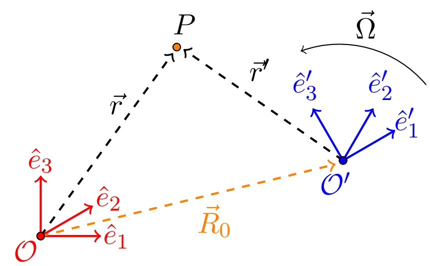
FI2001-5 Mecánica.
Profesor: Marcel Clerc.
Auxiliares: Manuel Díaz, Roberto Gajardo.

Desarrollo Auxiliar 17: Movimiento relativo.

24 de Junio del 2024

* **Movimiento relativo (sistemas de referencia no inerciales):**

Para describir la posición, velocidad y aceleración de una partícula P en el espacio primero es necesario definir un *sistema de referencia* S, el cual está conformado por un **sistema de ejes unitarios rectangulares** $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ (para definir dirección y sentido del movimiento) y por un **origen** $\mathcal{O}$, que corresponde al punto en el sistema de referencia donde la posición es cero. Cuando abordamos problemas en mecánica el punto $\mathcal{O}$ se fija usualmente sobre algún lugar que está fijo en el espacio, aunque también podría fijarse este origen, por ejemplo, en algún cuerpo que esté en movimiento (tal como un ave, un automóvil, etc), en cuyo caso tendremos un sistema de referencia móvil S' con origen $\mathcal{O}'$ y ejes unitarios rectangulares $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$. La gran diferencia entre estos dos tipos de sistemas de referencia es que existirá una aceleración relativa entre ellos, ya sea porque el origen del sistema móvil tiene una aceleración $\vec{A}_0$ con respecto al origen del sistema fijo, o bien porque los ejes del sistema móvil rotan con una velocidad angular $\vec{\Omega}$ con respecto a los ejes del sistema fijo. Esto se representa gráficamente en la siguiente figura:



Ahora, si estudiamos el vector posición de la partícula P y sus derivadas temporales en estos distintos sistemas de referencia veremos que las expresiones son distintas en cada caso, lo cual tiene sentido, ya que la traslación o rotación del sistema de referencia móvil altera la trayectoria aparente que la partícula P está describiendo. Para cuantificar eso, a partir de la figura anterior podemos entender que:

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}_0$$

Ya que los vectores unitarios $\{\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3\}$ están rotando con respecto a los vectores $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$, las derivadas temporales de un vector serán distintas en cada sistema de referencia. Tomando en cuenta eso, las derivadas temporales de un vector arbitrario $\vec{u}$ en cada sistema de referencia se relacionan de la siguiente forma:

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_S = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{S'} + \vec{\Omega} \times \vec{u}$$

Usando esto y la relación entre $\vec{r}$ y $\vec{r}'$, es posible encontrar una relación entre las velocidades $\vec{v}$ y $\vec{v}'$, y entre las aceleraciones $\vec{a}$ y $\vec{a}'$:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\Omega} \times \vec{r}' + \vec{V}_0 \quad ; \quad \vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}' + \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}'\right) + \left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_S \times \vec{r}' + \vec{A}_0$$

En estas últimas expresiones se usaron las siguientes definiciones:

$$\vec{v} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_S \quad ; \quad \vec{v}' = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt}\right)_{S'} \quad ; \quad \vec{V}_0 = \left(\frac{d\vec{R}_0}{dt}\right)_S \quad ; \quad \vec{a} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_S \quad ; \quad \vec{a}' = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt}\right)_{S'} \quad ; \quad \vec{A}_0 = \left(\frac{d\vec{V}_0}{dt}\right)_S$$

Ahora, dado que la fuerza neta $\vec{F}_{\text{neta}}$ que se aplica en la partícula es la misma físicamente hablando, la forma en que se cuantifican los efectos que generan diferencias entre las trayectorias observadas es a través de redefinir la 2da ley de Newton para la dinámica observada en sistemas móviles. Para un sistema de referencia fijo la 2da ley de Newton relaciona la fuerza neta con la aceleración $\vec{a}$ medida desde este sistema a través de la siguiente relación:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a}$$

