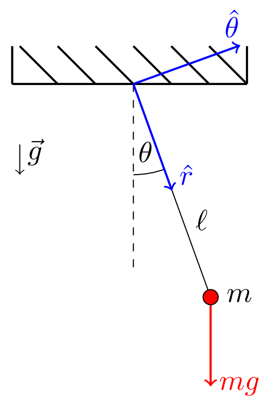
FI2001-5 Mecánica.
Profesor: Marcel Clerc.
Auxiliares: Manuel Díaz, Roberto Gajardo.

Desarrollo Auxiliar 13: Trabajo mecánico con roce.

03 de Junio del 2024

P1.- Trabajo del péndulo con disipación:

a) Se tiene un péndulo plano de longitud ℓ y masa m, el cual se encuentra inmerso en un fluido viscoso, tal como se muestra en la siguiente figura:



Se quiere calcular el trabajo neto realizado por el péndulo cuando este pasa por primera vez por la vertical una vez que es soltado desde un ángulo θ_0 muy pequeño. Si Γ es la curva descrita por la partícula durante este movimiento, por definición el trabajo W realizado por una fuerza $\vec{F}$ se obtiene de la siguiente forma:

$$W = -\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Si queremos el trabajo neto W_{neto} realizado por el sistema, la fuerza $\vec{F}$ de la expresión anterior debe ser la fuerza neta ejercida sobre la partícula, por otro lado, el diferencial $d\vec{r}$ representa un trozo infinitesimal de la trayectoria realizada por la partícula. Como en este caso la partícula se moverá en una circunferencia con radio ℓ constante, entonces $d\vec{r} = \ell d\theta\hat{\theta}$, donde $d\theta$ es un desplazamiento angular infinitesimal, el cual está asociado directamente a la coordenada angular θ de coordenadas polares (representada en la figura anterior). Para la fuerza neta se tiene el peso de la partícula, la tensión de la cuerda, y la fuerza de roce viscoso realizada por el fluido, entonces:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{g} + \lambda\vec{v} - F_T\hat{r}$$

Para el caso de un radio constante la velocidad en coordenadas polares es $\vec{v} = \ell\dot{\theta}\hat{\theta}$, mientras que el peso se descompone tanto en $\hat{r}$ como en $\hat{\theta}$ usando la coordenada angular θ, entonces:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = mg\cos(\theta)\hat{r} - mg\sin(\theta)\hat{\theta} - \lambda\ell\dot{\theta}\hat{\theta} - F_T\hat{r}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{\text{neta}} = (mg\cos(\theta) - F_T)\,\hat{r} - \left(mg\sin(\theta) + \lambda\ell\dot{\theta}\right)\hat{\theta} \tag{1}$$

Finalmente, la integral se aplica desde el ángulo inicial θ_0 hasta el ángulo 0 asociado a la posición vertical, entonces:

$$W_{\text{neto}} = -\int_{\theta_0}^{0} \left[(mg\cos(\theta) - F_T)\,\hat{r} - \left(mg\sin(\theta) + \lambda\ell\dot{\theta} \right)\hat{\theta} \right] \cdot \left[\ell d\theta \hat{\theta} \right]$$

Como $\hat{r}\cdot\hat{\theta} = 0$ y $\hat{\theta}\cdot\hat{\theta} = 1$, entonces:

$$W_{\text{neto}} = \ell \int_{\theta_0}^{0} \left(mg\sin(\theta) + \lambda\ell\dot{\theta} \right) d\theta \;\Rightarrow\; W_{\text{neto}} = mg\ell \int_{\theta_0}^{0} \sin(\theta) d\theta + \lambda\ell^2 \int_{\theta_0}^{0} \dot{\theta} d\theta$$

La primera integral puede desarrollarse de forma explícita:

$$\int_{\theta_0}^{0} \sin(\theta) d\theta = -\cos(0) + \cos(\theta_0) = \cos(\theta_0) - 1$$

Entonces:

$$\Rightarrow\; W_{\text{neto}} = mg\ell\,(\cos(\theta_0) - 1) + \lambda\ell^2 \int_{\theta_0}^{0} \dot{\theta} d\theta \tag{2}$$

