si } 0 < z < a \\ -2\sigma/3\epsilon_0 \hat{z} & \text{si } a < z < 2a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Para obtener el vector de polarización recurrimos a la definición del vector desplazamiento, dada por $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \rightarrow \vec{P}_i = \vec{D}_i - \epsilon_0 \vec{E}_i = (\epsilon_i - \epsilon_0) \vec{E}_i = (\epsilon_{ri} - 1) \epsilon_0 \vec{E}_i$. Aplicando esto en cada zona del espacio:

$$\vec{P}(z) = \begin{cases} (2-1)\epsilon_0 \cdot -\sigma/2\epsilon_0 \hat{z} = -\sigma/2 \hat{z} & \text{si } 0 < z < a \\ (\frac{3}{2}-1)\epsilon_0 \cdot -2\sigma/3\epsilon_0 \hat{z} = -\sigma/3 \hat{z} & \text{si } a < z < 2a \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Teniendo $\vec{P}$, es posible obtener las densidades de carga de polarización, las cuales se ubicarán en el volumen y las dos superficies de cada material (esto es, 6 en total). Calculamos para cada capa:



$$\rho_{1p} = -\nabla \cdot \vec{P}_1 = -\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\sigma}{2} \right) = 0$$

$$\sigma_{1pd} = \vec{P}_1(z=0) \cdot -\hat{z} = -\frac{\sigma}{2} \hat{z} \cdot -\hat{z} = \sigma/2$$

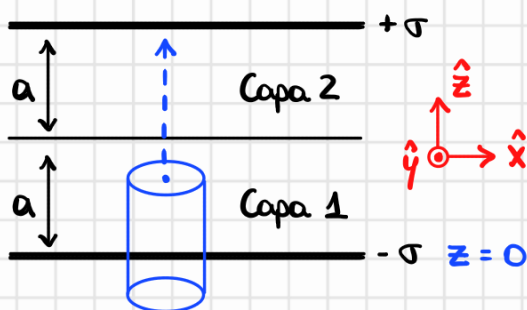
$$\sigma_{1pu} = \vec{P}_1(z=a) \cdot \hat{z} = -\frac{\sigma}{2} \hat{z} \cdot \hat{z} = -\sigma/2$$

$$\rho_{2p} = -\nabla \cdot \vec{P}_2 = -\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\sigma}{3} \right) = 0$$

$$\sigma_{2pd} = \vec{P}_2(z=a) \cdot -\hat{z} = -\frac{\sigma}{3} \hat{z} \cdot -\hat{z} = \sigma/3$$

$$\sigma_{2pu} = \vec{P}_2(z=2a) \cdot \hat{z} = -\frac{\sigma}{3} \hat{z} \cdot \hat{z} = -\sigma/3$$

Con estas densidades podemos recalculer el campo eléctrico, para el cual se consideran la totalidad de las cargas presentes en el sistema, tanto libres como de polarización. Planteamos el problema de forma idéntica a como lo hicimos al inicio:



Por la simetría del problema, se tendrá $\vec{E} = E(z) \hat{z}$. Luego se tendrá:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{TOT}}}{\epsilon_0}$$

$$\int_0^r \int_0^\pi E(z) \hat{z} \cdot r dr d\theta \hat{z} = \pi r^2 E(z)$$

$z < 0$ No se está encerrando ningún tipo de carga libre ni de polarización, y así:

$$\vec{E} = 0$$

$0 < z < a$ Dentro de los dieléctricos no existen densidades volumétricas de ningún tipo. Así, dentro del volumen se tienen las presentes en la superficie inferior, correspondientes a $Q_{\text{libre}} = -\sigma \cdot \pi r^2$ y $Q_{\text{pol}} = \frac{\sigma}{2} \cdot \pi r^2$. La carga encerrada total será la suma de ambas:

$$\pi r^2 E(z) = \frac{Q_{\text{libre}} + Q_{\text{pol}}}{\epsilon_0} = \frac{-\sigma \pi r^2 + \frac{\sigma}{2} \pi r^2}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{z}$$

$a < z < 2a$ En este caso, se está encerrando la carga calculada anteriormente junto con la provocada por las dos densidades de polarización ubicadas en $z = a$, las cuales se obtienen de la misma forma:

$$\pi r^2 E(z) = \frac{Q_{\text{libre}} + Q_{\text{pol}}}{\epsilon_0} = -\underbrace{\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \pi r^2}_{\text{previo}} - \frac{\frac{\sigma}{2} \pi r^2 + \frac{\sigma}{2} \pi r^2}{\epsilon_0} \rightarrow \vec{E} = -\frac{2\sigma}{3\epsilon_0} \hat{z}$$

