

FI2001-5 Mecánica.**Profesor:** Marcel Clerc.**Auxiliares:** Manuel Díaz, Roberto Gajardo.

Desarrollo Auxiliar 14: Equilibrio y pequeñas oscilaciones.

05 de Junio del 2024

P1.- Resorte no lineal:

- a) Considere un resorte no lineal de longitud natural nula que puede deformarse en la dirección horizontal. La fuerza del resorte es tal que:

$$\vec{F} = -(k - \alpha x^2)x\hat{x} \quad ; \quad k, \alpha > 0$$

Queremos encontrar los puntos de equilibrio del sistema, que corresponden a aquellos puntos donde la aceleración es nula. Tomando en cuenta eso necesitamos la ecuación de movimiento del sistema, con la cual podemos imponer esta condición para equilibrio mecánico.

Ya que sólo hay fuerzas en el eje $\hat{x}$, podemos asumir que el movimiento es puramente horizontal, de tal forma que $\vec{a} = \ddot{x}\hat{x}$. Con esto, al aplicar la 2da ley de Newton se tiene que:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{neta}} \Rightarrow m\ddot{x}\hat{x} = -(k - \alpha x^2)x\hat{x} \Rightarrow \ddot{x} = -x \left(\frac{k}{m} - \frac{\alpha}{m}x^2 \right)$$

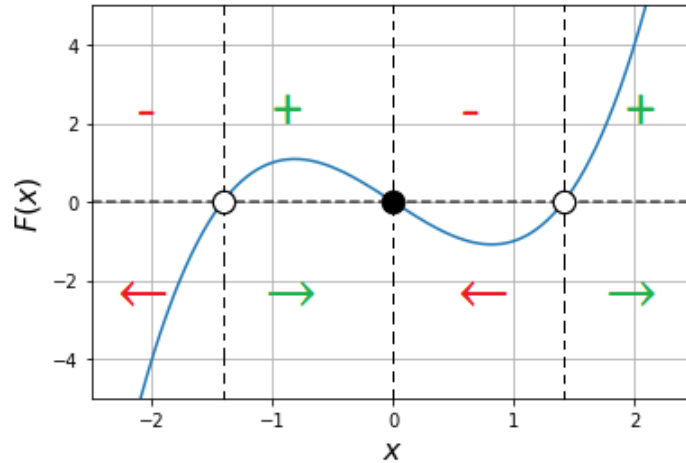
Los puntos de equilibrio x_{eq} son tales que $\ddot{x}(x_{\text{eq}}) = 0$, entonces:

$$\begin{aligned} \ddot{x}(x_{\text{eq}}) = 0 &\Rightarrow -x_{\text{eq}} \left(\frac{k}{m} - \frac{\alpha}{m}x_{\text{eq}}^2 \right) = 0 \Rightarrow \boxed{x_{\text{eq}} = 0 \quad ; \quad x_{\text{eq}} = -\sqrt{\frac{k}{\alpha}} \quad ; \quad x_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{k}{\alpha}}} \\ &\Rightarrow \boxed{x_{\text{eq}} = 0 \quad ; \quad x_{\text{eq}} = -\sqrt{\frac{k}{\alpha}} \quad ; \quad x_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{k}{\alpha}}} \end{aligned}$$

Ahora, para estudiar la estabilidad de los puntos de equilibrio estudiamos el signo de la derivada de $F = -(k - \alpha x^2)x$, que corresponde a la componente neta de la fuerza en la dirección en la cual ocurre el movimiento. Como en este caso el movimiento es a lo largo del eje $\hat{x}$, entonces:

$$\frac{dF}{dx} < 0 \Rightarrow \text{Equilibrio estable} \quad ; \quad \frac{dF}{dx} > 0 \Rightarrow \text{Equilibrio inestable}$$

