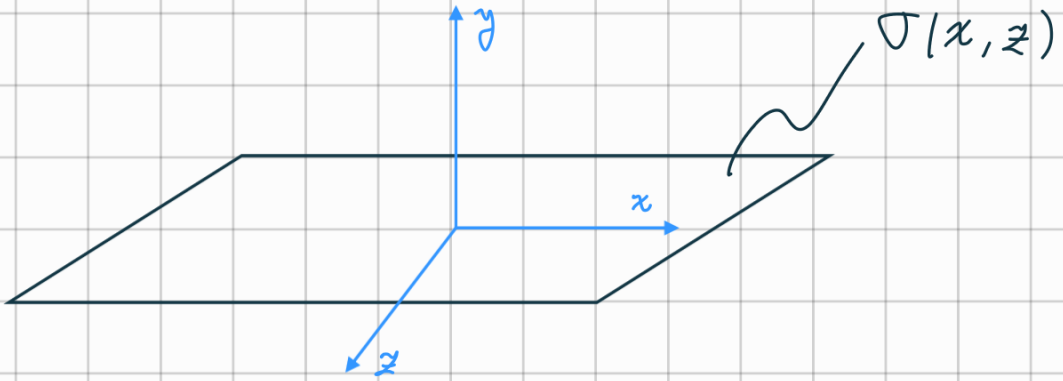
P1



a)

CB: $\phi(x, y \to \infty, z) \longrightarrow 0$

1) $\phi_1 = e^{-y} \cosh(x)$

2) $\phi_2 = e^{-y} \cos(x)$

3) $\phi_3 = e^{-\sqrt{2}y} \cos(x) \sin(z)$

4) $\phi_4 = \sin(x) \sin(y) \sin(z)$

Ahora chequeamos que se cumplan las condiciones de borde para elegir la solución al potencial.

Para el primer caso tenemos que si *x* tiende a infinito, el potencial también se va a infinito, lo cual no es posible físicamente, el potencial **nunca** puede diverger, por lo tanto el primer caso **no** es la solución que buscamos.

Para el segundo caso podemos notar que el potencial únicamente

depende de x e y, sin embargo, esto carece de sentido dada la distribución de carga. Si nos paramos justo en el plano, es decir en $y = 0$, tendremos que el potencial depende únicamente de x, lo que no puede ser, pues la distribución de carga depende de x y z, por lo que el potencial también debe presentar la misma dependencia, de modo que **descartamos** el segundo caso.

Para el tercer caso tenemos que el potencial tiende a 0 cuando y tiende a infinito, por otro lado, este no diverge si hacemos tender x y/o z a infinito, además de presentar una dependencia en x y z cuando $y = 0$ (justo en el plano), de modo que se satisfacen todas nuestras condiciones de borde, por lo que esta **sí** debería ser la solución a nuestro potencial.

Finalmente, el cuarto caso no cumple con que el potencial tienda a 0 cuando y tiende a infinito, por lo que inmediatamente podemos **descartar** esta solución.

Finalmente, la solución al potencial es la tercera opción, es decir:

$$\phi = e^{-\sqrt{2}y}\cos(x)\sin(z) \qquad \text{para } y > 0.$$

b)

Sabemos que el potencial es continuo, por lo que la solución para $y > 0$ y la solución para $y < 0$ deben ser iguales cuando $y = 0$, es decir

$$\phi_{up}(x, y=0, z) = \phi_{down}(x, y=0, z) = \cos(x)\sin(z)$$

Además, colocarnos debajo de la placa es totalmente equivalente a colocarnos sobre ella, y se deben seguir cumpliendo las mismas condiciones de borde, es decir

$$\phi \longrightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad y \longrightarrow -\infty$$

(el potencial debe tender a 0 infinitamente lejos de la placa).

Por lo tanto, dada la simetría del sistema, la solución para $y < 0$ deberá ser análoga a la solución para $y > 0$, con la condición de que el potencial debe ser 0 en "menos infinito", en consecuencia

$$\phi = e^{\sqrt{2}y}\cos(x)\sin(z) \qquad \text{para } y < 0$$

c)

Para calcular la densidad de carga podemos usar nuestra condición de borde para la componente normal del campo eléctrico, la cual nos dice que

$$E_2^{\perp} - E_1^{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Para este caso

Podemos notar que $\hat{n} = \hat{y}$, de modo que solo necesitamos la componente en *y* de los campos eléctricos para este caso. Los campos eléctricos los podemos obtener usando que

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

Y dado que solo necesitamos la componente normal al plano

$$E^{\perp} = -\frac{\partial\phi}{\partial y}$$

Ahora calculamos los campos

- $E_2^{\perp} = -\frac{\partial\phi_{up}}{\partial y} = \sqrt{2}\, e^{-\sqrt{2}y} \cos(x) \sin(z)$

- $E_1^{\perp} = -\frac{\partial\phi_{down}}{\partial y} = -\sqrt{2}\, e^{\sqrt{2}y} \cos(x) \sin(z)$

Evaluando en el borde ($y = 0$)

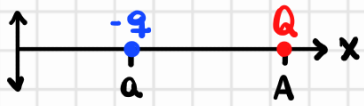
- $E_2^{\perp} = \sqrt{2}\cos(x)\sin(z)$;
- $E_1^{\perp} = -\sqrt{2}\cos(x)\sin(z)$