Para resolver la segunda integral necesitamos una expresión $\dot{\theta}(\theta)$ que nos entregue la velocidad angular explícitamente en función de la coordenada angular. Este tipo de relaciones se puede obtener a partir de la ecuación de movimiento, la cual se obtiene al aplicar la 2da ley de Newton $\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a}$. La aceleración en coordenadas polares para un movimiento con radio $r = \ell$ constante es $\vec{a} = -\ell\dot{\theta}^2\hat{r} + \ell\ddot{\theta}\hat{\theta}$, y la fuerza neta está dada por la expresión (1), entonces:

$$(mg\cos(\theta) - F_T)\,\hat{r} - \left(mg\sin(\theta) + \lambda\ell\dot{\theta} \right)\hat{\theta} = -m\ell\dot{\theta}^2\hat{r} + m\ell\ddot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{r}} \;\; -m\ell\dot{\theta}^2 = mg\cos(\theta) - F_T \quad ; \quad \boxed{\hat{\theta}} \;\; m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) - \lambda\ell\dot{\theta}$$

La ecuación de movimiento se obtiene a partir de la ecuación para $\hat{\theta}$:

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) - \lambda\ell\dot{\theta} \;\Rightarrow\; \ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0$$

Esta ecuación no se puede resolver de forma analítica, pero podemos aplicar aproximaciones. Ya que el ángulo inicial θ_0 es muy pequeño, y considerando que el movimiento es tal que el ángulo θ decrece, se tiene que $\theta \ll 1$ en todos los puntos de la trayectoria descrita, de tal forma que $\sin(\theta) \approx \theta$, y así:

$$\Rightarrow\; \ddot{\theta} + \frac{\lambda}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

Esta ecuación diferencial corresponde a una EDO lineal homogénea de 2do orden, por lo tanto proponemos soluciones de la forma $\theta(t) = \theta_* e^{\gamma t}$, donde $\theta_* \neq 0$ es una constante indeterminada. Con esto $\dot{\theta} = \gamma\theta_* e^{\gamma t}$ y $\ddot{\theta} = \gamma^2\theta_* e^{\gamma t}$, entonces:

$$\gamma^2\theta_* e^{\gamma t} + \frac{\lambda}{m}\gamma\theta_* e^{\gamma t} + \frac{g}{\ell}\theta_* e^{\gamma t} = 0 \;\Rightarrow\; \gamma^2 + \frac{\lambda}{m}\gamma + \frac{g}{\ell} = 0$$

$$\Rightarrow\; \gamma = -\frac{\lambda}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{g}{\ell}}$$

La solución $\theta(t)$ corresponde a una combinación lineal de soluciones $\theta_* e^{\gamma t}$ usando cada valor de γ encontrado, entonces:

$$\theta(t) = Ae^{\left(-\frac{\lambda}{2m}-\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2-\frac{g}{\ell}}\right)t} + Be^{\left(-\frac{\lambda}{2m}+\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2-\frac{g}{\ell}}\right)t}$$

$$\Rightarrow \ \theta(t) = e^{-\frac{\lambda}{2m}t}\left(Ae^{-\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2-\frac{g}{\ell}}t} + Be^{\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2-\frac{g}{\ell}}t}\right)$$

$$\Rightarrow \ \dot{\theta}(t) = e^{-\frac{\lambda}{2m}t}\left[\left(-\frac{\lambda}{2m}-\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2-\frac{g}{\ell}}\right)Ae^{-\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2-\frac{g}{\ell}}t} + \left(-\frac{\lambda}{2m}+\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2-\frac{g}{\ell}}\right)Be^{\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2-\frac{g}{\ell}}t}\right]$$

