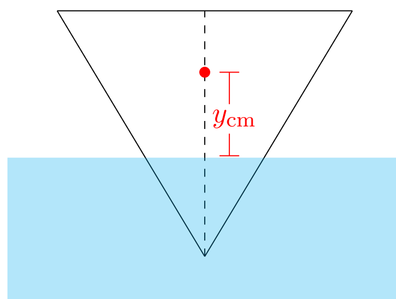
FI2001-5 Mecánica.
Profesor: Marcel Clerc.
Auxiliares: Manuel Díaz, Roberto Gajardo.

Desarrollo Auxiliar 8: Dinámica de un sistema de partículas.

06 de Mayo del 2024

P1.- Dinámica de una boya:

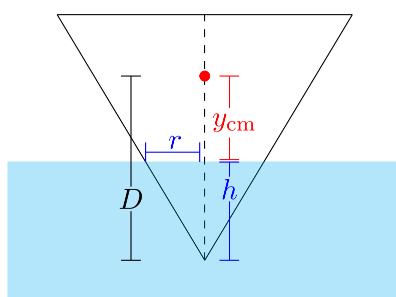
a) Considere una boya en forma de cono de radio R, altura H y masa M, la cual se distribuye de manera uniforme. Esta boya flota en el mar, cuya superficie consideraremos en reposo. Ya que la masa se distribuye de manera uniforme podemos inferir que el centro de masa tiene que estar contenido en el eje de simetría del cono, por lo tanto si usamos el nivel del mar como origen, lo que queremos es estudiar el movimiento del punto en la posición y_{cm}, el cual se muestra en la siguiente figura:



Dado que queremos estudiar la dinámica de este sistema de muchas partículas, usamos la 2da ley de Newton para el centro de masa, es decir:

$$\vec{F}^{(\text{ext})}_{\text{neta}} = M\ddot{\vec{R}}_{\text{cm}} \tag{1}$$

Podemos notar que las únicas fuerzas que actúan sobre la boya son su peso $M\vec{g}$, y la fuerza de empuje $\vec{F}_e$, que es proporcional al volumen de agua desplazado al hundirse. Si asumimos que la boya no se deforma, tendremos que la distancia desde la punta de esta hasta el centro de masa (a la cual llamaremos D por ahora) es constante, y con la ayuda de esta distancia podemos expresar la distancia de hundimiento de la boya, con lo cual podremos calcular el volumen que se hunde. Todo se representa gráficamente en la siguiente figura:



Usando el radio r y la distancia $h = D - y_{\text{cm}}$ podemos calcular el volumen V_s de la porción de cono sumergida en el agua:

$$V_s = \frac{1}{3}\pi h r^2 \;\Rightarrow\; V_s = \frac{1}{3}\pi r^2 (D - y_{\text{cm}})$$

Usando semejanza de triángulos es posible obtener r en función de la variable y_{cm}:

$$\frac{r}{h} = \frac{R}{H} \;\Rightarrow\; r = \frac{R}{H}h \;\Rightarrow\; r = \frac{R}{H}(D - y_{\text{cm}})$$

Entonces:

$$\Rightarrow\; V_s = \frac{\pi R^2}{3H^2}(D - y_{\text{cm}})^3$$

Del dibujo anterior podemos notar que, para que el problema tenga sentido físico, se debe cumplir que $y_{\text{cm}} \in [D - H, D]$, con lo cual $V_s \geq 0$. Ahora, la magnitud del empuje es igual al peso de agua desplazada, y si consideramos que ρ_0 es la densidad del agua, entonces:

$$|\vec{F}_e| = \rho_0 V_s g \;\Rightarrow\; |\vec{F}_e| = \frac{\rho_0 g \pi R^2}{3H^2}(D - y_{\text{cm}})^3$$

