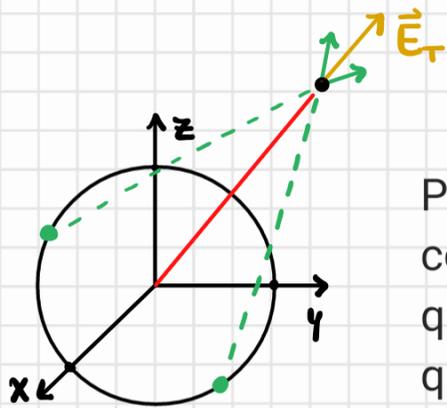


P1

Para resolver este problema usando Ley de Gauss, primero debemos fijarnos en la geometría del problema para plantear restricciones sobre la forma que tendrá el campo eléctrico



Al tratarse de un casquete esférico, trabajaremos con coordenadas esféricas.

Para cada carga presente en el casquete, existirá su contraparte que anulará las componentes en $\hat{\theta}$ y $\hat{\psi}$, quedando el campo sólo en \hat{r} . A su vez, la magnitud que tendrá dependerá exclusivamente de la distancia al origen. Por esto se tendrá:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

El diferencial de superficie en esféricas a utilizar, junto con los límites de las variables será:

$$d\vec{S} = r^2 \sin(\theta) d\theta d\psi \quad \theta \in [0, \pi] \wedge \psi \in [0, 2\pi]$$

Con esto planteamos la parte derecha de la Ley de Gauss:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E(r)\hat{r} \cdot r^2 \sin(\theta) d\theta d\psi = E(r) \cdot r^2 \cdot \int_0^{2\pi} d\psi \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta = 4\pi r^2 E(r)$$

Ahora debemos ver la carga encerrada dentro del espacio que estamos considerando. Si nos paramos en un radio $r < a$, la carga que encierra dicha esfera será 0 (pues la totalidad se encuentra en el casquete), y así:

$$r < a \quad Q_{enc} = 0 \rightarrow \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r) = 0/\epsilon_0 \rightarrow E(r) = 0$$

Ahora bien, si nos paramos en un radio $r > a$, sí estamos considerando la carga presente en el casquete, y así:

$$r > a \quad Q_{enc} = \int_{\text{casquete}} \sigma dS = \sigma \int_{\text{casquete}} dS = \sigma \cdot 4\pi a^2$$
$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi \sigma a^2}{\epsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{a^2 \sigma}{\epsilon_0 r^2}$$

Concluyendo:

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{\epsilon_0 r^2} \hat{r} & \text{si } r > a \\ 0 & \text{si } r < a \end{cases}$$

P2

La resolución de este problema es similar al anterior, sólo que esta vez se trata de una esfera maciza con densidad de carga variable.

Dada la geometría esférica del problema, se tendrá:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r) \hat{r}$$

El diferencial de superficie en esféricas a utilizar, junto con los límites de las variables será:

$$d\vec{S} = r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi \quad \theta \in [0, \pi] \wedge \varphi \in [0, 2\pi]$$

Con esto planteamos la parte derecha de la Ley de Gauss:

$$\begin{aligned} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi E(r) \hat{r} \cdot r^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi = E(r) \cdot r^2 \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \\ &= 4\pi r^2 E(r) \end{aligned}$$

Ahora debemos ver la carga encerrada dentro del espacio que estamos considerando. Si nos paramos en un radio $r < a$, la carga que encierra dicha esfera será sólo hasta el radio r en cuestión, y la obtendremos mediante integración, donde el diferencial a utilizar corespondrá al de volumen en esféricas, dado por:

$$dV = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi \quad r \in [0, r] \wedge \theta \in [0, \pi] \wedge \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned} r < a \quad Q_{enc} &= \int_V \rho(r) dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^r \rho_0 r \cdot r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi = \rho_0 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta \int_0^r r^3 dr \\ &= \rho_0 \cdot 4\pi \cdot \frac{r^4}{4} = \rho_0 \pi r^4 \end{aligned}$$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{\rho_0 \pi r^4}{\epsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0}$$

