FI2001-5 Mecánica.
Profesor: Marcel Clerc.
Auxiliares: Manuel Díaz, Roberto Gajardo.

Auxiliar 19: Principio de mínima Acción y mecánica Lagrangeana.

8 de julio de 2024

P1.- La braquistócrona:

Una cuenta de masa m se suelta del reposo bajo la acción de la gravedad y se desliza por un alambre sin fricción que conecta el origen A con un punto B dado, como se muestra en la figura. Se desea dar forma al alambre tal que la cuenta llegue al punto final en el menor tiempo posible.

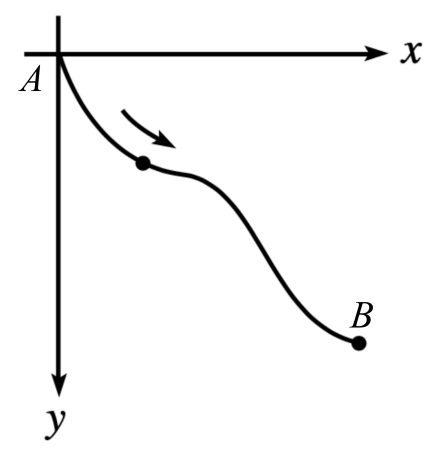

Figura 1: Cuenta deslizándose por alambre.

a) Utilizando el principio de mínima acción, descrita por la curva por una función $y(x)$. Muestre que $y(x)$ satisface:

$$-2y\ddot{y} = 1 + (\dot{y})^2. \tag{1}$$

b) Integre una vez la ecuación y encuentre que

$$1 + (\dot{y})^2 = \frac{C}{y}, \tag{2}$$

donde C es una constante.

c) Aplique el cambio de variable $y = Csin^2(\phi)$ y encuentre que la solución se puede escribir como

$$x = a(\theta - \sin(\theta)), \quad y = a(1 - \cos(\theta)). \tag{3}$$

Esta es la es la parametrización de una cicloide, que es la trayectoria que sigue un punto en el borde de una rueda que gira.

P2.- Partícula restringida por cuña:

Una partícula de masa m desliza por la superficie circular lisa de una cuña de masa M (ver figura 2). La cuña reposa sobre una mesa lisa y el sistema parte del reposo con la masa m a una altura dada.

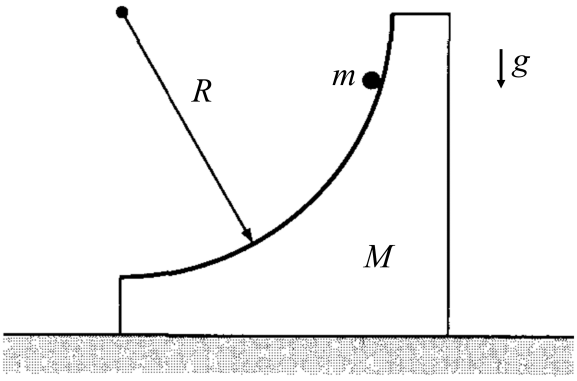

Figura 2: Partícula sobre cuña.

a) Determine el Lagrangeano del sistema. Considere las restricciones de movimiento.
b) Encuentre las ecuaciones de movimiento para las variables dinámicas del sistema.
c) **(Propuesto)** Determine la reacción de la cuña sobre la masa m.

P3.- Lagrangeano de sistema de no inercial:

La ecuación de movimiento que describe un sistema de referencia no inercial es

$$m\ddot{\vec{\rho}} = \vec{F}_{SRI} - m\ddot{\vec{R}} - m\vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{\rho}\right) - 2m\left(\vec{\Omega} \times \dot{\vec{\rho}}\right) - m\left(\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{\rho}\right) \tag{4}$$

De manera general, la relación entre un sistema de referencia inercial S y uno no inercial S', se puede representar gráficamente como

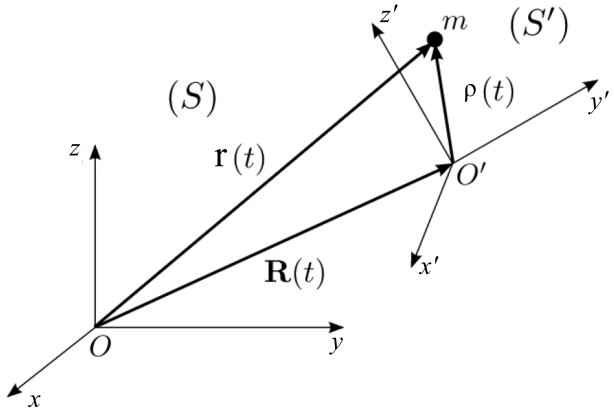

Figura 3: Sistema de referencia no inercial.

a) Encuentre el Lagrangeano para esta ecuación de movimiento.
b) Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange recupere la ecuación de Newton para un sistema de referencia no inercial.