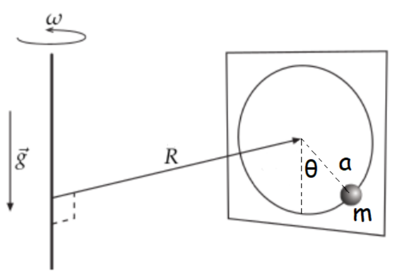
Por otro lado, para el sistema de referencia móvil la 2da ley de Newton relaciona la fuerza neta con la aceleración $\vec{a}'$ medida desde este sistema, y con los efectos asociados a la velocidad angular $\vec{\Omega}$ y la aceleración $\vec{A}_0$. Todo esto se modela a través de la siguiente relación:

$$m\vec{a}' = \vec{F}_{\text{neta}} - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' - m\vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}'\right) - m\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_S \times \vec{r}' - m\vec{A}_0 \tag{1}$$

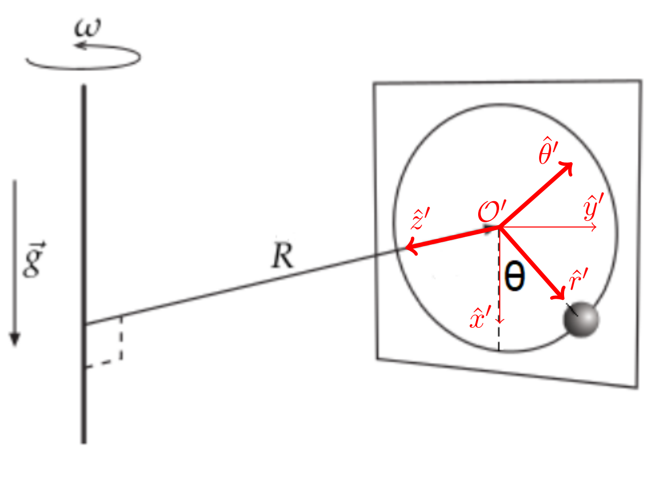
Por último, usualmente a los sistemas de referencia fijos o que se mueven con velocidad constante ($\vec{A}_0 = \vec{0}$ y $\vec{\Omega} = \vec{0}$) se les denomina **sistemas de referencia inerciales** (SRI), mientras que a los sistemas de referencia móviles ($\vec{A}_0 \neq \vec{0}$ ó $\vec{\Omega} \neq \vec{0}$) se les denomina **sistemas de referencia no inerciales** (SRNI).

P1.- <u>Partícula en canal móvil vertical</u>:

a) Se tiene un canal circunferencial de radio a contenido en un plano vertical que gira en torno a un eje fijo con velocidad angular ω, en el cual hay una partícula de masa m que puede deslizar sin roce. La rotación es tal que el centro del canal describe, en su giro, una circunferencia de radio R, y además el plano del canal es paralelo al eje de rotación. La situación se representa en la siguiente figura:



Queremos obtener la ecuación de movimiento asociada al ángulo θ que la partícula describe dentro del canal circunferencial, para lo cual debemos aplicar la 2da ley de Newton. Si nos paramos en un sistema de referencia S con un origen $\mathcal{O}$ y vectores cartesianos $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ fijos, la 2da ley de Newton que se cumple es $\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a}$, donde $\vec{a}$ es la aceleración de la partícula medida desde dicho sistema de referencia. Ahora, en este caso particular escribir una expresión para la aceleración $\vec{a}$ es bastante complicado, ya que la partícula describirá una trayectoria que no puede descomponerse fácilmente en ningún tipo de coordenadas (cartesianas, cilíndricas o esféricas). Lo más conveniente en este caso sería usar un sistema de referencia S' con origen $\mathcal{O}'$ en el centro del canal circular, y con vectores unitarios $\{\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'\}$ tales que podamos definir coordenadas polares en el plano que contiene a dicho canal, tal como se muestra en la siguiente figura:



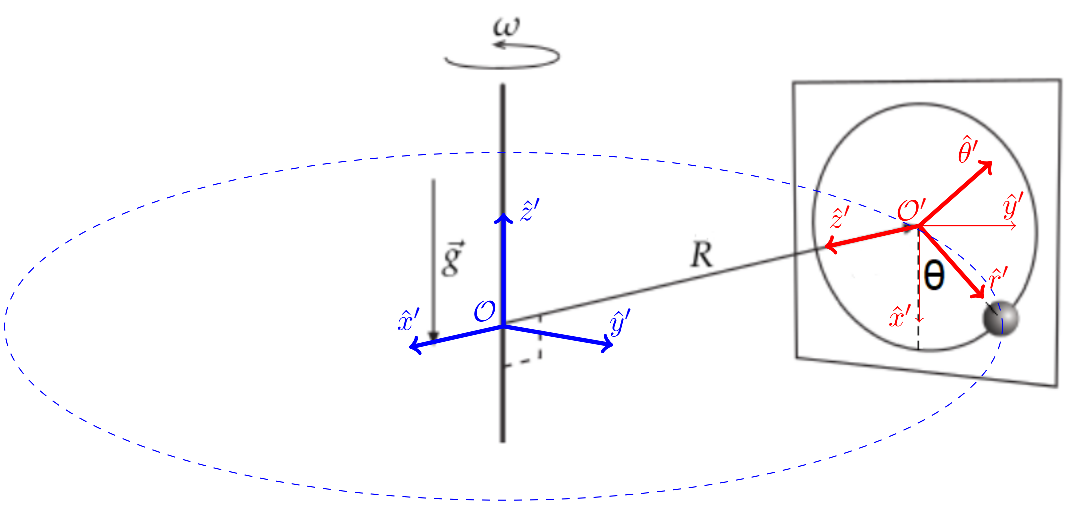
Si hacemos esto el sistema de referencia descrito es un sistema de referencia no inercial, ya que el origen $\mathcal{O}'$ está describiendo una circunferencia de radio R en el espacio, y mantener este tipo de trayectoria requiere una aceleración. Por otro lado, también podemos notar que la dirección y sentido de los vectores $\hat{y}'$ y $\hat{z}'$ cambia cuando el plano que contiene al canal rota, lo que significa que están rotando con alguna velocidad angular $\vec{\Omega}$. Al usar el sistema de referencia S' el movimiento de la partícula corresponde a un movimiento circular con radio a, y por lo tanto es sencillo de describir usando coordenadas polares. Además de eso, la 2da ley de Newton que debemos aplicar es:

$$m\vec{a}' = \vec{F}_{\text{neta}} - 2m\vec{\Omega}\times\vec{v}' - m\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}'\right) - m\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_S \times\vec{r}' - m\vec{A}_0$$

En esta expresión $\vec{r}'$, $\vec{v}'$ y $\vec{a}'$ corresponden respectivamente a la posición, velocidad y aceleración de la partícula descrita en el sistema de referencia S'. Usando coordenadas polares estos vectores quedan representados de la siguiente forma:

$$\vec{r}' = a\hat{r}' \quad ; \quad \vec{v}' = a\dot{\theta}\hat{\theta}' \quad ; \quad \vec{a}' = -a\dot{\theta}^2\hat{r}' + a\ddot{\theta}\hat{\theta}' \tag{2}$$

Para definir $\vec{\Omega}$ y $\vec{A}_0$ necesitamos usar un sistema de referencia inercial S con el cual podamos comparar el movimiento del origen $\mathcal{O}'$ y la rotación de los vectores $\hat{x}'$, $\hat{y}'$ y $\hat{z}'$. Ya que el movimiento del origen $\mathcal{O}'$ es alrededor de una circunferencia con centro en el eje de rotación, nos conviene que el origen del sistema de referencia inercial $\mathcal{O}$ esté justo en ese punto. Por otro lado, usamos vectores unitarios tales que uno de ellos sea paralelo al eje de rotación, tal como se muestra en la siguiente figura:



Usando esto podemos notar que los vectores $\{\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'\}$ rotan con una rapidez angular ω cuya dirección (según la regla de la mano derecha) es $\hat{z}$, de tal forma que $\vec{\Omega} = \omega\hat{z}$. Ahora, a partir de la figura podemos notar que la orientación de $\hat{x}'$ permanece fija en todo instante de tiempo, de tal forma que podemos identificar $\hat{z} = -\hat{x}$, y así $\vec{\Omega} = -\omega\hat{x}'$. Con esto y las expresiones mostradas en (2) se tiene lo siguiente:

$$-2m\vec{\Omega}\times\vec{v}' = -2m\left(-\omega\hat{x}'\right)\times\left(a\dot{\theta}\hat{\theta}'\right) = 2m\omega a\dot{\theta}\left(\cos(\theta)\hat{r}' - \sin(\theta)\hat{\theta}'\right)\times\left(\hat{\theta}'\right)$$

$$\Rightarrow\ -2m\vec{\Omega}\times\vec{v}' = 2m\omega a\dot{\theta}\cos(\theta)\hat{z}' \tag{3}$$

$$-m\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}'\right) = -m\left(-\omega\hat{x}'\right)\times\left[\left(-\omega\hat{x}'\right)\times\left(a\hat{r}'\right)\right] = -m\omega^2 a\left(\cos(\theta)\hat{r}' - \sin(\theta)\hat{\theta}'\right)\times\left(\sin(\theta)\hat{z}'\right)$$

$$\Rightarrow\ -m\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}'\right) = m\omega^2 a\sin^2(\theta)\hat{r}' + m\omega^2 a\sin(\theta)\cos(\theta)\hat{\theta}' \tag{4}$$

Para la aceleración $\vec{A}_0$ notamos que el punto $\mathcal{O}'$ se mueve en una circunferencia con radio constante R y velocidad angular constante ω, de tal forma que la aceleración necesaria para mantener dicha trayectoria es una aceleración centrípeta con magnitud $|\vec{A}_0| = R\omega^2$, y cuya dirección y sentido es tal que la aceleración apunta al centro de la circunferencia, que en este caso es el punto $\mathcal{O}$. Viendo la figura anterior podemos notar que el vector unitario $\hat{z}'$ apunta siempre desde $\mathcal{O}'$ hacia $\mathcal{O}$, de tal forma que $\vec{A}_0 = R\omega^2\hat{z}'$, y entonces:

$$\Rightarrow \; -m\vec{A}_0 = -mR\omega^2\hat{z}' \tag{5}$$

Finalmente, la fuerza neta $\vec{F}_{\text{neta}}$ está asociada a las fuerzas que se ejercen directamente sobre la partícula, que en este caso correspondería al peso, y a una fuerza de contacto que puede separarse en una componente radial y una componente perpendicular al plano de rotación. Tomando en cuenta eso y el sistema de referencia S' mostrado en la figura anterior, la fuerza neta que se ejerce sobre la partícula es:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{neta}} &= mg\hat{x}' - F_{cr}\hat{r}' + F_{cz}\hat{z}' \\ \Rightarrow \; \vec{F}_{\text{neta}} &= (mg\cos(\theta) - F_{cr})\hat{r}' - mg\sin(\theta)\hat{\theta}' + F_{cz}\hat{z}' \end{aligned} \tag{6}$$

Entonces, al reemplazar las expresiones (3), (4), (5) y (6) en la 2da ley de Newton para sistemas no inerciales (considerando que $\vec{\Omega}$ es constante) se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} -ma\dot{\theta}^2\hat{r}' + ma\ddot{\theta}\hat{\theta}' = (mg\cos(\theta) - F_{cr})\hat{r}' - mg\sin(\theta)\hat{\theta}' + F_{cz}\hat{z}' + 2m\omega a\dot{\theta}\cos(\theta)\hat{z}' \\ +m\omega^2 a\sin^2(\theta)\hat{r}' + m\omega^2 a\sin(\theta)\cos(\theta)\hat{\theta}' - mR\omega^2\hat{z}' \end{aligned}$$