Tomamos en cuenta un sistema de referencia con $\hat{y}$ perpendicular a la superficie del mar, apuntando hacia afuera de este. Entonces, dado que la fuerza de empuje siempre apunta hacia afuera del fluído, la fuerza neta (asociada a fuerzas externas) que se aplica sobre la boya es:

$$\vec{F}^{(\text{ext})}_{\text{neta}} = |\vec{F}_e|\hat{y} - Mg\hat{y} \;\Rightarrow\; \vec{F}^{(\text{ext})}_{\text{neta}} = \left(\frac{\rho_0 g \pi R^2}{3H^2}(D - y_{\text{cm}})^3 - Mg\right)\hat{y}$$

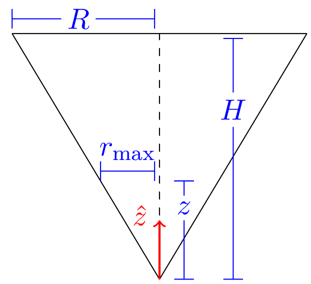
Si usamos como origen el punto de la superficie del mar por el cual pasa el eje de simetría del cono, tendremos que $\vec{R}_{\text{cm}} = y_{\text{cm}}\hat{y}$, con lo cual $\ddot{\vec{R}}_{\text{cm}} = \ddot{y}_{\text{cm}}\hat{y}$. Entonces, al aplicar la 2da ley de Newton (1) para el centro de masa, se tiene lo siguiente:

$$M\ddot{y}_{\text{cm}} = \frac{\rho_0 g \pi R^2}{3H^2}(D - y_{\text{cm}})^3 - Mg \;\Rightarrow\; \ddot{y}_{\text{cm}} = \frac{\rho_0 g \pi R^2}{3MH^2}(D - y_{\text{cm}})^3 - g \tag{2}$$

Para completar el cálculo nos falta la distancia D, que corresponde a la posición del centro de masa medida desde la punta del cono. Por definición, el centro de masa de un sistema de partículas con una densidad de masa volumétrica ρ es:

$$\vec{R}_{\text{cm}} = \frac{1}{M}\iiint_V \vec{r}\rho(\vec{r})dV$$

En esta expresión M es la masa total del sistema de partículas, $\vec{r}$ representa punto arbitrario del sistema, $\rho(\vec{r})$ es el valor de la densidad en dicho punto, y dV es el volumen infinitesimal ubicado en ese punto del espacio. Para el caso del cono usaremos como origen la punta de este, y usaremos un sistema de coordenadas cilíndricas $\{r, \phi, z\}$ con $\hat{z}$ apuntando paralelo al eje de simetría, desde la punta hacia la base del cono, tal como se muestra en la figura de la página siguiente. Por la forma del sistema podemos notar que las integrales para r y z no son independientes entre si, ya que para distintas alturas los límites de integración para la variable radial también son distintos (o al revés, para distintas distancias radiales los límites de integración para la variable z son distintos). Usando



semejanza de triángulos en la figura mencionada anteriormente, el límite superior r_{max} de la variable radial puede expresarse de manera explícita en función de la variable z:

$$\frac{r_{\text{max}}}{z} = \frac{R}{H} \Rightarrow r_{\text{max}}(z) = \frac{R}{H} z$$

Con esto, los límites de integración de nuestras variables son:

$$\phi \in [0, 2\pi) \quad ; \quad z \in [0, H] \quad ; \quad r \in [0, r_{\text{max}}(z)]$$

Entonces, usando la posición $\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{z}$ y el diferencial de volumen $dV = rdrdzd\phi$ de coordenadas cilíndricas, además de usar $\rho(\vec{r}) = \rho$ uniforme, se tiene lo siguiente:

$$\vec{R}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \int_0^{2\pi} \int_0^H \int_0^{r_{\text{max}}(z)} (r\hat{r} + z\hat{z}) \rho r dr dz d\phi$$

$$\Rightarrow \vec{R}_{\text{cm}} = \frac{\rho}{M} \left[\int_0^{2\pi} \int_0^H \int_0^{\frac{R}{H}z} r^2 \hat{r} dr dz d\phi + \int_0^{2\pi} \int_0^H \int_0^{\frac{R}{H}z} z r \hat{z} dr dz d\phi \right]$$