Cuando nos paremos en un radio $r > a$, la carga encerrada será la total contenida en la esfera. Si bien la integral a realizar para la carga es la misma (de 0 a r), se debe separar el espacio en dos regiones, pues de 0 hasta a la densidad toma el valor del enunciado, mientras que de a hasta r es 0 (no hay carga). Así:

$$r < a \quad Q_{enc} = \int_V \rho(r) dV = \int_V \rho(r < a) dV + \int_V \rho(r > a) dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a \rho_0 r \cdot r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\varphi$$
$$= \rho_0 \cdot 4\pi \cdot \frac{a^4}{4} = \rho_0 \pi a^4$$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{\rho_0 \pi a^4}{\epsilon_0} \rightarrow E(r) = \frac{\rho_0 a^4}{4\epsilon_0 r^4}$$

Concluyendo:

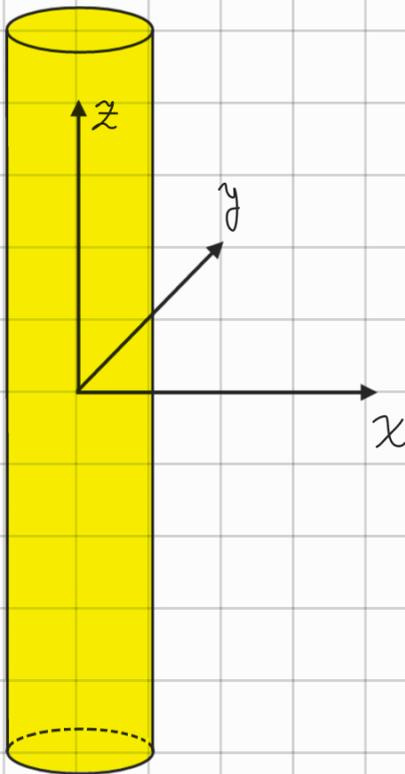
$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r^2}{4\epsilon_0} \hat{r} & \text{si } r < a \\ \frac{\rho_0 a^4}{4\epsilon_0 r^4} \hat{r} & \text{si } r > a \end{cases}$$



* En general (coordenadas cilíndricas):

$$\vec{E} = E_r(r, \phi, z)\hat{r} + E_\phi(r, \phi, z)\hat{\phi} + E_z(r, \phi, z)\hat{z}$$

Primero ubicamos el origen de nuestro sistema de referencia, en este caso lo colocamos en el centro del cilindro.

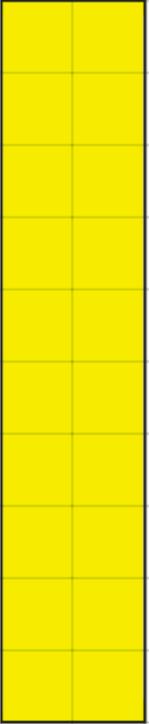


Para resolver el problema estaremos usando coordenadas cilíndricas, esto dada la geometría del sistema.

Este problema lo podemos resolver usando la Ley de Gauss, pero antes de eso debemos justificar su uso.

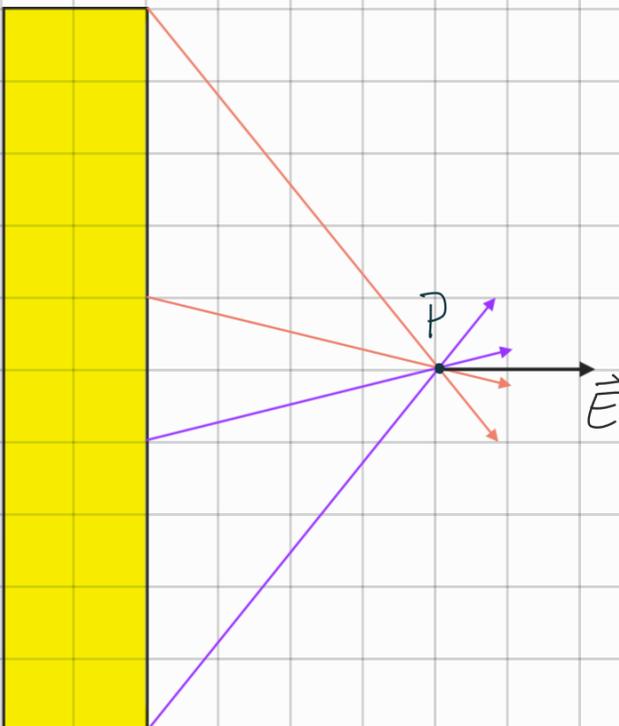
Empecemos resolviendo para $r > R$, es decir, fuera del cilindro
¿Cómo se debería comportar el campo afuera?