Si aplicamos las condiciones iniciales $\theta(0) = \theta_0$ y $\dot{\theta}(0) = 0$ se tiene lo siguiente:

$$\theta(0) = \theta_0 \ \Rightarrow \ A + B = \theta_0 \ \Rightarrow \ B = \theta_0 - A$$

$$\dot{\theta}(0) = 0 \ \Rightarrow \ -\left(\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2-\frac{g}{\ell}}+\frac{\lambda}{2m}\right)A + \left(\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2-\frac{g}{\ell}}-\frac{\lambda}{2m}\right)B = 0$$

$$\Rightarrow \ -\left(\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2-\frac{g}{\ell}}+\frac{\lambda}{2m}\right)A + \left(\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2-\frac{g}{\ell}}-\frac{\lambda}{2m}\right)(\theta_0 - A) = 0$$

$$\Rightarrow \ A\left(\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2-\frac{g}{\ell}}+\frac{\lambda}{2m}+\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2-\frac{g}{\ell}}-\frac{\lambda}{2m}\right) = \left(\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2-\frac{g}{\ell}}-\frac{\lambda}{2m}\right)\theta_0$$

$$\Rightarrow \ A = \frac{\left(\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2-\frac{g}{\ell}}-\frac{\lambda}{2m}\right)\theta_0}{2\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2-\frac{g}{\ell}}} \quad \Rightarrow \ \ B = \frac{\left(\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2-\frac{g}{\ell}}+\frac{\lambda}{2m}\right)\theta_0}{2\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2-\frac{g}{\ell}}}$$

Lo que nos interesa es obtener $\dot{\theta}$ (ya que queremos usar la expresión en la integral (2)), entonces al reemplazar en la expresión para dicha cantidad se tiene lo siguiente:

$$\dot{\theta}(t) = \frac{\left(\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2-\frac{g}{\ell}}+\frac{\lambda}{2m}\right)\left(\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2-\frac{g}{\ell}}-\frac{\lambda}{2m}\right)\theta_0}{2\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2-\frac{g}{\ell}}}e^{-\frac{\lambda}{2m}t}\left[e^{\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2-\frac{g}{\ell}}t} - e^{-\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2-\frac{g}{\ell}}t}\right]$$

La expresión del numerador es una suma por su diferencia:

$$\left(\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2-\frac{g}{\ell}}+\frac{\lambda}{2m}\right)\left(\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2-\frac{g}{\ell}}-\frac{\lambda}{2m}\right) = \left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{g}{\ell} - \left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 = -\frac{g}{\ell}$$

Por otro lado, podemos usar la definición de la función seno hiperbólico para reescribir las exponenciales:

$$\sinh(\alpha) = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} \;\Rightarrow\; \frac{e^{\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{g}{\ell}}t} - e^{-\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{g}{\ell}}t}}{2} = \sinh\left(\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{g}{\ell}}t\right)$$

Con todo esto, la expresión para $\dot{\theta}(t)$ queda de la siguiente forma:

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{g\theta_0}{\ell\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{g}{\ell}}}\sinh\left(\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{g}{\ell}}t\right) \tag{3}$$

Si reemplazamos las constantes A y B en la expresión para $\theta(t)$ y desarrollamos es posible mostrar que se llega a lo siguiente:

$$\theta(t) = \theta_0 - \frac{g\theta_0}{\ell\left(\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{g}{\ell}\right)}\left[\cosh\left(\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{g}{\ell}}t\right) - 1\right] \tag{4}$$

Ahora, volviendo a la expresión (2), la integral I que queremos calcular es la siguiente:

$$I = \int_{\theta_0}^{0} \dot{\theta}(\theta)d\theta$$

Si queremos calcular esta integral directamente necesitamos una función $\dot{\theta}(\theta)$, sin embargo, lo que tenemos es $\dot{\theta}(t)$, por lo tanto nos conviene hacer un cambio de variable:

$$I = \int_{\theta_0}^{0} \dot{\theta}(\theta)d\theta = \int_{t(\theta_0)}^{t(0)} \dot{\theta}\frac{d\theta}{dt}dt \;\Rightarrow\; I = \int_{0}^{t_0} \dot{\theta}^2(t)dt$$

