P1

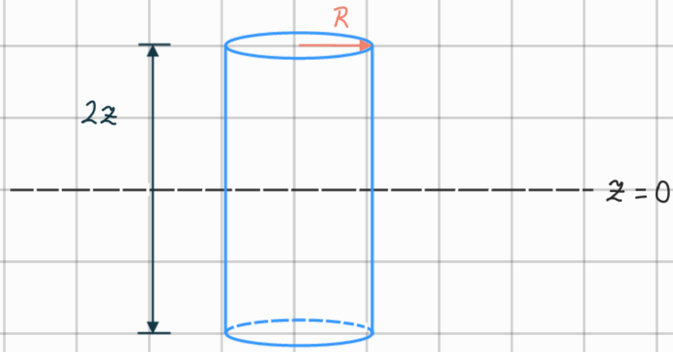
Debido a que la distribución de carga solo depende de *z*, el sistema presenta simetría cartesiana. Podemos notar que si nos movemos en *x* o *y*, a una altura fija de *z* = 0, lo que veremos no cambiará, por lo que el campo eléctrico no puede tener dependencias de *x* ni *y*, y tampoco puede tener componentes en dichas direcciones, por lo tanto

$$\vec{E} = \begin{cases} E(z)\,\hat{z}, & z > 0 \\ E(z)(-\hat{z}), & z < 0 \end{cases}$$

Ahora aplicamos el la Ley de Gauss para resolver.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Podemos notar que la carga no está restringida a ningún lugar en particular del espacio, por lo que siempre nos encontraremos "dentro" de esta distribución, en otras palabras, solo hay una zona donde deberemos calcular el campo eléctrico.
Como de costumbre usaremos un cilindro, centrado en *z* = 0 y de largo 2*z*, para nuestra superficie gaussiana



Por los argumentos de simetría típicos, sabemos que no habrá flujo de campo eléctrico pasando a través del manto del cilindro, de modo que

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_{\text{Tapa 1}} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \int_{\text{Tapa 2}} \vec{E}\cdot d\vec{S}$$

$$= E(z)\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r\,dr\,d\phi + E(z)\int_0^{2\pi}\int_0^{R} r\,dr\,d\phi$$

$$\boxed{\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2\pi R^2 E(z)}$$

Ahora necesitamos calcular la carga encerrada en nuestro cilindro

$$Q_{enc} = \int_V \rho\, dV = \int_{-z}^{z}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \rho_0 e^{-k|z'|}\, r'dr'd\theta' dz'$$

$$= \rho_0 R^2\pi \int_{-z}^{z} e^{-k|z'|} dz' = \rho_0 R^2 \pi \left[\int_0^{z} e^{-kz'} dz' + \int_{-z}^{0} e^{kz'} dz'\right]$$

$$= \rho_0 R^2 \pi \left[ -\frac{e^{-kz'}}{k}\Bigg|_0^{z} + \frac{e^{kz'}}{k}\Bigg|_{-z}^{0}\right] = \frac{\rho_0 R^2 \pi}{k}\left[-e^{-kz} + 1 + 1 - e^{-kz}\right]$$

$$Q_{enc} = \frac{2\rho_0 R^2\pi}{k}\left(1 - e^{-kz}\right)$$

Ahora que tenemos ambos lados de la Ley de Gauss, podemos igualar

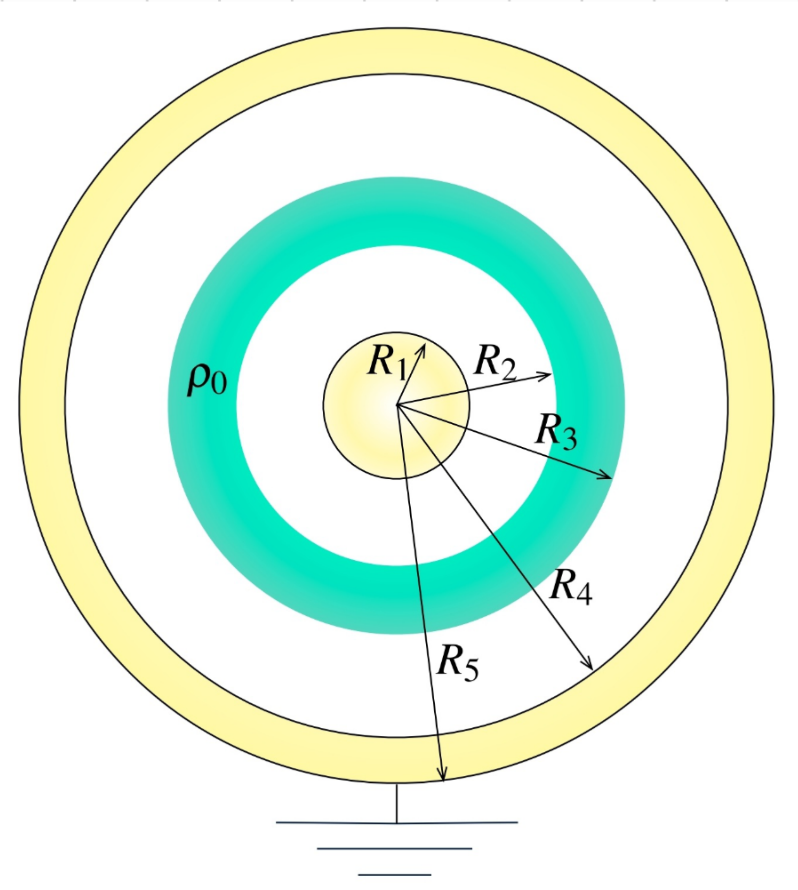
$$\cancel{2}\cancel{\pi}\cancel{R^2}E(z) = \frac{\cancel{2}\rho_0\cancel{R^2}\cancel{\pi}}{k\varepsilon_0}\left(1-e^{-kz}\right)$$

