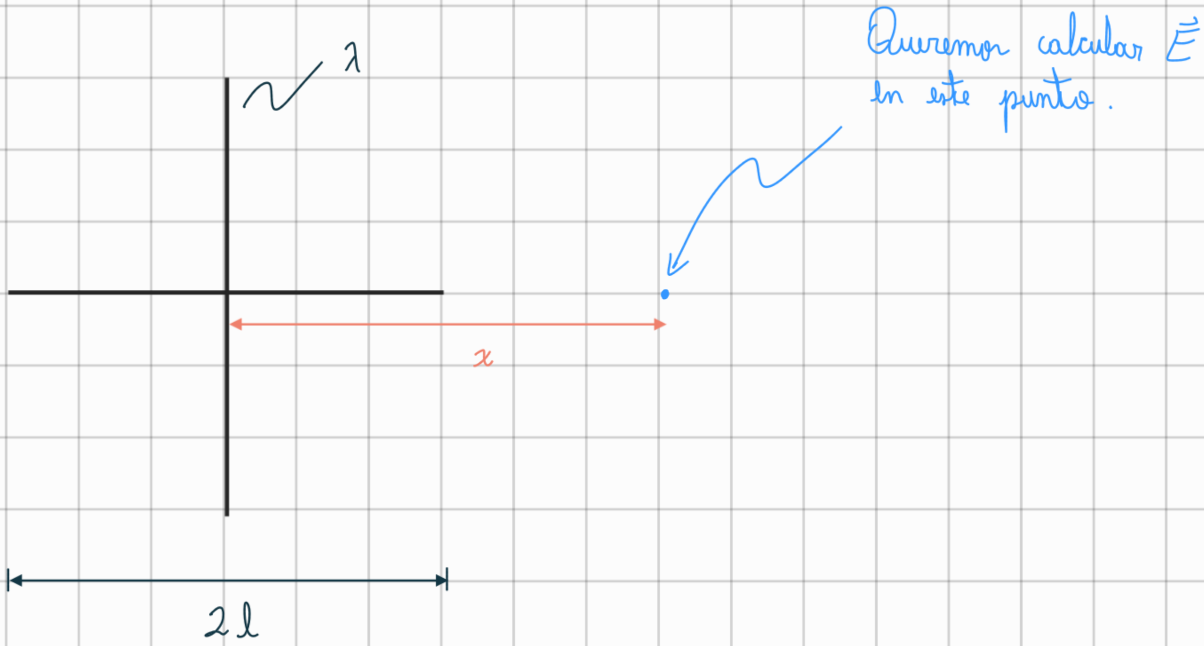
Pauta Aux. 1

P1

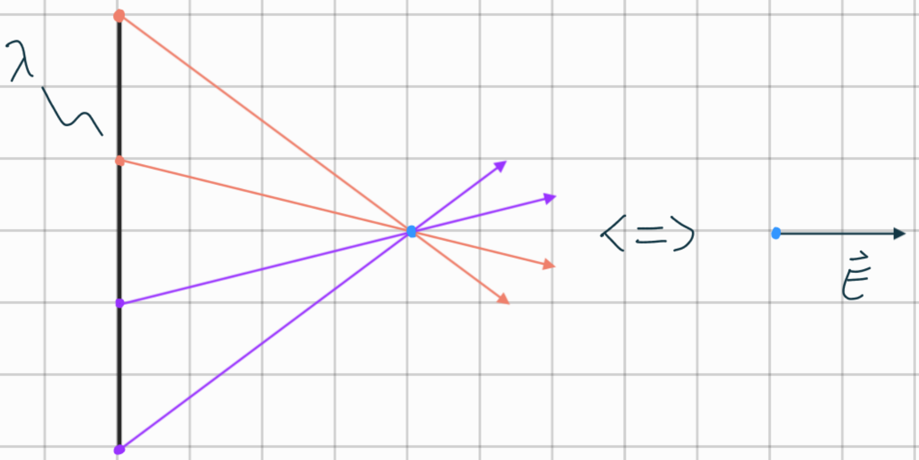


a)

Resolveremos usando el principio de superposición, es decir, trataremos este problema como si existieran 2 alambres por separado, uno vertical y otro horizontal, los cuales conforman la cruz, de forma que el campo total corresponderá a la suma de los campos generados por cada alambre.

Pensemos en el alambre vertical ¿En qué dirección debería apuntar el campo eléctrico que este genera en nuestro punto de interés?