Esta condición para la estabilidad de los puntos de equilibrio puede entenderse de forma gráfica viendo el gráfico de la página siguiente. En este gráfico el punto negro representa el punto de equilibrio $x_{\text{eq}} = 0$, mientras que los puntos blancos representan los puntos de equilibrio $x_{\text{eq}} = \pm\sqrt{\frac{k}{\alpha}}$. El gráfico está dividido en zonas donde la fuerza es positiva o negativa en la dirección $\hat{x}$, y como la fuerza es proporcional a la aceleración (por la segunda ley de Newton), entonces estas zonas pueden asociarse a zonas donde la aceleración es positiva o negativa, y entonces en estas zonas se favorecerá un movimiento hacia la derecha o izquierda, respectivamente (lo cual se representa con flechas en el gráfico de la figura). Ahora, si pensamos que inicialmente la partícula está en alguno de los puntos de equilibrio, este punto será del tipo *estable* si una pequeña perturbación tiene como consecuencia un movimiento que lo devuelve al punto de equilibrio. Viendo el gráfico, podemos notar que el punto que cumple esta característica es el punto de equilibrio $x_{\text{eq}} = 0$, ya que si perturbamos la partícula



hacia la derecha entrará a una zona con aceleración negativa, la cual tenderá a frenar a la partícula y así devolverla al equilibrio (podemos notar que algo análogo pasa con una perturbación hacia la izquierda, cuya consecuencia es un movimiento restaurativo hacia la derecha).

Por otro lado, un punto de equilibrio será *inestable* si una pequeña perturbación fuera de este equilibrio tiene como consecuencia un movimiento que empuja la partícula hacia un punto de equilibrio estable, o hacia el infinito. Por ejemplo el punto de equilibrio $x_{eq} = \sqrt{\frac{k}{\alpha}}$ cumple esta condición, ya que una pequeña perturbación hacia la izquierda hace que la partícula adquiera una aceleración negativa, con lo cual se favorece un movimiento hacia la izquierda que la lleva hasta el punto de equilibrio estable $x_{eq} = 0$, mientras que una perturbación hacia la derecha la lleva a una zona con aceleración positiva, lo que favorece un movimiento indefinido hacia la derecha, escapando del punto de equilibrio. Algo análogo pasa con el caso $x_{eq} = -\sqrt{\frac{k}{\alpha}}$.

En conclusión, se tiene que $x_{eq} = 0$ es un punto de equilibrio estable, mientras que los puntos $x_{eq} = \pm\sqrt{\frac{k}{\alpha}}$ son equilibrios inestables.

- b) Se quiere encontrar la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno al punto de equilibrio estable $x_{eq} = 0$. Si se tiene una partícula cuya dinámica se modela usando una coordenada arbitraria q , y si sólo las fuerzas conservativas que actúan sobre la partícula realizan trabajo, entonces la ecuación de movimiento (es decir, la aceleración $\ddot{q}$) será una función que sólo depende de la coordenada, es decir, $\ddot{q} = f(q)$. Ahora, si se tiene un punto de equilibrio estable q_{eq} , la partícula describirá oscilaciones en torno a este punto de equilibrio, las cuales son armónicas en el caso de desplazamientos $\Delta q = q - q_{eq}$ suficientemente pequeños. Para llegar a la ecuación diferencial asociada a dichas oscilaciones armónicas debemos imponer la condición Δq pequeño en la ecuación de movimiento $\ddot{q} = f(q)$, que es equivalente a expandir la función $f(q)$ en serie de Taylor en torno al punto de equilibrio estable q_{eq} , y conservar sólo el término de orden lineal, es decir:

$$f(q) = f(q_{eq}) + \left. \left(\frac{df}{dq} \right) \right|_{q_{eq}} (q - q_{eq}) + \frac{1}{2!} \left. \left(\frac{d^2 f}{dq^2} \right) \right|_{q_{eq}} (q - q_{eq})^2 + \dots$$

$$\Rightarrow \ddot{q} \approx f(q_{eq}) + \left. \left(\frac{df}{dq} \right) \right|_{q_{eq}} (q - q_{eq})$$

Ya que la aceleración en el punto de equilibrio es nula, se tiene que $f(q_{\text{eq}}) = 0$, y entonces, para desplazamientos pequeños en torno al punto de equilibrio estable se cumple la siguiente ecuación de movimiento:

$$\ddot{q} - \left(\frac{df}{dq} \right) \Big|_{q_{\text{eq}}} q = - \left(\frac{df}{dq} \right) \Big|_{q_{\text{eq}}} q_{\text{eq}} \quad (1)$$