Pensemos en un punto P fuera del cilindro mientras lo vemos de perfil:



P

¿En que dirección debería apuntar el campo eléctrico sobre este punto?



De la ilustración podemos notar que existe una simetría en el sistema, la cual anulará las componentes verticales del campo, pues para cada aporte que venga desde arriba del punto P (flechas naranjas) existirá un aporte que vendrá desde abajo (flechas moradas) donde las componentes verticales de los campos apuntan en sentidos opuestos. Notemos que dado que el cilindro es infinito, no importa la posición vertical del punto P, es decir, no importa si nos paramos más arriba o más abajo, siempre existirá un aporte que vendrá desde arriba para cancelar la componente vertical del aporte que viene desde abajo y viceversa, pues el cilindro es infinito.

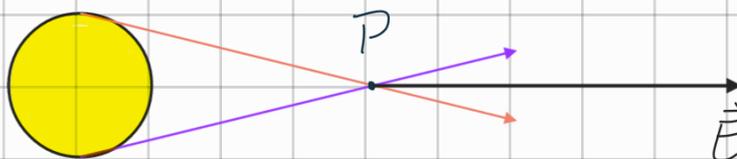
Otra forma de pensar esto es que debido a que el cilindro es infinito, siempre estaremos parados en su centro, pues si nos movemos hacia arriba o abajo, seguiremos "viendo" una cantidad infinita de cilindro en ambos sentidos.

De esta forma podemos decir que el campo eléctrico no tendrá componente en \hat{z} , o sea

$$\vec{E} = E_r(r, \phi, z) \hat{r} + E_\phi(r, \phi, z) \hat{\phi} + \cancel{E_z(r, \phi, z) \hat{z}}$$

Nota: En general la simetría dejaría de ser válida en caso de que la densidad de carga dependiese de z.

Ahora miremos el cilindro desde arriba y pensemos en el punto P



Nuevamente notamos que, por la simetría, las componentes del campo que (desde nuestro punto de vista) apuntan en la dirección vertical se anularán, dejándonos únicamente una componente que apunta hacia "afuera" del cilindro. Podemos ver que debido a la

simetría radial del cilindro, si el punto P estuviese más arriba, o abajo, o a la izquierda del cilindro, el campo seguiría apuntando hacia afuera del cilindro, de esta forma podemos concluir que no existirán componentes del campo en $\hat{\phi}$, es decir, no habrá una componente angular.

Así podemos concluir que:

$$\vec{E} = E_r(r, \phi, z)\hat{r} + \cancel{E_\phi(r, \phi, z)\hat{\phi}}$$

o sea, el campo únicamente posee una componente radial.

Veamos ahora las dependencias del campo.

¿El campo eléctrico deberá depender de la coordenada z ?

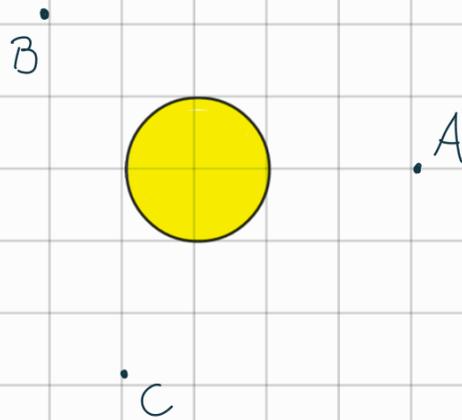
Pensemos en 3 puntos a una misma distancia del eje del cilindro



¿Existe alguna diferencia entre lo que ven estos 3 puntos? La respuesta es que no, tanto A, como B, como C ven que el cilindro se extiende infinitamente hacia arriba y hacia abajo, de manera que no puede existir una dependencia en z para el campo eléctrico, por lo tanto

$$\vec{E} = E(r, \phi)\hat{r}$$

Miremos el cilindro desde arriba nuevamente y pensemos en 3 puntos a una misma distancia del eje, pero ubicados en lugares diferentes alrededor del cilindro