Es importante recordar que los únicos vectores unitarios que pueden salir indiscutiblemente de una integral son los asociados a coordenadas cartesianas (es decir, $\hat{x}$, $\hat{y}$ y $\hat{z}$), ya que los demás vectores unitarios pueden depender de alguna de las variables a utilizar. Por ejemplo, en este caso el vector unitario $\hat{r}$ depende implícitamente del ángulo azimutal ϕ, ya que $\hat{r} = \cos(\phi)\hat{x} + \sin(\phi)\hat{y}$, y por lo tanto no podemos sacarlo de la integral mostrada anteriormente. Es más, al momento de integrar este vector unitario con respecto a ϕ en un dominio de tamaño 2π (o un múltiplo de 2π) el resultado es nulo:

$$\int_0^{2\pi} \hat{r} d\phi = \hat{x} \int_0^{2\pi} \cos(\phi) d\phi + \hat{y} \int_0^{2\pi} \sin(\phi) d\phi = \hat{x} \left[\sin(\phi)\right]\Big|_0^{2\pi} + \hat{y} \left[-\cos(\phi)\right]\Big|_0^{2\pi} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \hat{r} d\phi = \vec{0}$$

Entonces, al reemplazar en nuestro cálculo anterior tendremos que:

$$\Rightarrow \vec{R}_{\text{cm}} = \frac{\rho}{M} \hat{z} \int_0^{2\pi} \int_0^H \int_0^{\frac{R}{H}z} z r dr dz d\phi$$

Podemos integrar con respecto al ángulo, lo cual nos entrega un factor 2π, entonces:

$$\Rightarrow \vec{R}_{\text{cm}} = \frac{2\pi\rho}{M} \hat{z} \int_0^H z \left(\int_0^{\frac{R}{H}z} r dr \right) dz \Rightarrow \vec{R}_{\text{cm}} = \frac{2\pi\rho}{M} \hat{z} \int_0^H z \left(\frac{R^2}{2H^2} z^2 \right) dz$$

$$\Rightarrow \vec{R}_{\text{cm}} = \frac{\pi\rho R^2}{MH^2} \hat{z} \int_0^H z^3 dz = \frac{\pi\rho R^2}{MH^2} \frac{H^4}{4} \hat{z} \Rightarrow \vec{R}_{\text{cm}} = \frac{\pi\rho R^2 H^2}{4M} \hat{z}$$

Como ρ no es dato debemos escribirlo en función de la masa y las dimensiones del sistema de partículas, para lo cual recordamos la definición de la masa total del sistema:

$$M = \iiint_V \rho(\vec{r})dV$$

En el caso en que la densidad ρ es uniforme, el lado derecho de la expresión anterior puede escrbirse como la densidad por el volumen total del sistema de partículas. Como el volumem de un cono es un tercio del volumen de un cilindro con las mismas condiciones, se tiene lo siguiente:

$$M = \frac{1}{3}\pi R^2 H\rho \;\Rightarrow\; \rho = \frac{3M}{\pi R^2 H}$$

Entonces, al reemplazar este resultado en la expresión para $\vec{R}_{\text{cm}}$ se tiene lo siguiente:

$$\Rightarrow\; \vec{R}_{\text{cm}} = \frac{\pi R^2 H^2}{4M}\frac{3M}{\pi R^2 H}\hat{z} \;\Rightarrow\; \vec{R}_{\text{cm}} = \frac{3}{4}H\hat{z}$$

Entonces, con este resultado podemos inferir que la distancia D que aparece en la ecuación de movimiento (2) es $\frac{3}{4}H$. Con este resultado, la ecuación de movimiento es finalmente:

$$\boxed{\ddot{y}_{\text{cm}} = \frac{\rho_0 g\pi R^2}{3MH^2}\left(\frac{3}{4}H - y_{\text{cm}}\right)^3 - g}$$

b) Se nos pide considerar desplazamientos del centro de masa que sean pequeños en comparación con la altura de la boya, es decir, $y_{\text{cm}} \ll H$. Desde un punto de vista cuantitativo esto significa que debemos desarrollar el lado derecho de la ecuación de movimiento en una serie de potencias[1], y quedarnos con los términos que son constantes o a lo más lineales con respecto a la variable y_{cm}, descartando aquellos términos asociados a potencias más grandes de dicha variable. En este caso particular es sencillo, ya que basta con desarrollar el cubo de binomio que se presenta, y quedarnos sólo con los términos anteriormente mencionados. Entonces:

$$\ddot{y}_{\text{cm}} = \frac{\rho_0 g\pi R^2}{3MH^2}\left(\frac{27}{64}H^3 - \frac{27}{4}H^2 y_{\text{cm}} + \frac{9}{4}H y_{\text{cm}}^2 - y_{\text{cm}}^3\right) - g$$

$$\Rightarrow\; \ddot{y}_{\text{cm}} \approx \frac{\rho_0 g\pi R^2}{3MH^2}\left(\frac{27}{64}H^3 - \frac{27}{4}H^2 y_{\text{cm}}\right) - g$$

$$\Rightarrow\; \ddot{y}_{\text{cm}} + \frac{9\rho_0 g\pi R^2}{4M}y_{\text{cm}} = \frac{9\rho_0 g\pi R^2 H}{64M} - g$$

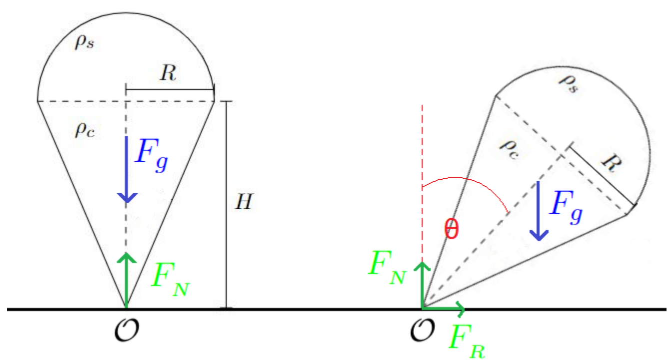
Podemos notar que se obtiene la ecuación de movimiento de un oscilador armónico, donde la frecuencia de oscilación ω se puede identificar a partir de la constante que acompaña a y_{cm} al lado izquierdo de la ecuación. Entonces:

$$\Rightarrow\; \boxed{\omega = \sqrt{\frac{9\rho_0 g\pi R^2}{4M}}}$$

[1] `https://es.wikipedia.org/wiki/Serie_de_Taylor`

P2.- Cono de helado cayendo:

a) Para entender cómo abordar cuantitativamente este problema conviene hacer un análisis cualitativo de la situación. Si ubicamos un cono de helado de manera perfectamente vertical entonces tendremos un equilibrio entre el peso de este cuerpo y la fuerza normal que ejerce la superficie de apoyo, de tal manera que no existe traslación. Por otro lado estas fuerzas actúan en una dirección paralela al eje de simetría del cono de helado, por lo tanto no generan ningún torque respecto al único punto alrededor del cual podría rotar, que corresponde al punto de apoyo con el suelo (ver figura más abajo). Esto permite que exista un equilibrio que, a pesar de ser inestable, puede permanecer vigente por un largo tiempo[2], hasta que alguna perturbación haga que se incline ligeramente en una dirección fuera de la vertical. Una vez que esto pasa, y si existe suficiente roce con la superficie de apoyo, el peso genera un torque sobre el cuerpo que favorece una rotación hacia el suelo, lo que puede traducirse en que el torque del peso genera una aceleración angular sobre el cono, tal como se representa en la siguiente figura:



Con esto podemos entender que la ecuación de movimiento $\ddot{\theta} = \ddot{\theta}(\theta)$ involucra términos asociados al peso del cono de helado, además podemos entender que la forma de abordar este problema es a través de la ecuación de movimiento rotacional de un sistema de partículas, la cual nos dice que el torque neto que generan las fuerzas externas (en este caso el peso) es igual a la derivada del momento angular con respecto al tiempo, es decir:

$$\vec{\tau}_{\mathcal{O}}^{(\text{ext})} = \frac{d\vec{L}_{\mathcal{O}}}{dt} \tag{3}$$

Usaremos un sistema de ejes cartesianos tales que $\hat{x}$ apunta en la dirección horizontal hacia la derecha, e $\hat{y}$ apunta en la dirección vertical hacia arriba, y de esta forma se tiene que $\hat{z}$ apunta hacia afuera de la página. Por otro lado, como estudiaremos la dinámica rotacional del sistema en torno al vértice del cono de helado, usaremos ese punto como origen, tal como se muestra en la figura anterior.