Aquí podemos pensar en el aporte que hace cada sección infinitesimalmente pequeña del alambre sobre el punto:



Podemos notar que cada sección del alambre que se encuentra por sobre el punto aportará un campo eléctrico que apunta hacia la derecha y hacia abajo (flechas naranjas), mientras que cada sección que se encuentra por debajo del punto aporta un campo eléctrico que apunta hacia la derecha y hacia arriba (flechas moradas). Como nuestro punto se encuentra justo en medio del cable, tendremos que por cada flecha naranja existirá una flecha morada, de modo que los aportes de los campos que apuntan hacia arriba y hacia abajo se cancelaran, quedando solo una componente del campo que apunta hacia la derecha (flecha negra), para el sistema de coordenadas que elegiremos, esto es $\hat{x}$.

Ahora vamos con el alambre horizontal, nuevamente podemos pensar en el aporte que hace cada pequeña sección de este, sin embargo, debido a que nuestro punto de interés se encuentra alineado con el eje de este alambre, es fácil notar que cada sección de este hará un aporte que apunta hacia la derecha (si no le es fácil ver esto, mándeme un correo no más), de modo que el campo eléctrico que genera el cable horizontal solo apuntará hacia la derecha, o bien, $\hat{x}$.

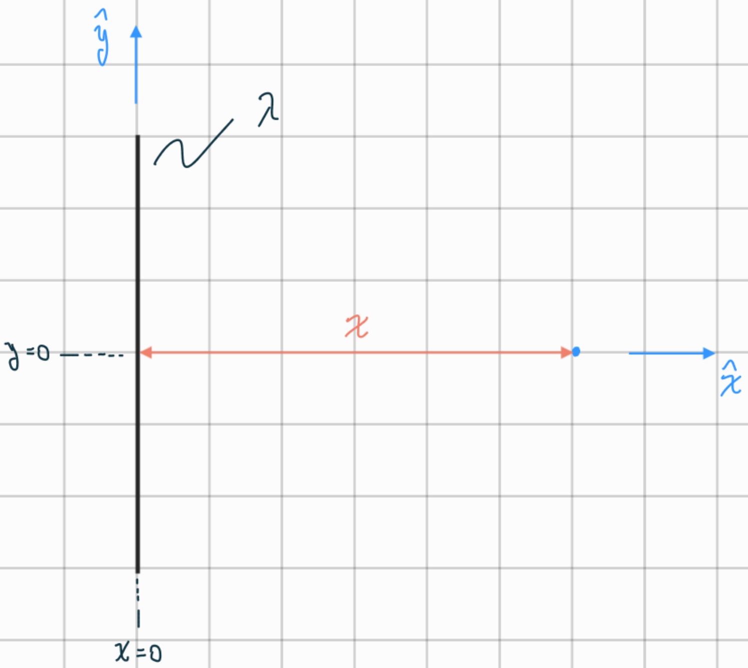
b)

Como se dijo anteriormente, usaremos el principio de superposcicón, por lo que primero calcularemos el campo generado por el alambre vertical.
Definición del campo eléctrico:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\Omega} \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \, dq(\vec{r}\,')$$

Como tenemos una distribución de carga lineal uniforme, entonces

$$dq(\vec{r}\,') = \lambda \, dy$$



- $\vec{r} = x\hat{x}$ Lugar donde queremos calcular $\vec{E}$.

- $\vec{r}\,' = y'\hat{y}$ Parametrización de la distribución de carga.

$$\vec{r} - \vec{r}\,' = x\hat{x} - y'\hat{y}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'| = \left[x^2 + y'^2\right]^{1/2}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3 = \left[x^2 + y'^2\right]^{3/2}$$

Como el alambre solo existe para $y' \in [-l, l]$, los límites de la integral serán $-l$ y l.

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l}^{l} \frac{x\hat{x} - y'\hat{y}}{\left[x^2 + y'^2\right]^{3/2}} \lambda\, dy'$$

(Ahora es pura matraca)

$$\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l}^{l} \frac{x\hat{x} - y'\hat{y}}{\left[x^2 + y'^2\right]^{3/2}} dy' = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l}^{l} \frac{x\hat{x}}{\left[x^2 + y'^2\right]^{3/2}} dy' - \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l}^{l} \frac{y'\hat{y}}{\left[x^2 + y'^2\right]^{3/2}} dy'$$

Función impar integrada en intervalo simétrico $= 0$

$$\Rightarrow \vec{E}_1 = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l}^{l} \frac{x\hat{x}}{\left[x^2 + y'^2\right]^{3/2}} dy' = \frac{x\lambda\hat{x}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-l}^{l} \frac{dy'}{\left[x^2 + y'^2\right]^{3/2}} \quad ;$$