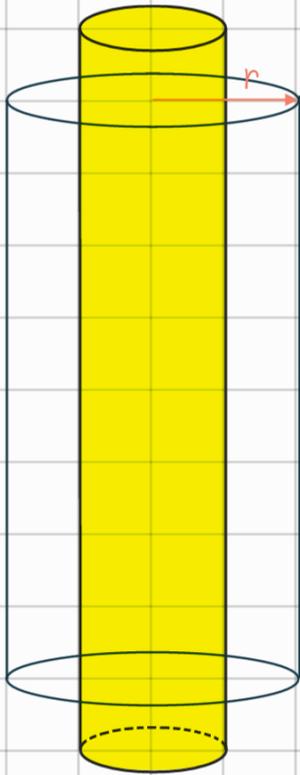


¿Deberá haber una diferencia entre lo que ven los puntos A, B y C? Nuevamente la respuesta es que no, pues si rotamos alrededor del cilindro seguiremos viendo exactamente lo mismo, de forma que el campo eléctrico no puede depender de ϕ .

$$\Rightarrow \vec{E} = E(r) \hat{r}$$

Ahora que ya expusimos todos los argumentos de simetría, podemos aplicar la Ley de Gauss.

Empezamos por dibujar un cilindro imaginario de radio $r > R$ alrededor de nuestro cilindro cargado, el largo del cilindro imaginario es igual a la del cilindro cargado (aunque en el dibujo no se ve así).



Ahora aplicamos la ley de Gauss.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

Integramos sobre el volumen del cilindro imaginario a ambos lados de la ecuación

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \quad / \int_{V'} dV'$$

$$\int_{V'} (\nabla \cdot \vec{E}) dV' = \int_{V'} \rho / \epsilon_0 dV'$$

Para propósitos del cálculo asumiremos que el cilindro cargado tiene un largo igual a $2h$, de esta forma:

$$\int_{V'} (\nabla \cdot \vec{E}) dV' = \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho / \epsilon_0 r' dr' d\phi' dz'$$

Escremos de la divergencia de Gauss $\Rightarrow \oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S}' = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho r' dr' d\phi' dz'$

Primero veamos el lado izquierdo de la ecuación

$$\oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S}'$$

Esta integral corresponde al flujo de campo eléctrico que pasa a través de la superficie del cilindro imaginario, otra forma de pensarlo es en la "cantidad" de flechitas que atraviesan la superficie.

Como tenemos un cilindro, habrá un total de 3 superficies, las 2 tapas y el manto, por lo tanto

$$\oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S}' = \int_{T_1} \vec{E} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{T_2} \vec{E} \cdot d\vec{S}_2 + \int_M \vec{E} \cdot d\vec{S}_3$$

Como podemos notar, los $d\vec{S}$ son vectoriales, pues incluyen la orientación de las superficies sobre las que estamos integrando, en el caso de las tapas, estas superficies se encuentran orientadas en \hat{z} y $-\hat{z}$, de modo que

$$\oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S}' = \int_{T_1} \vec{E} \cdot \hat{z} dS_1 + \int_{T_2} \vec{E} \cdot (-\hat{z}) dS_2 + \int_M \vec{E} \cdot d\vec{S}_3$$

Recordando que $\vec{E} = E(r)\hat{r}$

$$\oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S}' = \int_{T_1} E(r)\underbrace{\hat{r} \cdot \hat{z}}_{=0} dS_1 + \int_{T_2} E(r)\underbrace{\hat{r} \cdot (-\hat{z})}_{=0} dS_2 + \int_M E(r)\hat{r} \cdot d\vec{S}_3$$

$\hat{r} \cdot (\pm \hat{z}) = 0$ pues son vectores ortogonales.

$$\Rightarrow \oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S}' = \int_M E(r) \hat{r} \cdot d\vec{S}_s$$

Solo nos queda la integral de flujo sobre el manto del cilindro. Otra forma de ver esto es que, como vimos en los argumentos de simetría, el campo eléctrico solo apunta en la dirección radial, de forma que no habrán líneas de campo que pasen a través de las tapas del cilindro.