Ya que el lado derecho de la ecuación anterior es sólo una constante, entonces esta ecuación es una EDO lineal de 2do orden no homogénea. La ecuación de movimiento no homogénea para un oscilador armónico con frecuencia ω modelado con una coordenada q es:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = C$$

Al comparar esta expresión con la ecuación de movimiento (1) podemos llegar a la siguiente relación para la frecuencia de pequeñas oscilaciones armónicas:

$$\omega = \sqrt{- \left(\frac{df}{dq} \right) \Big|_{q_{\text{eq}}}} \quad (2)$$

Ya que la derivada de f en el punto q_{eq} es negativa cuando este equilibrio es estable, la expresión anterior es válida. Ahora, en nuestro caso particular se tiene la siguiente ecuación de movimiento:

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x + \frac{\alpha}{m}x^3$$

Si seguimos un procedimiento similar a lo descrito arriba debemos identificar la función $f(x)$, calcular la derivada, y evaluar en el punto de equilibrio estable $x_{\text{eq}} = 0$. Entonces:

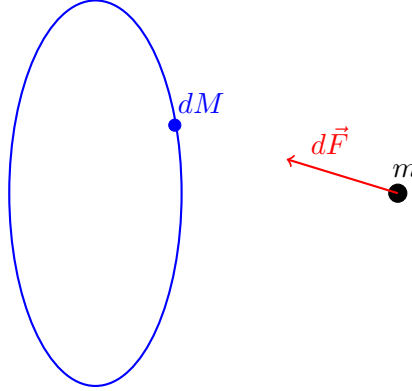
$$f(x) = -\frac{k}{m}x + \frac{\alpha}{m}x^3 \Rightarrow \frac{df}{dx}(x) = -\frac{k}{m} + \frac{3\alpha}{m}x^2 \Rightarrow \frac{df}{dx}(x_{\text{eq}} = 0) = -\frac{k}{m}$$

Reemplazando en la expresión (2) obtendremos la frecuencia de pequeñas oscilaciones de la partícula en el resorte no lineal:

$$\omega = \sqrt{- \left(\frac{df}{dx} \right) (0)} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

P2.- Oscilación por atracción gravitacional:

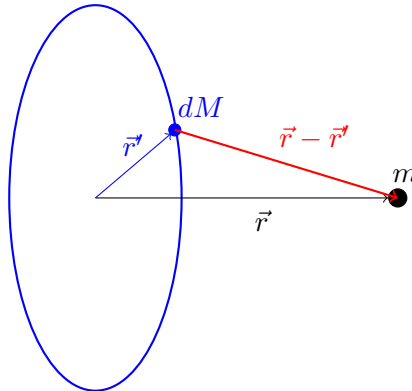
- a) Se tiene un anillo de radio R y densidad de masa lineal uniforme λ . Sobre el eje de simetría de este anillo se deposita a una distancia cercana una partícula puntual de masa m , de tal forma que la atracción gravitacional desplazará a la partícula sobre este eje de simetría. Para obtener la fuerza de atracción gravitacional que el anillo completo ejerce sobre la partícula de masa m vale la pena estudiar la atracción gravitacional que una partícula infinitesimal del anillo, la cual tiene una masa dM . Esta partícula ejerce una fuerza infinitesimal $d\vec{F}$ que actúa en la línea que une a ambas partículas, tal como se muestra en la siguiente figura:



Si se tienen dos masas puntuales m_1 y m_2 separadas en por distancia d , ley de gravitación universal nos indica que la partícula m_1 atraerá a la partícula m_2 con una fuerza $\vec{F}$ tal que:

$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{d^2}\hat{u} \quad (3)$$

En esta expresión el vector unitario $\hat{u}$ hace referencia al vector unitario que va desde la masa m_1 (la que atrae) hasta la masa m_2 (la que es atraída). Si usamos como origen el centro del anillo, y usamos $\vec{r}$ y $\vec{r}'$ para denotar la posición de las partículas de masa m y dM , respectivamente, entonces la distancia d y el vector $\hat{u}$ pueden representarse usando la resta de estos dos vectores, tal como se muestra en la siguiente figura:



Usando esto y la definición de vector unitario, las cantidades d y $\hat{u}$ en nuestro caso son las siguientes:

$$d = |\vec{r} - \vec{r}'| \quad ; \quad \hat{u} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Entonces, al usar la ley de gravitación universal (3) se tiene que la fuerza con la cual una partícula infinitesimal dM del anillo atrae a la partícula de masa m es:

$$d\vec{F} = -\frac{GmdM}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \Rightarrow d\vec{F} = -Gm \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dM$$

Ahora, si queremos la fuerza neta $\vec{F}$ que el anillo completo ejerce sobre la partícula de masa m debemos integrar sobre todas las partículas del anillo, es decir:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -Gm \int \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dM \quad (4)$$

Esta expresión es una versión un poco más generalizada para la ley de gravitación universal, ya que nos permite calcular la fuerza que una distribución de masa (en este caso el anillo) ejerce sobre una partícula puntual de masa m que está en una posición $\vec{r}$. Para obtener la fuerza en cada caso particular necesitamos parametrizar nuestra distribución de masa en coordenadas convenientes que nos permitan desarrollar la integral.

En nuestro caso nos conviene usar un sistema de referencia tal que $\hat{z}$ va a lo largo del eje de simetría del anillo, apuntando desde su centro hacia la partícula de masa m , de tal forma que $\vec{r} = z\hat{z}$, donde z es la distancia desde el centro del anillo hasta la partícula puntual. Por otro lado, al acomodar $\hat{z}$ de esa forma el anillo estará contenido en el plano XY, con lo cual podemos usar coordenadas polares para parametrizar la posición de una partícula arbitraria de esta distribución. Con esto se tiene que $\vec{r}' = R\hat{r}$, donde es importante entender que el ángulo ϕ de estas coordenadas polares (el cual está implícito en el vector radial $\hat{r}$) está en un intervalo de 0 a 2π , donde cada valor de ϕ en ese intervalo hace referencia a la posición de una partícula infinitesimal distinta del anillo. Tomando en cuenta esto, y considerando que $\hat{r}$ y $\hat{z}$ son vectores unitarios de una misma base ortonormal, se tiene lo siguiente:

$$\vec{r} - \vec{r}' = z\hat{z} - R\hat{r} \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = (z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}}$$

Para la masa infinitesimal dM debemos usar la densidad lineal de masa λ y multiplicarla por la longitud $d\ell$ de un trozo infinitesimal de nuestra distribución. Como en este caso la distribución de masa es un anillo, un trozo infinitesimal de esta distribución será un arco de circunferencia de radio R asociado a un ángulo infinitesimal $d\phi$, de tal forma que $d\ell = R d\phi$. Con esto se tiene que $dM = \lambda R d\phi$, donde debemos recordar que $\phi \in [0, 2\pi)$ (de tal forma que se recorra todo el anillo).

Entonces, al reemplazar todo en la ley de gravitación universal (4) se tiene lo siguiente:

$$\vec{F}(\vec{r} = z\hat{z}) = -Gm \int_0^{2\pi} \frac{(z\hat{z} - R\hat{r})}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \lambda R d\phi$$

Ya que la integral es con respecto a la variable ϕ se tiene que z es constante para este cálculo, por lo tanto podemos sacar el denominador de la integral, y así:

$$\Rightarrow \vec{F}(z) = -\frac{Gm\lambda R}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \left[z \int_0^{2\pi} \hat{z} d\phi - R \int_0^{2\pi} \hat{r} d\phi \right]$$

Los vectores unitarios de coordenadas cartesianas son fijos por definición, de tal forma que $\hat{z}$ puede salir de la integral. Para el caso de $\hat{r}$ no es posible, ya que este vector depende implícitamente del

ángulo (variable de integración) ϕ . En este segundo caso debemos desarrollar la integral usando la descomposición de $\hat{r}$ en sus componentes cartesianas:

$$\int_0^{2\pi} \hat{r} d\phi = \int_0^{2\pi} (\cos(\phi)\hat{x} + \sin(\phi)\hat{y}) d\phi = \hat{x} \int_0^{2\pi} \cos(\phi) d\phi + \hat{y} \int_0^{2\pi} \sin(\phi) d\phi$$