Es posible notar que la ecuación de movimiento se obtiene a partir de la ecuación para la dirección $\hat{\theta}'$:

$$ma\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) + m\omega^2 a\sin(\theta)\cos(\theta) \;\Rightarrow\; \boxed{\ddot{\theta} = -\frac{g}{a}\sin(\theta) + \omega^2\sin(\theta)\cos(\theta)}$$

b) Los puntos de equilibrio θ_{eq} corresponden a aquellos puntos donde la aceleración es nula, es decir, donde $\ddot{\theta}(\theta_{\text{eq}}) = 0$. Usando el resultado de la parte anterior:

$$\ddot{\theta}(\theta_{\text{eq}}) = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{g}{a}\sin(\theta_{\text{eq}}) + \omega^2\sin(\theta_{\text{eq}})\cos(\theta_{\text{eq}}) = 0 \;\Rightarrow\; \sin(\theta_{\text{eq}})\left(\cos(\theta_{\text{eq}}) - \frac{g}{\omega^2 a}\right) = 0$$

Ya que $\theta \in [0, 2\pi)$, y tomando en cuenta que el coseno es una función par, a partir de estos factores podemos inferir que los ángulos de equilibrio son:

$$\boxed{\theta_{\text{eq}}^{(1)} = 0 \;\;;\;\; \theta_{\text{eq}}^{(2)} = \pi \;\;;\;\; \theta_{\text{eq}}^{(3)} = -\cos^{-1}\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right) \;\;;\;\; \theta_{\text{eq}}^{(4)} = \cos^{-1}\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right)}$$

Es importante entender que los puntos de equilibrio $\theta_{\text{eq}}^{(3)}$ y $\theta_{\text{eq}}^{(4)}$ sólo existen si estos son números reales, lo cual ocurre para el caso donde el argumento del arcocoseno es menor a 1. Tomando en cuenta eso, la existencia de estos puntos de equilibrio está sujeta a la siguiente condición sobre ω:

$$\frac{g}{\omega^2 a} < 1 \;\Rightarrow\; \omega > \sqrt{\frac{g}{a}}$$

Físicamente hablando, esto significa que los puntos de equilibrio $\theta_{\text{eq}}^{(3)}$ y $\theta_{\text{eq}}^{(4)}$ sólo existen si el canal rota lo suficientemente rápido.

c) Para determinar la estabilidad de estos puntos de equilibrio podemos estudiar el signo de la derivada de la componente de la aceleración que está en la dirección que ocurre el movimiento. Si escribimos $\ddot{\theta} = f(\theta)$, a partir de la parte (a) podemos identificar que:

$$f(\theta) = -\frac{g}{a}\sin(\theta) + \omega^2 \sin(\theta)\cos(\theta)$$

Usando esta función, la estabilidad de los puntos de equilibrio puede estudiarse con las siguientes condiciones:

$$\left(\frac{df}{d\theta}\right)_{\theta_{\text{eq}}} < 0 \;\Rightarrow\; \text{Equilibrio estable} \quad ; \quad \left(\frac{df}{d\theta}\right)_{\theta_{\text{eq}}} > 0 \;\Rightarrow\; \text{Equilibrio inestable}$$

Para un ángulo θ arbitrario:

$$\frac{df}{d\theta}(\theta) = -\frac{g}{a}\cos(\theta) + \omega^2\cos(2\theta)$$

Entonces, para $\theta_{\text{eq}}^{(1)} = 0$:

$$\frac{df}{d\theta}\left(\theta_{\text{eq}}^{(1)} = 0\right) = -\frac{g}{a}\cos(0) + \omega^2\cos(0) = \omega^2 - \frac{g}{a}$$

Podemos notar que la estabilidad de este punto de equilibrio está sujeta al valor de ω, ya que:

$$\omega < \sqrt{\frac{g}{a}} \;\Rightarrow\; \omega^2 - \frac{g}{a} < 0 \quad ; \quad \omega > \sqrt{\frac{g}{a}} \;\Rightarrow\; \omega^2 - \frac{g}{a} > 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega < \sqrt{\frac{g}{a}} \;\Rightarrow\; \theta_{\text{eq}}^{(1)} = 0 \text{ es estable} \quad ; \quad \omega > \sqrt{\frac{g}{a}} \;\Rightarrow\; \theta_{\text{eq}}^{(1)} = 0 \text{ es inestable}}$$

Para el caso estable, a partir de la clase auxiliar 14 podemos recordar que la frecuencia de pequeñas oscilaciones ω_0 en torno a este punto cumple la siguiente condición:

$$\omega_0 = \sqrt{-\left(\frac{df}{d\theta}\right)_{\theta_{\text{eq}}}} \tag{7}$$