Para nuestro caso, el manto del cilindro está orientado en \hat{r} , mientras que el diferencial de área (dS) corresponde a $r d\phi' dz'$.

$$\Rightarrow \oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S}' = \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} E(r) \underbrace{\hat{r} \cdot \hat{r}}_{=1} r d\phi' dz'$$

\hookrightarrow ctes. respecto a las variables de integración, las sacamos fuera.

$$\oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S}' = E(r) r \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} d\phi' dz' = E(r) r \int_{-h}^h dz' \cdot \int_0^{2\pi} d\phi'$$

$$\oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S}' = E(r) r \cdot 2h \cdot 2\pi$$

$$\oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S}' = 4\pi h r E(r)$$

Ahora vamos con el lado derecho de la Ley de Gauss

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho r' dr' d\phi' dz'$$

Notemos que $\rho = \begin{cases} \rho_0 & \text{si } r < R \\ 0 & \text{si } r > R \end{cases}$ (fuera del cilindro no hay carga)

$$\Rightarrow \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho r' dr' d\phi' dz' = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho_0 r' dr' d\phi' dz'$$

$$= \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \int_{-h}^h dz' \cdot \int_0^{2\pi} d\phi' \cdot \int_0^R r' dr'$$

$$= \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cdot 2h \cdot 2\pi \cdot \frac{r'^2}{2} \Big|_0^R$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho r' dr' d\phi' dz' = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} 2\pi h R^2$$

Ahora que tenemos ambos lados de la Ley de Gauss podemos igualar

$$\oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S}' = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho r' dr' d\phi' dz' \Leftrightarrow 4\pi h r E(r) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} 2\pi h R^2$$

$$4\pi h r E(r) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} 2\pi h R^2$$

$$2rE(r) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} R^2$$

$$E(r) = \frac{\rho_0 R^2}{2r\epsilon_0}$$

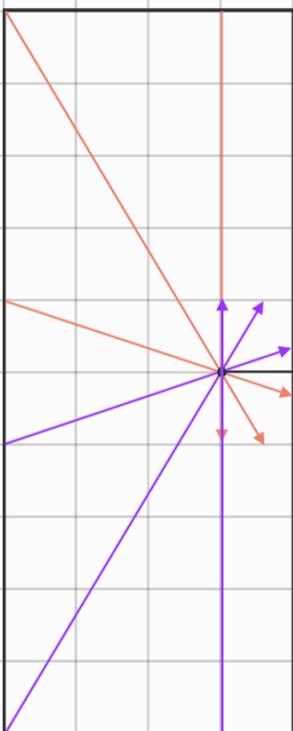
Finalmente, por los argumentos de simetría, podemos decir que el campo apunta en la dirección radial

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho_0 R^2}{2r\epsilon_0} \hat{r}$$

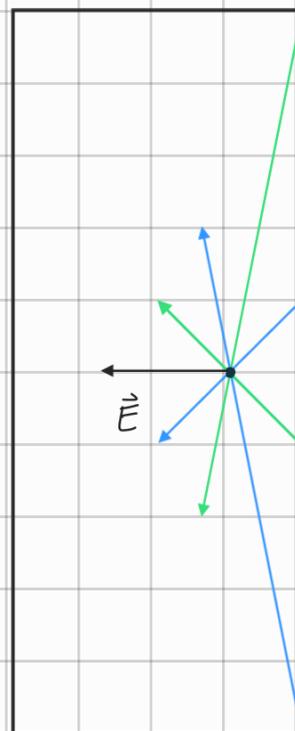
para $r > R$.

Ahora resolvamos para la parte interior del cilindro cargado, esto es para $r < R$.

Nuevamente ¿cómo debería comportarse el campo eléctrico dentro del cilindro? Mirando este de perfil y pensando en un punto en su interior vemos lo siguiente



Tendremos partes que vendrán desde la izquierda, desde arriba, desde abajo



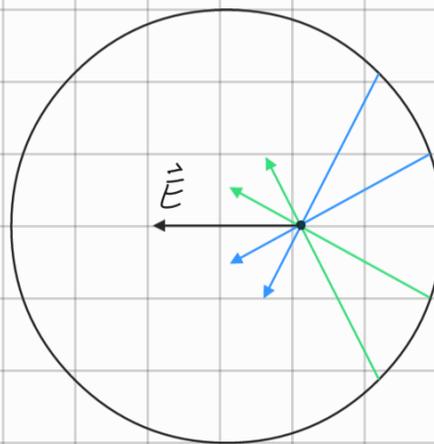
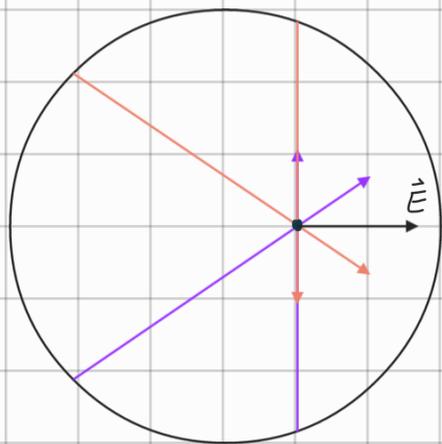
y tendremos partes que vendrán de la derecha