$z > 2a$ Además de toda la carga anterior, ahora también se considera la carga libre en la placa y la superficial de polarización:

$$\pi r^2 E(z) = \frac{Q_{\text{libre}} + Q_{\text{pol}}}{\epsilon_0} = -\underbrace{\frac{2\sigma}{3\epsilon_0} \pi r^2}_{\text{previo}} + \sigma \pi r^2 + \frac{\sigma}{3} \pi r^2 \rightarrow \vec{E} = 0$$

Lo que coincide con el campo obtenido en un principio. ☺

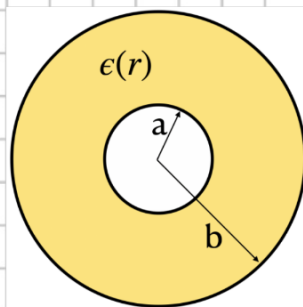
P2

reciclada

Dada la indicación, planteamos las ecuaciones que satisfacen lo pedido:

$$\epsilon(r=a) = m + n/a^2 = \epsilon_0$$

$$\epsilon(r=b) = m + n/b^2 = \epsilon_1$$



Iguando m:

$$\epsilon_0 - n/a^2 = \epsilon_1 - n/b^2 \leftrightarrow n(1/b^2 - 1/a^2) = \epsilon_1 - \epsilon_0$$

$$\therefore n = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)a^2b^2}{a^2 - b^2} //$$

Reemplazando en alguna expresión:

$$m = \epsilon_0 - n/a^2 = \epsilon_0 - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)a^2b^2}{a^2 - b^2} = \frac{\epsilon_0a^2 - \epsilon_1b^2 - \epsilon_1b^2 + \epsilon_0b^2}{a^2 - b^2} = \frac{\epsilon_0a^2 - \epsilon_1b^2}{a^2 - b^2} //$$

b) Supongamos el conductor interno tiene una carga libre Q . Por simetría esférica se tendrá $\vec{D} = D(r)\hat{r}$. Por Gauss, para $a < r < b$:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \rightarrow 4\pi r^2 D(r) = Q \rightarrow \vec{D}(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

Como es un dieléctrico lineal, $\vec{D} = \epsilon(r)\vec{E}$. Luego:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon(r)} \hat{r} = \frac{Q}{4\pi r^2 (m + n/r^2)} \hat{r}$$

La diferencia de potencial entre las placas será:

$$V(a) - V(b) = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{Q}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{mr^2 + n} = \frac{Q}{4\pi} \cdot \frac{1}{m} \int_a^b \frac{dr}{r^2 + n/m}$$

$$* \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan(x/a)$$

$$V(a) - V(b) = \frac{Q}{4\pi m} \cdot \sqrt{\frac{n}{m}} (\arctan(b \cdot \sqrt{\frac{m}{n}}) - \arctan(a \cdot \sqrt{\frac{m}{n}}))$$

La capacidad del sistema será:

$$C = Q/\Delta V = 4\pi m \cdot \sqrt{\frac{m}{n}} \cdot (\arctan(b \cdot \sqrt{\frac{m}{n}}) - \arctan(a \cdot \sqrt{\frac{m}{n}}))^{-1} //$$

c) Para un dieléctrico lineal se tiene:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad \wedge \quad \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E} = \epsilon(r) \vec{E} \quad * \text{por lineal}$$

Luego $\epsilon(r) = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \rightarrow \epsilon_0 \chi_e = \epsilon(r) - \epsilon_0$. Así se puede trabajar con $\vec{P}$.

$$\vec{P} = (\epsilon(r) - \epsilon_0) \vec{E} = (\epsilon(r) - \epsilon_0) \cdot \vec{D} / \epsilon(r) = (1 - \epsilon_0 / \epsilon(r)) \cdot \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

En interfaces se tiene $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$, con $\hat{n}$ la normal que sale del dieléctrico.
Vemos cada superficie:

$$r = a \quad \sigma_{p,a} = \vec{P}(r=a) \cdot (-\hat{r}) = (1 - \cancel{\epsilon_0} / \epsilon_0) \cdot \frac{Q}{4\pi a^2} \hat{r} \cdot -\hat{r} = 0$$

$$r = b \quad \sigma_{p,b} = \vec{P}(r=b) \cdot \hat{r} = (1 - \epsilon_0 / \epsilon_1) \cdot \frac{Q}{4\pi b^2} \hat{r} \cdot \hat{r} = (1 - \epsilon_0 / \epsilon_1) \cdot \frac{Q}{4\pi b^2}$$

Dado que ahora sabemos $\Delta V = V_0$, reemplazamos $Q = C \cdot V_0$:

$$\therefore \sigma_{p,b} = (1 - \epsilon_0 / \epsilon_1) \cdot \frac{V_0 m}{b^2} \sqrt{\frac{m}{n}} \cdot (\arctan(b \cdot \sqrt{\frac{m}{n}}) - \arctan(a \cdot \sqrt{\frac{m}{n}}))^{-1}$$