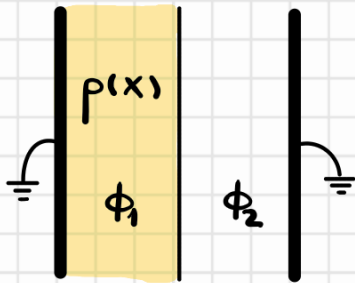


P1

Notemos que tenemos información sobre valores de potencial, por lo que hace sentido resolver el problema a partir de la ecuación de Poisson.

Dado que tenemos dos zonas (una con densidad de carga $\rho(x)$ y otra vacía, tendremos dos potenciales en la configuración, donde para cada uno planteamos la ecuación de Poisson.



El operador Laplaciano en coordenadas cartesianas está dado por:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

$$\cdot \nabla^2 \phi_1 = \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial x^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0} = -\frac{\rho_0 x}{\epsilon_0 a} \rightarrow \phi_1(x) = \frac{-\rho_0 x^3}{6\epsilon_0 a} + Ax + B$$

$$\cdot \nabla^2 \phi_2 = \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial x^2} = 0 \rightarrow \phi_2(x) = Cx + D$$

Tenemos los potenciales en función de constantes que debemos determinar a partir de datos del problema, para lo que necesitaremos 4 ecuaciones que establezcan relaciones entre ellas. Del enunciado, tenemos los valores de los potenciales en las placas:

$$\cdot \phi_1(x=0) = 0 = B \rightarrow \phi_1(x) = \frac{-\rho_0 x^3}{6\epsilon_0 a} + Ax$$

$$\cdot \phi_2(x=2a) = 0 = 2aC + D \rightarrow \phi_2(x) = C(x - 2a)$$

No hay movimiento de cargas en el vacío, por lo que no se acumula σ_s

Por otra parte, tendremos la continuidad del potencial y el **campo eléctrico** en la interfaz ($x=a$). Calculamos el campo eléctrico en cada zona según:

$$\vec{E} = -\nabla \phi$$

$$\vec{E}_1 = -\nabla \phi_1 = -\frac{\partial \phi_1}{\partial x} \hat{x} = \left(\frac{\rho_0 x^2}{2\epsilon_0 a} - A \right) \hat{x}$$

$$\vec{E}_2 = -\nabla \phi_2 = -\frac{\partial \phi_2}{\partial x} \hat{x} = -C \hat{x}$$

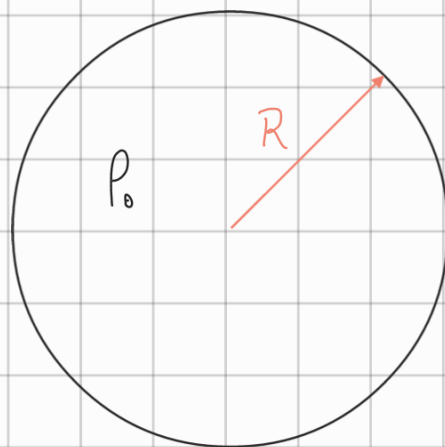
Así tendremos:

$$\left. \begin{aligned} \cdot \phi_1(x=a) &= \phi_2(x=a) \rightarrow a \left(\frac{\rho_0 a}{6\epsilon_0} + A \right) = -aC \\ \cdot \vec{E}_1(x=a) &= \vec{E}_2(x=a) \rightarrow \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} - A = -C \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} - A &= -\frac{\rho_0 a}{6\epsilon_0} + A \rightarrow 2A = \frac{4\rho_0 a}{6\epsilon_0} \\ A &= \frac{\rho_0 a}{3\epsilon_0} \wedge C = -\frac{\rho_0 a}{6\epsilon_0} \end{aligned}$$

Reemplazando:

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{-\rho_0 x^3}{6\epsilon_0 a} + \frac{\rho_0 a}{3\epsilon_0} x & \text{si } 0 < x < a \\ -\frac{\rho_0 a}{6\epsilon_0} (x - 2a) & \text{si } a < x < 2a \end{cases}$$