En esta última expresión el tiempo t_0 corresponde al tiempo para el cual θ se hace cero, es decir, $\theta(t_0) = 0$. Con esto, y usando la expresión (3), la integral I se desarrolla de la siguiente forma:

$$I = \frac{g^2\theta_0^2}{\ell^2\left(\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{g}{\ell}\right)}\int_0^{t_0} \sinh^2\left(\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{g}{\ell}}t\right)dt$$

Usamos la siguiente relación para el seno hiperbólico al cuadrado:

$$\sinh^2(\alpha) = \frac{1}{2}\cosh(2\alpha) - \frac{1}{2}$$

Entonces:

$$\Rightarrow\; I = \frac{g^2\theta_0^2}{2\ell^2\left(\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{g}{\ell}\right)}\left[\int_0^{t_0} \cosh\left(2\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{g}{\ell}}t\right)dt - \int_0^{t_0} dt\right]$$

$$\Rightarrow\ I = \frac{g^2\theta_0^2 \sinh\left(2\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{g}{\ell}}t_0\right)}{4\ell^2\left(\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{g}{\ell}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{g^2\theta_0^2 t_0}{2\ell^2\left(\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{g}{\ell}\right)}$$

Entonces, reemplazando en la expresión (2) se tiene que:

$$W_{\text{neto}} = mg\ell\left(\cos(\theta_0) - 1\right) + \frac{\lambda g^2\theta_0^2 \sinh\left(2\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{g}{\ell}}t_0\right)}{4\left(\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{g}{\ell}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\lambda g^2\theta_0^2 t_0}{2\left(\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{g}{\ell}\right)}$$

Sólo nos falta calcular el tiempo t_0 en función de los datos del problema. La condición para este tiempo es que $\theta(t_0) = 0$, entonces usando la expresión (4) se tiene lo siguiente:

$$\theta(t_0) = 0\ \Rightarrow\ \theta_0 - \frac{g\theta_0}{\ell\left(\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{g}{\ell}\right)}\left[\cosh\left(\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{g}{\ell}}t_0\right) - 1\right] = 0$$

$$\Rightarrow\ \cosh\left(\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{g}{\ell}}t_0\right) - 1 = \frac{\frac{\lambda^2\ell}{4m^2} - g}{g}\ \Rightarrow\ t_0 = \frac{\cosh^{-1}\left(\frac{\lambda^2\ell}{4m^2 g}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{g}{\ell}}}$$

Entonces, al reemplazar se tiene finalmente lo siguiente:

$$\Rightarrow\ \boxed{W_{\text{neto}} = mg\ell\left(\cos(\theta_0) - 1\right) + \frac{\lambda g^2\theta_0^2 \sinh\left(2\cosh^{-1}\left(\frac{\lambda^2\ell}{4m^2 g}\right)\right)}{4\left(\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{g}{\ell}\right)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\lambda g^2\theta_0^2 \cosh^{-1}\left(\frac{\lambda^2\ell}{4m^2 g}\right)}{2\left(\left(\frac{\lambda}{2m}\right)^2 - \frac{g}{\ell}\right)^{\frac{3}{2}}}}$$

b) En esta parte el roce es hidrodinámico, de tal forma que la fuerza de roce cambia. En la definición del roce hidrodinámico se usa que $\vec{F}_{\text{roce}} = -\sigma|\vec{v}|\vec{v}$, y usando la velocidad en coordenadas polares se tiene que:

$$-\sigma|\vec{v}|\vec{v} = -\sigma|\ell\dot{\theta}\hat{\theta}|\ell\dot{\theta}\hat{\theta}\ \Rightarrow\ -\sigma|\vec{v}|\vec{v} = -\sigma\ell^2\dot{\theta}|\dot{\theta}|\hat{\theta}$$

En esta expresión se mantiene el valor absoluto en $\dot{\theta}$ ya que esta cantidad puede ser positiva o negativa si el péndulo avanza en sentido anthorario u horario, respectivamente, y $|\vec{v}|$ debe ser siempre positivo. Tomando en cuenta esto, la fuerza neta en este caso es:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = \left(mg\cos(\theta) - F_T\right)\hat{r} - \left(mg\sin(\theta) + \sigma\ell^2\dot{\theta}|\dot{\theta}|\right)\hat{\theta} \tag{5}$$