Entonces, cuando el punto $\theta_{\text{eq}}^{(1)} = 0$ es estable, la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a este punto está dada por la siguiente expresión:

$$\Rightarrow \boxed{\omega_0^{(1)} = \sqrt{\frac{g}{a} - \omega^2}}$$

Ahora, para $\theta_{\text{eq}}^{(2)} = \pi$ se tiene lo siguiente:

$$\frac{df}{d\theta}\left(\theta_{\text{eq}}^{(2)} = \pi\right) = -\frac{g}{a}\cos(\pi) + \omega^2\cos(2\pi) = \omega^2 + \frac{g}{a} \;\Rightarrow\; \frac{df}{d\theta}\left(\theta_{\text{eq}}^{(2)} = \pi\right) > 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\theta_{\text{eq}}^{(2)} = \pi \text{ es inestable}}$$

Este resultado nos dice que el punto de equilibrio $\theta_{\text{eq}}^{(2)} = \pi$ siempre es inestable, independiente del valor de la velocidad angular ω.

Para estudiar la estabilidad de los puntos $\theta_{\text{eq}}^{(3,4)} = \pm\cos^{-1}\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right)$ desarrollaremos la expresión para $\frac{df}{d\theta}$:

$$\frac{df}{d\theta}(\theta) = -\frac{g}{a}\cos(\theta) + \omega^2\cos(2\theta) = -\frac{g}{a}\cos(\theta) + \omega^2\left(2\cos^2(\theta) - 1\right)$$
$$\Rightarrow \frac{df}{d\theta}(\theta) = -\frac{g}{a}\cos(\theta) + 2\omega^2\cos^2(\theta) - \omega^2$$

Entonces, al reemplazar[1] $\theta_{\text{eq}}^{(3,4)} = \pm\cos^{-1}\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right)$ se tiene lo siguiente:

$$\frac{df}{d\theta}\left(\theta_{\text{eq}}^{(3,4)} = \pm\cos^{-1}\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right)\right) = -\frac{g}{a}\cos\left(\pm\cos^{-1}\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right)\right) + 2\omega^2\cos^2\left(\pm\cos^{-1}\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right)\right) - \omega^2$$
$$\Rightarrow \frac{df}{d\theta}\left(\theta_{\text{eq}}^{(3,4)} = \pm\cos^{-1}\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right)\right) = -\frac{g^2}{\omega^2 a^2} + 2\frac{g^2}{\omega^2 a^2} - \omega^2 = \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{g^2}{a^2} - \omega^4\right)$$
$$\Rightarrow \frac{df}{d\theta}\left(\theta_{\text{eq}}^{(3,4)} = \pm\cos^{-1}\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right)\right) = \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)\left(\frac{g}{a} + \omega^2\right)$$

Por el factor del medio podemos notar que, de forma similar que con el punto $\theta_{\text{eq}}^{(1)}$, la estabilidad de los puntos de equilibrio $\theta_{\text{eq}}^{(3)}$ y $\theta_{\text{eq}}^{(4)}$ está sujeta al valor de ω, ya que:

$$\omega < \sqrt{\frac{g}{a}} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)\left(\frac{g}{a} + \omega^2\right) > 0 \quad ; \quad \omega > \sqrt{\frac{g}{a}} \;\Rightarrow\; \frac{1}{\omega^2}\left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)\left(\frac{g}{a} + \omega^2\right) < 0$$

Ahora, como físicamente hablando los puntos de equilibrio $\theta_{\text{eq}}^{(3,4)}$ no existen cuando $\omega < \sqrt{\frac{g}{a}}$ ignoramos el primer caso, de tal forma que:

$$\Rightarrow \boxed{\theta_{\text{eq}}^{(3,4)} = \pm\cos^{-1}\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right) \text{ es estable (cuando existe)}}$$

Finalmente, usando la expresión (7) para la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a este punto, se tiene lo siguiente:

$$\omega_0^{(3,4)} = \sqrt{-\frac{1}{\omega^2}\left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)\left(\frac{g}{a} + \omega^2\right)} \;\Rightarrow\; \boxed{\omega_0^{(3,4)} = \sqrt{\omega^2 - \frac{g^2}{\omega^2 a^2}}}$$

[1]Ya que la función coseno es par, da lo mismo el signo de $\cos^{-1}\left(\frac{g}{\omega^2 a}\right)$.