El torque ejercido por una fuerza $\vec{F}$ aplicada en una posición $\vec{r}$ con respecto al origen $\mathcal{O}$ se calcula de la siguiente forma:

$$\vec{\tau}_{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Las únicas fuerzas externas que actúan sobre el cono de helado son su peso $\vec{F}_g$, una fuerza normal $\vec{F}_N$ desde el suelo, y una fuerza de roce $\vec{F}_R$ que detiene el posible deslizamiento del cono de helado.

[2]Este equilibrio es fácil de mantener con escobas: `https://www.youtube.com/watch?v=c9ulMVKxogA`

Tomando en cuenta eso, el torque neto externo está compuesto por tres posibles torques:

$$\vec{\tau}_{\mathcal{O}}^{(\mathrm{ext})} = \vec{\tau}_g + \vec{\tau}_N + \vec{\tau}_R \;\Rightarrow\; \vec{\tau}_{\mathcal{O}}^{(\mathrm{ext})} = (\vec{r}_g \times \vec{F}_g) + (\vec{r}_N \times \vec{F}_N) + (\vec{r}_R \times \vec{F}_R)$$

Ya que la fuerza normal y el roce se aplican justo en el vértice del cono de helado, que corresponde al origen de nuestro sistema de referencia, se tiene que $\vec{r}_N = \vec{r}_R = \vec{0}$, y entonces:

$$\Rightarrow\; \vec{\tau}_{\mathcal{O}}^{(\mathrm{ext})} = \vec{r}_g \times \vec{F}_g$$

El peso del sisema completo es $\vec{F}_g = -Mg\hat{y}$, el cual se ejerce en el centro de masa del sisema. Como resultado de la P2 de la clase auxiliar 7 se sabe que la distancia R_c desde el vértice del cono hacia su centro de masa es:

$$R_\mathrm{c} = \frac{\frac{3}{4}\rho_c H^2 + \frac{3}{4}\rho_s R^2 + 2\rho_s R H}{\rho_c H + 2\rho_s R}$$

Usando esta distancia, el ángulo θ, y recordando cómo alineamos los vectores $\hat{x}$ e $\hat{y}$, se tiene lo siguiente:

$$\vec{r}_g = R_\mathrm{c}\sin(\theta)\hat{x} + R_\mathrm{c}\cos(\theta)\hat{y}$$

Entonces, el torque generado por el peso (y en este caso el torque externo del sistema) es:

$$\vec{\tau}_{\mathcal{O}}^{(\mathrm{ext})} = (R_\mathrm{c}\sin(\theta)\hat{x} + R_\mathrm{c}\cos(\theta)\hat{y}) \times (-Mg\hat{y}) \;\Rightarrow\; \vec{\tau}_{\mathcal{O}}^{(\mathrm{ext})} = -MgR_\mathrm{c}\sin(\theta)\hat{z} \tag{4}$$

Ahora nos falta obtener la derivada temporal del momento angular. Según el enunciado, el momento angular del sistema puede escribirse como $\vec{L}_{\mathcal{O}} = I\vec{\omega}$, donde I es una constante conocida[3] y $\vec{\omega}$ es el vector velocidad angular, el cual apunta en dirección perpendicular al plano de rotación, y en un sentido dado por la regla de la mano derecha[4]. Tomando en cuenta esto, y recordando que $\hat{z}$ apunta hacia afuera de la pantalla, se tiene que $\vec{\omega} = -\dot{\theta}\hat{z}$, donde $\dot{\theta}$ es la velocidad asociada a la coordenada θ, y entonces:

$$\vec{L}_{\mathcal{O}} = -I\dot{\theta}\hat{z} \;\Rightarrow\; \frac{d\vec{L}_{\mathcal{O}}}{dt} = -I\ddot{\theta}\hat{z} \tag{5}$$