C.V.
$y' = x\,\mathrm{tg}(u)$
$dy' = x\sec^2(u)\,du$

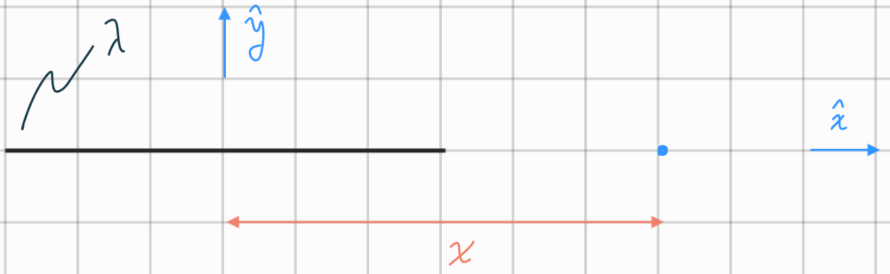
$$\vec{E}_1 = \frac{x\lambda\hat{x}}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left.\frac{y'}{x^2\sqrt{x^2 + y'^2}}\right|_{-l}^{l}$$

$$= \frac{x\lambda\hat{x}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{l}{x^2\sqrt{x^2 + l^2}} + \frac{l}{x^2\sqrt{x^2 + l^2}}\right]$$

$$= \frac{\cancel{x}\lambda\hat{x}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2l}{x^{\cancel{2}}\sqrt{x^2 + l^2}}$$

$$\boxed{\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2l\lambda}{x\sqrt{x^2 + l^2}}\hat{x}}$$

Ahora calculamos el campo generado por la varilla horizontal:



$\vec{r} = x\hat{x}$ $\qquad$ $\vec{r}\,' = x'\hat{x}$ $\qquad$ $\vec{r} - \vec{r}\,' = (x - x')\hat{x}$

$|\vec{r} - \vec{r}\,'| = \sqrt{(x-x')^2} = |x - x'| = x - x' \Longleftarrow x > l$ y $x' \in [-l, l]$

$|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3 = (x - x')^3$

$$\Rightarrow \vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_{-l}^{l} \frac{\cancel{(x-x')}\hat{x}}{(x-x')^{\cancel{3}\,2}}\,\lambda\, dx' = \frac{\lambda\hat{x}}{4\pi\epsilon_0}\int_{-l}^{l}\frac{dx'}{(x-x')^2} ;$$

C.V.
$u = x - x'$
$du = -dx'$

$$= \frac{\lambda\hat{x}}{4\pi\epsilon_0}\left.\frac{1}{x - x'}\right|_{-l}^{l} = \frac{\lambda\hat{x}}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{1}{x-l} - \frac{1}{x+l}\right]$$

$$= \frac{\lambda\hat{x}}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{(x+l)-(x-l)}{(x-l)(x+l)}\right] = \frac{\lambda\hat{x}}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{2l}{x^2 - l^2}$$

$$\boxed{\vec{E}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\,\frac{2l\lambda}{(x^2 - l^2)}\,\hat{x}}$$

En virtud del principio de superposición, el campo total será la suma del campo generado por cada alambre, es decir:

$$\vec{E}_{Total} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$\vec{E}_{Total} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2l\lambda}{x\sqrt{x^2+l^2}} + \frac{2l\lambda}{(x^2-l^2)}\right]\hat{x} \quad ; \qquad * \text{Definimos: } 2l\lambda := q$$

$$\boxed{\vec{E}_{Total} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{x\sqrt{x^2+l^2}} + \frac{q}{(x^2-l^2)}\right]\hat{x}}$$

c) $x >> l$

$$\vec{E}_{Total} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{x\sqrt{x^2+l^2}} + \frac{q}{(x^2-l^2)}\right]\hat{x}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{x\sqrt{x^2(1+l^2/x^2)}} + \frac{q}{x^2(1-l^2/x^2)}\right]\hat{x}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{x^2\sqrt{1+(l/x)^2}} + \frac{q}{x^2(1-(l/x)^2)}\right]\hat{x}$$

$x >> l \Rightarrow l/x \approx 0$

$$\vec{E}_{Total} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{x^2} + \frac{q}{x^2}\right]\hat{x}$$

$$\boxed{\vec{E}_{Total} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2q}{x^2}\hat{x}}$$

Para $x \gg l$, el campo generado por la cruz se comporta como el de una carga puntual.