$$E(z) = \frac{\rho_0}{k\varepsilon_0}\left(1-e^{-kz}\right)$$

Y dada la simetría del problema

$$\boxed{\vec{E}(z) = \begin{cases} \dfrac{\rho_0}{k\varepsilon_0}\left(1-e^{-kz}\right)\hat{z}, & z>0 \\ \dfrac{-\rho_0}{k\varepsilon_0}\left(1-e^{-kz}\right)\hat{z}, & z<0 \end{cases}}$$

# $P_2$




En la primera parte de este problema se debe aplicar la Ley de Gauss varias veces.

- $r < R_1$

$$\boxed{\vec{E}(r) = 0} \qquad r < R_1$$

(Dentro del conductor el campo siempre es 0).

- $r \in [R_1, R_2)$

$$\boxed{\vec{E}(r) = 0} \qquad r \in [R_1, R_2)$$

pues no hay carga encerrada.
(el conductor interior no está cargado).

Sabemos que para un conductor $\vec{E}\Big|_{borde} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$, pero $\vec{E} = 0 \quad r \in [R_1, R_2]$

$$\Longrightarrow \boxed{\sigma_{R_1} = 0}$$

• $r \in [R_2, R_3)$

$$Q_{enc} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{R_2}^{r} \rho_0 \, r'^2 \sin\theta' \, dr' d\varphi' d\theta' = 4\pi\rho_0 \frac{r'^3}{3}\Big|_{R_2}^{r} = \frac{4}{3}\pi\rho_0 (r^3 - R_2^3)$$

Por la simetría esférica

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\oint_S dS = E\,4\pi r^2$$

Por la Ley de Gauss

$$E\,\cancel{4\pi} r^2 = \frac{\cancel{4\pi}\rho_0}{3\varepsilon_0}(r^3 - R_2^3)$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho_0 (r^3 - R_2^3)}{3\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}} \quad r \in [R_2, R_3)$$

• $r \in [R_3, R_4)$

$$Q_{enc} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{R_2}^{R_3} \rho_0 \, r'^2 \sin\theta' \, dr' d\varphi' d\theta' = \frac{4}{3}\pi\rho_0 (R_3^3 - R_2^3)$$

Por la simetría esférica

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E(r)\oint_S dS = E(r)\,4\pi r^2$$

Por Ley de Gauss

$$E(r)\cancel{4\pi} r^2 = \frac{\cancel{4}}{3\varepsilon_0}\cancel{\pi}\rho_0\left(R_3^3 - R_2^3\right)$$

$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{\rho_0\left(R_3^3 - R_2^3\right)}{3\varepsilon_0 r^2}\,\hat{r}} \qquad r\in[R_3, R_4)$$

Nuevamente usando que $\vec{E}\Big|_{borde} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\hat{n}$

$$\Rightarrow \vec{E}(R) = \frac{\rho_0\left(R_3^3 - R_2^3\right)}{3\cancel{\varepsilon_0} R_4^2}\,\hat{r} = \frac{\sigma}{\cancel{\varepsilon_0}}(-\hat{n}) \Rightarrow \boxed{\sigma_{R_4} = \frac{-\rho_0\left(R_3^3 - R_2^3\right)}{3R_4^2}}$$

- $r\in(R_4, R_5)$

$$\boxed{\vec{E} = 0} \qquad r\in(R_4, R_5)$$

El campo eléctrico siempre es 0 dentro de un conductor.

- $r > R_5$

Debido a que el casquete exterior se encuentra conectado a tierra el campo exterior será nulo.

$$\boxed{\vec{E} = 0} \qquad r > R_5$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma = 0}$$

b)

$$\Delta\Phi = -\int_{R_1}^{R_4} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\int_{R_2}^{R_3} \frac{\rho_0 (r^3 - R_2^3)}{3\varepsilon_0 r^2}\, \cancel{\hat{r}}\cdot\cancel{\hat{r}}\, dr - \int_{R_3}^{R_4} \frac{\rho_0 (R_3^3 - R_2^3)\cancel{\hat{r}}}{3\varepsilon_0 r^2}\cdot\cancel{\hat{r}}\, dr$$

$$= -\frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(\frac{r^2}{2} + \frac{R_2^3}{r}\right)\Bigg|_{R_2}^{R_3} \cancel{-} \frac{\rho_0(R_3^3 - R_2^3)}{3\varepsilon_0}\left(\frac{\cancel{-}1}{r}\right)\Bigg|_{R_3}^{R_4}$$

$$= \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(\frac{R_2^2}{2} + \frac{R_2^{\cancel{3}\,2}}{\cancel{R_2}} - \frac{R_3^2}{2} - \frac{R_2^3}{R_3}\right) + \frac{\rho_0(R_3^3 - R_2^3)}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_3}\right)$$

$$\boxed{\Delta\Phi = \frac{\rho_0}{3\varepsilon_0}\left(\frac{3R_2^2}{2} - \frac{R_3^2}{2} - \frac{R_2^3}{R_3}\right) + \frac{\rho_0(R_3^3 - R_2^3)}{3\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_4} - \frac{1}{R_3}\right)}$$