Entonces, reemplazando las expresiones (4) y (5) en la ecuación de movimiento rotacional (3) y desarrollando es posible obtener la ecuación de movimiento para θ:

$$-MgR_\mathrm{c}\sin(\theta)\hat{z} = -I\ddot{\theta}\hat{z} \;\Rightarrow\; \boxed{\ddot{\theta} = \frac{MgR_\mathrm{c}}{I}\sin(\theta)}$$

Ya que $\sin(\theta)$ es positivo durante toda la caída, con este resultado podemos inferir que la aceleración del cono de helado es positiva en todo instante de tiempo, lo que significa que el cono cae inevitablemente al suelo.

[3]Esta cantidad corresponde al *momento de inercia* del sistema, que cuantifica la inercia rotacional asociada a un eje perpendicular a la página y que pasa por el vértice del cono.

[4]La dirección y sentido de $\vec{\omega}$ es paralela a la dirección y sentido en la cual apunta nuestro pulgar derecho cuando seguimos la rotación asociada a la velocidad con el resto de los dedos de dicha mano.

b) Queremos encontrar el ángulo crítico θ_* en el cual el cono de helado se despega del suelo, que corresponde al valor de θ para el cual la fuerza normal $\vec{F}_N$ es nula. Para encontrar esta fuerza necesitamos usar la 2da ley de Newton para el centro de masa, la cual nos dice que:

$$\vec{F}^{(\text{ext})}_{\text{neta}} = M\ddot{\vec{R}}_{\text{cm}}$$

De la parte anterior podemos notar que $\vec{R}_{\text{cm}} = \vec{r}_g$, entonces:

$$\vec{R}_{\text{cm}} = R_{\text{c}}\sin(\theta)\hat{x} + R_{\text{c}}\cos(\theta)\hat{y} \;\Rightarrow\; \dot{\vec{R}}_{\text{cm}} = R_{\text{c}}\dot{\theta}\cos(\theta)\hat{x} - R_{\text{c}}\dot{\theta}\sin(\theta)\hat{y}$$
$$\Rightarrow\; \ddot{\vec{R}}_{\text{cm}} = \left(R_{\text{c}}\ddot{\theta}\cos(\theta) - R_{\text{c}}\dot{\theta}^2\sin(\theta)\right)\hat{x} + \left(-R_{\text{c}}\ddot{\theta}\sin(\theta) - R_{\text{c}}\dot{\theta}^2\cos(\theta)\right)\hat{y}$$

Por otro lado, a partir de la figura inicial se tiene que $\vec{F}^{(\text{ext})}_{\text{neta}} = F_R\hat{x} + F_N\hat{y} - Mg\hat{y}$. Entonces, al juntar todo en la 2da ley de Newton y separar en ecuaciones escalares se tiene lo siguiente:

$$F_R\hat{x} + F_N\hat{y} - Mg\hat{y} = M\left(R_{\text{c}}\ddot{\theta}\cos(\theta) - R_{\text{c}}\dot{\theta}^2\sin(\theta)\right)\hat{x} + M\left(-R_{\text{c}}\ddot{\theta}\sin(\theta) - R_{\text{c}}\dot{\theta}^2\cos(\theta)\right)\hat{y}$$
$$\Rightarrow\; \boxed{\hat{x}}\;\; F_R = MR_{\text{c}}\ddot{\theta}\cos(\theta) - MR_{\text{c}}\dot{\theta}^2\sin(\theta) \quad ; \quad \boxed{\hat{y}}\;\; F_N - Mg = -MR_{\text{c}}\ddot{\theta}\sin(\theta) - MR_{\text{c}}\dot{\theta}^2\cos(\theta)$$

A partir de la ecuación asociada a $\hat{y}$ podemos obtener la fuerza normal:

$$F_N = Mg - R_{\text{c}}\ddot{\theta}\sin(\theta) - R_{\text{c}}\dot{\theta}^2\cos(\theta)$$