Al reemplazar en la integral para el cálculo del trabajo neto la componente radial desaparece, y al desarrollar se obtiene que:

$$W_{\text{neto}} = mg\ell\int_{\theta_0}^{0}\sin(\theta)d\theta + \sigma\ell^3\int_{\theta_0}^{0}\dot{\theta}|\dot{\theta}|d\theta$$

El cálculo de la primera integral es idéntico a la parte anterior, entonces:

$$\Rightarrow \; W_{\text{neto}} = mg\ell\left(\cos(\theta_0) - 1\right) + \sigma\ell^3 \int_{\theta_0}^{0} \dot{\theta}|\dot{\theta}| d\theta \tag{6}$$

Al igual que en la parte anterior, para resolver la integral restante necesitamos una expresión para $\dot{\theta}$ explícitamente en función de θ o del tiempo, para lo cual necesitamos la ecuación de movimiento, la cual se obtiene al aplicar la 2da ley de Newton. En este caso se tiene lo siguiente:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a} \;\Rightarrow\; (mg\cos(\theta) - F_T)\,\hat{r} - \left(mg\sin(\theta) + \sigma\ell^2\dot{\theta}|\dot{\theta}|\right)\hat{\theta} = -m\ell\dot{\theta}^2\hat{r} + m\ell\ddot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\hat{r}} \quad -m\ell\dot{\theta}^2 = mg\cos(\theta) - F_T \quad ; \quad \boxed{\hat{\theta}} \quad m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) - \sigma\ell^2\dot{\theta}|\dot{\theta}|$$

Entonces, a partir de la ecuación para $\hat{\theta}$ se tiene que:

$$m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin(\theta) - \sigma\ell^2\dot{\theta}|\dot{\theta}| \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{\sigma\ell}{m}\dot{\theta}|\dot{\theta}| + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0$$

Esta ecuación no se puede resolver de forma analítica, incluso al ocupar la aproximación de ángulos pequeños, por lo tanto no se puede avanzar más desde acá con técnicas usuales del curso. Una aproximación que puede realizarse en estos casos (para al menos obtener un resultado analítico) es la de sobreamortiguamiento, la que nos dice que el término de la primera derivada temporal es mucho mayor que el término de la aceleración, lo cual ocurre cuando σ es muy grande. Si tomamos ese régimen podemos ignorar el término $\ddot{\theta}$, y entonces:

$$\Rightarrow \; \frac{\sigma\ell}{m}\dot{\theta}|\dot{\theta}| + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) \approx 0 \;\Rightarrow\; \dot{\theta}|\dot{\theta}| \approx -\frac{mg}{\sigma\ell^2}\sin(\theta)$$

Al reemplazar en la expresión (6) y desarrollar se tiene lo siguiente:

$$W_{\text{neto}} = mg\ell\left(\cos(\theta_0) - 1\right) - mg\ell\int_{\theta_0}^{0}\sin(\theta)d\theta = mg\ell\left(\cos(\theta_0) - 1\right) - mg\ell(-\cos(0) + \cos(\theta_0))$$

$$\Rightarrow \; W_{\text{neto}} = mg\ell(\cos(\theta_0) - 1 - \cos(\theta_0) + 1) \;\Rightarrow\; \boxed{W_{\text{neto}} = 0}$$

Tomando en cuenta que el régimen es sobreamortiguado, el péndulo se detendrá en la posición vertical, de tal manera que parte del reposo y termina en el reposo, por lo tanto su diferencia de energía cinética (y en consecuencia el trabajo neto) es nula. Desde un punto de vista físico tiene sentido; el peso realiza un trabajo positivo que aporta energía a la partícula para que esta acelere, mientras que el roce hidrodinámico intenso realiza una fuerza de roce que disipa toda esta energía, de tal manera que la suma de los dos aportes es nulo, haciendo que la partícula se detenga al llegar a su posición de equilibrio.