Y por la condición de borde

$$\sqrt{2}\cos(x)\sin(z) + \sqrt{2}\cos(x)\sin(z) = \sigma/\varepsilon_0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sigma(x, y) = 2\sqrt{2}\,\varepsilon_0\cos(x)\sin(z)}$$

P2) La situación presentada en el enunciado es equivalente a lo siguiente:



Nos piden demostrar que todos los puntos que cumplen que V=0 forman un círculo, es decir, en el plano xy, los puntos deben seguir la forma

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

Lo que correspond ea un círculo de radio r centrado en (x=a, y=b). Para llegar a esta forma, primero planteamos el potencial que sentirá un punto cualquiera $\vec{r}=x\hat{x}+y\hat{y}$, el cual estará dado por la suma de las expresiones conocidas para cargas puntuales.

$$V(\vec{r})=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}+\frac{Q}{\sqrt{(x-A)^2+y^2}}\right)\overset{!}{=}0$$

Se impone la igualdad para encontrar los puntos (x,y) que cumplan la condición. Luego se desarrolla hasta encontrar la forma deseada:

$$\frac{q}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}=\frac{Q}{\sqrt{(x-A)^2+y^2}}$$

$$q((x-A)^2+y^2)=Q((x-a)^2+y^2)$$

$$q^2(x^2-2Ax+A^2+y^2)=Q^2(x^2-2ax+a^2+y^2)$$

$$x^2(q^2-Q^2)-2x(Aq^2-aQ^2)+y^2(q^2-Q^2)=a^2Q^2-A^2q^2$$

$$x^2-2x\left(\frac{Aq^2-aQ^2}{q^2-Q^2}\right)+y^2=\frac{a^2Q^2-A^2q^2}{q^2-Q^2}$$

$$\left(x-\frac{Aq^2-aQ^2}{q^2-Q^2}\right)^2-\left(\frac{Aq^2-aQ^2}{q^2-Q^2}\right)^2+y^2=\frac{a^2Q^2-A^2q^2}{q^2-Q^2}$$

$$\left(x-\frac{Aq^2-aQ^2}{q^2-Q^2}\right)^2+y^2=\frac{a^2Q^2-A^2q^2}{q^2-Q^2}+\left(\frac{Aq^2-aQ^2}{q^2-Q^2}\right)^2$$

$$\left(x-\frac{Aq^2-aQ^2}{q^2-Q^2}\right)^2+y^2=\frac{1}{(q^2-Q^2)^2}\left((Aq^2-aQ^2)^2+(a^2Q^2-A^2q^2)(q^2-Q^2)\right)$$

$$\left(x-\frac{Aq^2-aQ^2}{q^2-Q^2}\right)^2+y^2=\frac{1}{(q^2-Q^2)^2}\left(A^2q^4-2Aaq^2Q^2+a^2Q^4+a^2q^2Q^2-a^2Q^4-A^2q^4+A^2q^2Q^2\right)$$

$$\left(x-\frac{Aq^2-aQ^2}{q^2-Q^2}\right)^2+y^2=\frac{q^2Q^2(a^2-2Aa+A^2)}{(q^2-Q^2)^2}$$

$$\left(x-\frac{Aq^2-aQ^2}{q^2-Q^2}\right)^2+y^2=\frac{q^2Q^2(a+A)^2}{(q^2-Q^2)^2}$$

Con esto se tiene el círculo centrado en el punto $\left(\frac{Aq^2 - aQ^2}{q^2 - Q^2}, 0\right)$ y de radio $\frac{qQ(a+A)}{q^2 - Q^2}$.

1) Si se quiere que el círculo encontrado esté en centrado en x=0, entonces se debe cumplir:

$$\frac{Aq^2 - aQ^2}{q^2 - Q^2} = 0 \quad \rightarrow \quad Aq^2 = aQ^2$$

$$A = a\frac{Q^2}{q^2} \qquad \frac{Q}{q} = \sqrt{\frac{A}{a}}$$

2) Usamos lo anterior para encontrar el radio en función de a y A:

$$\frac{qQ(a+A)}{q^2 - Q^2} = \frac{qQa(1 - Q^2/q^2)}{q^2 - Q^2} = \frac{qQa(q^2 - Q^2)}{q^2(q^2 - Q^2)} = \frac{Q}{q}a = a\sqrt{\frac{A}{a}} = \sqrt{aA}$$

3) Con las dos declaraciones que se plantean, se están imponiendo condiciones de magnitud y posición para una carga imagen de forma tal que se genere el mismo círculo a potencial 0 que nosotros acabamos de obtener.

Si bien son sistemas diferentes, pues en uno hay una carga y un cascarón conductor esférico mientras que en el otro hay dos cargas, al tener el mismo potencial en el espacio, y gracias al teorema de unicidad (el cual dice que el potencial es único en el espacio dadas ciertas condiciones), se pueden trabajar como equivalentes en aquel espacio donde se ubica la carga original (pues es el que interesa para resolver el problema y no se puede alterar colocando cargas imágenes), y así dejando en evidencia el funcionamiento del método de imágenes.