Para encontrar el ángulo crítico θ_* necesitamos que F_N sólo dependa del ángulo θ, por lo tanto debemos encontrar expresiones del estilo $\dot{\theta}(\theta)$ y $\ddot{\theta}(\theta)$. Esta última expresión es directamente la ecuación de movimiento obtenida en la parte anterior, entonces al reemplazar en F_N:

$$\Rightarrow\; F_N = Mg - \frac{M^2gR_{\text{c}}^2}{I}\sin^2(\theta) - R_{\text{c}}\dot{\theta}^2\cos(\theta)$$

Para obtener $\dot{\theta}^2$ integramos la ecuación de movimiento con el cambio de variable $\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ y las condiciones iniciales $\theta(0) = 0$ y $\dot{\theta}(0) = 0$:

$$\ddot{\theta} = \frac{MgR_{\text{c}}}{I}\sin(\theta) \;\Rightarrow\; \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = \frac{MgR_{\text{c}}}{I}\sin(\theta) \;\Rightarrow\; \int_0^{\dot{\theta}}\dot{\theta}'d\dot{\theta}' = \frac{MgR_{\text{c}}}{I}\int_0^{\theta}\sin(\theta')d\theta'$$
$$\Rightarrow\; \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{MgR_{\text{c}}}{I}(1-\cos(\theta)) \;\Rightarrow\; \dot{\theta}^2(\theta) = \frac{2MgR_{\text{c}}}{I}(1-\cos(\theta))$$

Entonces, al reemplazar en la expresión anterior para F_N podremos obtener la fuerza normal en función del ángulo de inclinación:

$$\Rightarrow\; F_N(\theta) = Mg - \frac{M^2gR_{\text{c}}^2}{I}\sin^2(\theta) - \frac{2M^2gR_{\text{c}}^2}{I}\cos(\theta)(1-\cos(\theta))$$

Para encontrar el ángulo crítico θ_* imponemos la condición $F_N(\theta_*) = 0$:

$$Mg - \frac{M^2gR_{\text{c}}^2}{I}\sin^2(\theta_*) - \frac{2M^2gR_{\text{c}}^2}{I}\cos(\theta_*) + \frac{2M^2gR_{\text{c}}^2}{I}\cos^2(\theta_*) = 0$$
$$\Rightarrow\; Mg - \frac{2M^2gR_{\text{c}}^2}{I}\cos(\theta_*) + \frac{M^2gR_{\text{c}}^2}{I}(2\cos^2(\theta_*) - \sin^2(\theta_*)) = 0$$

Usamos la relación $\sin^2(\theta_*) = 1 - \cos^2(\theta_*)$ para armar una ecuación cuadrática para $\cos(\theta_*)$, entonces

$$\Rightarrow\ Mg - \frac{2M^2gR_{\text{c}}^2}{I}\cos(\theta_*) + \frac{M^2gR_{\text{c}}^2}{I}(2\cos^2(\theta_*) - 1 + \cos^2(\theta_*)) = 0$$

$$\Rightarrow\ \frac{3M^2gR_{\text{c}}^2}{I}\cos^2(\theta_*) - \frac{2M^2gR_{\text{c}}^2}{I}\cos(\theta_*) + \left(Mg - \frac{M^2gR_{\text{c}}^2}{I}\right) = 0$$

$$\Rightarrow\ \cos(\theta_*) = \frac{\frac{2M^2gR_{\text{c}}^2}{I} \pm \sqrt{\left(\frac{2M^2gR_{\text{c}}^2}{I}\right)^2 - \frac{12M^2gR_{\text{c}}^2}{I}\left(Mg - \frac{M^2gR_{\text{c}}^2}{I}\right)}}{\frac{6M^2gR_{\text{c}}^2}{I}}$$

Desarrollando esta expresión e invirtiendo la función coseno se tiene finalmente que:

$$\Rightarrow\ \boxed{\theta_* = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{I}{3MR_{\text{c}}^2}}\right)}$$

Ya que no se conoce información sobre la constante I, no tenemos suficiente información como para descartar alguno de los dos signos, por lo tanto dejamos el desarrollo hasta este punto. En caso de conocer el valor de I, tenemos que escoger el signo tal que el valor absoluto del argumento de la función arcoseno sea menor a 1.