P₂



a)

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}$$

Por la simetría esférica

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right)$$

Fuera de la esfera $\rho = 0$, por lo tanto se cumple

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0 \quad / \int dr$$

$$r^2 \frac{\partial V}{\partial r} = A$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{A}{r^2} / \int dr$$

$$V(r) = -\frac{A}{r} + B$$

Imponemos

$$V(r \rightarrow \infty) = 0$$

(el potencial debe ser 0 en infinito)

$$V(r \rightarrow \infty) = \cancel{-\frac{A}{r}} + B = 0$$

$$\Rightarrow B = 0$$

$$\Rightarrow V(r) = -\frac{A}{r}$$

Además, para puntos lejanos potencial debe verse como el de una carga puntual

$$\Rightarrow V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{A}{r} \Rightarrow A = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{V_{\text{out}}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}} \quad \text{para } r > R$$

Ahora resolvemos para $r < R$ (dentro de la esfera)

Por la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 V = -\rho_0 / \epsilon_0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -\frac{\rho_0 r^2}{\epsilon_0} \quad / \int dr$$

$$r^2 \frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\rho_0 r^3}{3\epsilon_0} + C$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\rho_0 r}{3\epsilon_0} + \frac{C}{r^2} \quad / \int dr$$

$$V(r) = -\frac{\rho_0 r^2}{6\epsilon_0} - \frac{C}{r} + D$$

El potencial **no** puede diverger en $r = 0$

$$\Rightarrow A = 0$$

$$\Rightarrow V_{in}(r) = -\frac{\rho_0 r^2}{6\epsilon_0} + D$$

El potencial es continuo, imponiendo esta condición

$$V_{in}(R) = V_{out}(R)$$

$$-\frac{\rho_0 R^2}{6\epsilon_0} + D = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$D = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{\rho_0 R^2}{6\epsilon_0}$$

* Como la densidad de carga es uniforme:

$$\rho_0 = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

$$D^* = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{3Q}{4\pi R^2} \cdot \frac{R^2}{6\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R}$$

$$D = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R}$$

$$\therefore V_{in}(r)^* = \frac{-Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} + \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R}$$

Finalmente

$$V(r) \begin{cases} V(r) = \frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3}, & r < R \\ V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}, & r \geq R \end{cases}$$

b)

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial}{\partial r}(V(r))\hat{r}$$

Para $r < R$

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{3Q}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{Qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} \right) \hat{r} = \frac{2Qr}{8\pi\epsilon_0 R^3} \hat{r}$$

$$\vec{E}_{in} = \frac{Qr\hat{r}}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

Para $r > R$

$$\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \hat{r} = - \left(\frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \hat{r}$$

$$\vec{E}_{\text{out}} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

c)

Si la esfera fuese conductora las cargas se acumularán en su superficie, es decir

$$\rho = 0 \quad \forall r \neq R$$

El potencial fuera de la esfera no cambia, pues ahí se sigue cumpliendo la ecuación de Laplace, sin embargo este será distinto dentro de la esfera

Para $r < R$

$$\nabla^2 V = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0 \quad / \int dr$$

$$r^2 \frac{\partial V}{\partial r} = F$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{F}{r^2} / \int dr$$

$$V(r) = -\frac{F}{r} + G$$

Como el potencial no puede diverger en $r = 0$

$$\Rightarrow F = 0$$

$$\Rightarrow V_{in}(r) = G$$

Imponemos que el potencial sea continuo

$$V_{in}(R) = V_{out}(R)$$

$$G = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$\Rightarrow V_{in}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

∴

$$\vec{E}_{in} = 0$$

Sabemos que para un conductor el campo justo afuera de este es

$$\vec{E}\Big|_{\text{borde}} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$$

Evaluando el campo en el exterior justo en el borde del conductor

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{r}$$

Lo que debe ser igual a $\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$

$$\Rightarrow \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \hat{r}$$

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$