Como las integrales de seno y coseno en un ciclo completo se anulan, entonces:

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} \hat{r} d\phi = 0$$

Reemplazando en la expresión para $\vec{F}$ se tiene finalmente que:

$$\vec{F}(z) = -\frac{Gm\lambda R}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \left[z\hat{z} \int_0^{2\pi} d\phi - 0 \right] \Rightarrow \boxed{\vec{F}(z) = -\frac{2\pi Gm\lambda Rz}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z}}$$

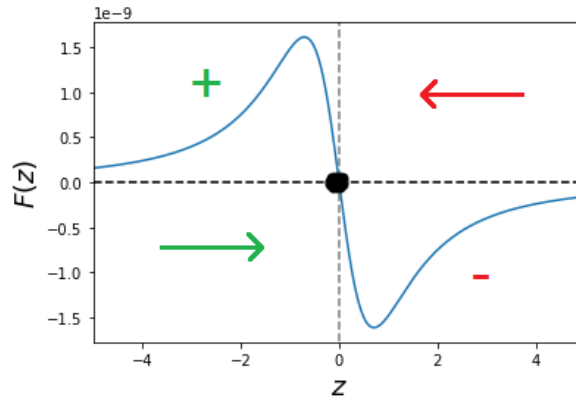
- b) Queremos encontrar los puntos de equilibrio de la partícula puntual, para lo cual necesitamos encontrar su ecuación de movimiento y luego imponer que se anula en dichos puntos. En este caso la única fuerza que actúa sobre la partícula de masa m es la fuerza que el anillo está ejerciendo, de tal forma que la fuerza neta es el resultado de la parte anterior. Por otro lado, ya que la partícula sólo se moverá en el eje de simetría del anillo su aceleración sólo tendrá componente en dicha dirección, de tal forma que $\vec{a} = \ddot{z}\hat{z}$. Entonces, al aplicar la 2da ley de Newton $m\vec{a} = \vec{F}_{\text{neto}}$ se tiene lo siguiente:

$$m\ddot{z}\hat{z} = -\frac{2\pi Gm\lambda Rz}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} \hat{z} \Rightarrow \ddot{z} = -\frac{2\pi G\lambda Rz}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Los puntos de equilibrio son todos aquellos puntos z_{eq} tales que $\ddot{z} = 0$, entonces:

$$\ddot{z}(z_{\text{eq}}) = 0 \Rightarrow -\frac{2\pi G\lambda Rz_{\text{eq}}}{(z_{\text{eq}}^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \Rightarrow z_{\text{eq}} = 0$$

Podemos demostrar que este equilibrio es estable usando la condición aplicada en la pregunta anterior, sin embargo, es posible notar que esta fuerza es restaurativa en torno a este punto fijándonos en que esta fuerza (y por lo tanto la aceleración) es negativa cuando z es positivo y viceversa. Usando un análisis gráfico de la función $F(z)$ también podemos inferir que $z_{\text{eq}} = 0$ es un punto de equilibrio estable, ya que la pendiente de la curva en ese punto es negativa:



Ahora, para encontrar la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno al punto de equilibrio estable $z_{\text{eq}} = 0$ podemos usar la expresión (2) como se hizo en la pregunta anterior. En este caso, a partir de la ecuación de movimiento es posible identificar la siguiente función $f(z)$:

$$\ddot{z} = -\frac{2\pi G\lambda R z}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}} = f(z) \Rightarrow \frac{df}{dz}(z) = -\frac{2\pi G\lambda R}{(z^2 + R^2)^3} \left((z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}} - 3z^2 (z^2 + R^2)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dz}(z_{\text{eq}} = 0) = -\frac{2\pi G\lambda R}{(R^2)^3} \left((R^2)^{\frac{3}{2}} - 0 \right) \Rightarrow \frac{df}{dz}(0) = -\frac{2\pi G\lambda}{R^2}$$

Entonces, al aplicar la expresión (2) para la frecuencia de pequeñas oscilaciones se tiene lo siguiente:

$$\omega = \sqrt{-\left(\frac{df}{dz}\right)(0)} \Rightarrow \boxed{\omega = \sqrt{\frac{2\pi G\lambda}{R^2}}}$$