La situación es casi idéntica a la que teníamos fuera del cilindro, con la excepción de que ahora también habrán aportes que vendrán desde arriba, abajo y la derecha. Sin embargo, estos nuevos aportes también serán simétricos, pues el cilindro es infinito, de modo que las componentes verticales del campo eléctrico se cancelarán mutuamente, por lo que el campo eléctrico no tendrá componente en \hat{z} .

$$\Rightarrow \vec{E} = E_r(r, \phi, z) \hat{r} + E_\phi(r, \phi, z) \hat{\phi} + \cancel{E_z(r, \phi, z) \hat{z}} \quad \text{①}$$

Nota: Hice 2 dibujos para que la ilustración no fuese demasiado engorrosa, y también quité el color amarillo de relleno con el mismo fin, pero es importante recordar que el cilindro posee carga en todo su volumen.

Ahora miremos el cilindro desde arriba y pensemos en un punto en su interior



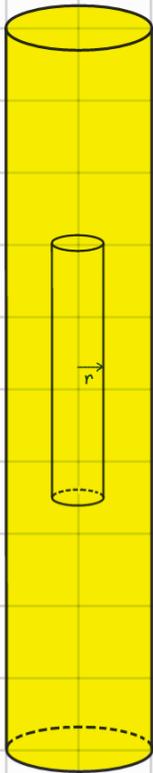
Nuevamente podemos notar que en este caso las componentes angulares del campo eléctrico se anularán, por lo que este no tendrá una componente en $\hat{\phi}$.

$$\Rightarrow \vec{E} = E_r(r, \phi, z) \hat{r} + \cancel{E_\phi(r, \phi, z) \hat{\phi}} \quad \text{①}$$

De forma análoga al caso de $r > R$, el campo eléctrico no dependerá de las coordenadas z y ϕ .

$$\Rightarrow \vec{E} = E(r) \hat{r}$$

Ahora ya podemos usar la Ley de Gauss, empezamos dibujando nuestro cilindro imaginario de radio $r < R$ y largo $2h$ dentro del cilindro cargado



Ley de Gauss

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

Integramos sobre el volumen del cilindro imaginario a ambos lados de la ecuación

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho / \epsilon_0 \quad / \int_{V'} dV'$$

$$\int_{V'} (\nabla \cdot \vec{E}) dV' = \int_{V'} \rho / \epsilon_0 dV'$$

$$\int_{V'} (\nabla \cdot \vec{E}) dV' = \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\rho}{\epsilon_0} r' dr' d\phi' dz'$$

Teorema de la divergencia de Gauss $\Rightarrow \oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S}' = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho r' dr' d\phi' dz'$

El lado izquierdo de la ecuación se calcula de forma idéntica al caso de $r > R$, por lo que

$$\oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{S}' = 4\pi h r E(r)$$

Ahora el lado izquierdo de la ecuación

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho r' dr' d\phi' dz'$$

Como estamos en $r < R$ (dentro del cilindro) $\rho = \rho_0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho r' dr' d\phi' dz' &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho_0 r' dr' d\phi' dz' \\ &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \int_{-h}^h dz' \cdot \int_0^{2\pi} d\phi' \cdot \int_0^r r' dr' \\ &= \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \cdot 2h \cdot \cancel{2\pi} \cdot \frac{r^2}{\cancel{2}} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_{-h}^h \int_0^{2\pi} \int_0^r \rho r' dr' d\phi' dz' = 2h\pi \frac{\rho_0}{\epsilon_0} r^2$$

Igualando

$$2 \cancel{4\pi h r} E(r) = \cancel{2h\pi} \frac{\rho_0}{\epsilon_0} r^2$$

$$2 E(r) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} r$$

$$E(r) = \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0}$$

Y por los argumentos de simetría el campo deberá apuntar en la dirección radial

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0} \hat{r} \quad \text{para } r < R.$$