P2.- <u>Partícula en aro móvil horizontal</u>:

a) Podemos notar que este sistema es similar al de la pregunta anterior, con la diferencia de que el canal (en este caso aro) a través del cual se mueve la partícula está en un plano perpendicular al eje de rotación asociado a este objeto. Considerando todo eso, para describir el movimiento de la partícula usaremos un sistema de referencia S' que se mueva junto con el aro, cuyo origen $\mathcal{O}'$ estará en su centro. Usaremos los vectores $\hat{x}'$ y $\hat{y}'$ en el plano que contiene al aro, de tal forma que podamos usar coordenadas polares para describir el movimiento de la partícula, y usaremos $\hat{z}'$ paralelo al eje de rotación. Con todo esto, los vectores $\vec{r}'$, $\vec{v}'$ y $\vec{a}'$ quedan representados de la siguiente forma:

$$\vec{r}' = R\hat{r}' \quad ; \quad \vec{v}' = R\dot{\theta}\hat{\theta}' \quad ; \quad \vec{a}' = -R\dot{\theta}^2\hat{r}' + R\ddot{\theta}\hat{\theta}'$$

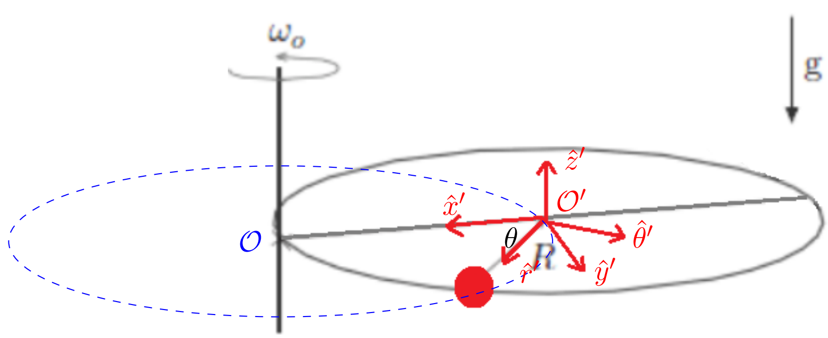
Ahora, de forma similar al ejercicio anterior podemos notar que los vectores unitarios que estén asociados al sistema S' (que rota junto con el aro) rotan con una rapidez angular ω_0, cuya dirección (según la regla de la mano derecha) sería $\hat{z}'$, y así $\vec{\Omega} = \omega_0\hat{z}'$. Con esto se tiene lo siguiente:

$$-2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' = -2m\left(\omega_0\hat{z}'\right) \times \left(R\dot{\theta}\hat{\theta}'\right) \;\Rightarrow\; -2m\vec{\Omega} \times \vec{v}' = 2m\omega_0 R\dot{\theta}\hat{r}' \tag{8}$$

$$-m\vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}'\right) = -m\left(\omega_0\hat{z}'\right) \times \left[\left(\omega_0\hat{z}'\right) \times \left(R\hat{r}'\right)\right] = -m\omega_0^2 R\left(\hat{z}'\right) \times \left(\hat{\theta}'\right)$$

$$\Rightarrow\; -m\vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}'\right) = m\omega_0^2 R\hat{r}' \tag{9}$$

Para la aceleración $\vec{A}_0$ podemos notar que el origen $\mathcal{O}'$ describe una circunferencia de radio R que se recorre con una velocidad angular constante ω_0, de tal forma que si usamos $\mathcal{O}$ como el punto que pasa por el eje de rotación, entonces la aceleración de $\mathcal{O}'$ es una aceleración centrípeta con magnitud $|\vec{A}_0| = R\omega_0^2$. Lo descrito se muestra en la siguiente figura:



Para la dirección y sentido de este vector debemos notar que podemos fijar $\hat{x}'$ o $\hat{y}'$ de forma tal que siempre apunte desde $\mathcal{O}'$ a $\mathcal{O}$. En el caso de la figura anterior fijamos $\hat{x}'$, de tal forma que $\vec{A}_0 = R\omega_0^2\hat{x}'$. Como estamos usando la base de coordenadas polares para describir el movimiento usamos $\hat{x}' = \cos(\theta)\hat{r}' - \sin(\theta)\hat{\theta}'$, y así:

$$\Rightarrow\; -m\vec{A}_0 = -mR\omega_0^2\cos(\theta)\hat{r}' + mR\omega_0^2\sin(\theta)\hat{\theta}' \tag{10}$$

Finalmente, la fuerza $\vec{F}_{\text{neta}}$ está asociada a las fuerzas que se ejercen directamente sobre la partícula, que en este caso correspondería al peso, y una fuerza de contacto que puede separarse en una componente radial y una componente perpendicular al plano de rotación. Tomando en cuenta eso y el sistema de referencia S' mostrado en la figura anterior, la fuerza neta que se ejerce sobre la partícula es:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = -mg\hat{z}' - F_{cr}\hat{r}' + F_{cz}\hat{z}' \;\Rightarrow\; \vec{F}_{\text{neta}} = -F_{cr}\hat{r}' + (F_{cz} - mg)\,\hat{z}' \tag{11}$$

Entonces, al reemplazar las expresiones (8), (9), (10) y (11) en la 2da ley de Newton para sistemas no inerciales (considerando que $\vec{\Omega}$ es constante) se obtiene lo siguiente:

$$-mR\dot{\theta}^2\hat{r}' + mR\ddot{\theta}\hat{\theta}' = -F_{cr}\hat{r}' + (F_{cz} - mg)\,\hat{z}' + 2m\omega_0 R\dot{\theta}\hat{r}' + m\omega_0^2 R\hat{r}' - mR\omega_0^2\cos(\theta)\hat{r}' + mR\omega_0^2\sin(\theta)\hat{\theta}'$$

Es posible notar que la ecuación de movimiento se obtiene a partir de la ecuación para la dirección $\hat{\theta}'$, entonces:

$$mR\ddot{\theta} = mR\omega_0^2\sin(\theta) \;\Rightarrow\; \boxed{\ddot{\theta} = \omega_0^2\sin(\theta)}$$

b) Se lanza la partícula desde el punto opuesto al eje de rotación con un rapidez inicial v_0 tangencial a la circunferencia. En base a eso, se busca el valor mínimo de v_0 tal que la partícula logre recorrer media circunferencia. Para ello podemos encontrar una expresión para la velocidad de la partícula en función del ángulo θ e imponer que dicha velocidad en el ángulo asociado a nuestra condición sea nula. Viendo la figura anterior podemos notar que si la partícula parte desde el punto opuesto al eje de rotación entonces parte desde un ángulo inicial $\theta(0) = \pi$ con una velocidad angular inicial $\dot{\theta}(0) = \frac{v_0}{R}$. Entonces, usando estas condiciones iniciales y la ecuación de movimiento se tiene lo siguiente:

$$\ddot{\theta} = \omega_0^2\sin(\theta) \;\Rightarrow\; \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \omega_0^2\sin(\theta) \;\Rightarrow\; \int_{\frac{v_0}{R}}^{\dot{\theta}} \dot{\theta}d\dot{\theta} = \omega_0^2\int_{\pi}^{\theta}\sin(\theta)d\theta$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 - \frac{v_0^2}{2R^2} = -\omega_0^2\left(1 + \cos(\theta)\right) \;\Rightarrow\; \dot{\theta}(\theta) = \sqrt{\frac{v_0^2}{2R^2} - \omega_0^2\left(1 + \cos(\theta)\right)}$$

Entonces, buscamos v_0 tal que al recorrer media circunferencia $\dot{\theta}$ se anule, es decir, buscamos que $\dot{\theta}(\theta = 2\pi) = 0$:

$$\dot{\theta}(\theta = 2\pi) = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{\frac{v_0^2}{2R^2} - \omega_0^2\left(1 + \cos(2\pi)\right)} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{v_0^2}{2R^2} - 2\omega_0^2 = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{v_0 = 2\omega_0 R}$$