FI2001-5 Mecánica.
Profesor: Marcel Clerc.
Auxiliares: Manuel Díaz, Roberto Gajardo.

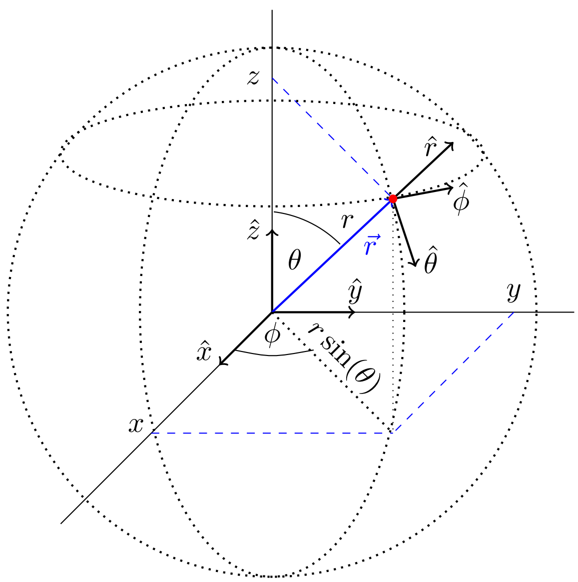
Desarrollo Auxiliar 6: 2da ley de Newton (parte 2).

17 de Abril del 2024

P1.- Péndulo esférico:

a) Consideramos un péndulo de longitud ℓ y masa m cuyo movimiento no está restringido a un plano vertical (como el péndulo simple), sino que puede moverse libremente en el espacio con la única condición de que la cuerda se mantenga siempre tensa. Esta condición puede entenderse también como que la partícula puede moverse angularmente en cualquier dirección y sentido, siempre y cuando se mantenga a una distancia L constante con respecto al pivote. En este tipo de casos donde la partícula se mantiene a una distancia fija desde algún punto y puede moverse en cualquier dirección del espacio conviene abordarlos haciendo uso de las **coordenadas esféricas**.

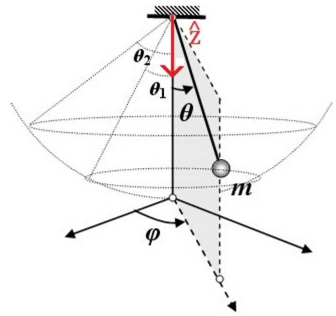
Las coordenadas esféricas corresponden a un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales que se utiliza para determinar la posición espacial de un punto mediante una distancia r (distancia radial) y dos ángulos θ (polar) y ϕ (azimutal). La distancia radial r se mide directamente desde el origen hasta la partícula de interés, mientras que el ángulo polar θ se mide desde el eje vertical $\hat{z}$ hasta el radio que une el origen con la partícula, y el ángulo azimutal ϕ se mide desde el eje $\hat{x}$ hasta la proyección del radio recién mencionado. Todo se muestra en la siguiente figura:



Como queremos encontrar la ecuación de movimiento del péndulo debemos usar la 2da ley de Newton $\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a}$. El movimiento descrito por el péndulo esférico es perfecto para ser descrito en coordenadas esféricas, ya que la partícula asociada a este péndulo se mueve siempre sobre la superficie de una esfera imaginaria de radio $r = \ell$ constante, de tal forma que si usamos como origen el pivote del péndulo, entonces la posición de esta partícula en coordenadas esféricas es $\vec{r} = \ell\hat{r}$. Esto es una ventaja ya que las derivadas temporales de la posición radial son nulas, es decir, $\dot{r} = 0$ y $\ddot{r} = 0$, con lo cual la aceleración de la partícula es:

$$\vec{a} = \left(-\ell\dot{\phi}^2\sin^2(\theta) - \ell\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(\ell\ddot{\theta} - \ell\dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta)\right)\hat{\theta} + \left(\ell\ddot{\phi}\sin(\theta) + 2\ell\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta)\right)\hat{\phi} \tag{1}$$

Ahora, si queremos usar el ángulo cenital θ como el ángulo de equilibrio del péndulo, necesitamos utilizar un sistema de referencia donde $\hat{z}$ esté apuntando hacia el suelo, de forma tal que la definición de θ sea consistente con la mostrada en el diagrama anterior. La dirección y sentido de $\hat{z}$ se muestran en la siguiente figura:



Tomando en cuenta esto, el peso de la partícula es $mg\hat{z}$, mientras que la tensión es $-F_T\hat{r}$, la cual apunta desde la partícula hacia el pivote (origen), y por lo tanto va en la dirección radial negativa. Con esto, la fuerza neta que actúa sobre la partícula es:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = mg\hat{z} - F_T\hat{r}$$

Usando la relación $\hat{z} = \cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta}$ se tiene que:

$$\Rightarrow \;\; \vec{F}_{\text{neta}} = (mg\cos(\theta) - F_T)\hat{r} - mg\sin(\theta)\hat{\theta} \tag{2}$$

Entonces, aplicando la 2da ley de Newton $\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a}$ usando las expresiones (1) y (2), se tiene lo siguiente:

$$(mg\cos(\theta) - F_T)\hat{r} - mg\sin(\theta)\hat{\theta} = \left(-m\ell\dot{\phi}^2\sin^2(\theta) - m\ell\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(m\ell\ddot{\theta} - m\ell\dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta)\right)\hat{\theta}$$
$$+ \left(m\ell\ddot{\phi}\sin(\theta) + 2m\ell\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta)\right)\hat{\phi}$$

Tomando en cuenta que las componentes correspondientes a un mismo vector unitario a ambos lados de esta expresión deben ser iguales, se obtienen las siguientes ecuaciones escalares:

$$\boxed{\hat{r}}\; mg\cos(\theta) - F_T = -m\ell\dot{\phi}^2\sin^2(\theta) - m\ell\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{\hat{\theta}}\; -mg\sin(\theta) = m\ell\ddot{\theta} - m\ell\dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta) \quad ; \quad \boxed{\hat{\phi}}\; 0 = m\ell\ddot{\phi}\sin(\theta) + 2m\ell\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta)$$

La primera expresión nos sirve para despejar la tensión:

$$F_T(\theta, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = mg\cos(\theta) + m\ell\dot{\phi}^2\sin^2(\theta) + m\ell\dot{\theta}^2 \tag{3}$$

Las otras dos expresiones nos permiten obtener la ecuación de movimiento para los ángulos θ y ϕ:

$$\boxed{\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta) + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0 \quad ; \quad \ddot{\phi} + \frac{2\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = 0}$$

b) La tensión F_T está dada por la expresión (3) obtenida en la parte anterior, sin embargo, a pesar de que esta expresión depende de θ, también depende de las velocidades $\dot{\theta}$ y $\dot{\phi}$. Si queremos obtener esta tensión sólo en función del ángulo θ necesitamos encontrar estas velocidades en función del ángulo cenital, es decir, debemos encontrar explícitamente las funciones $\dot{\phi}(\theta)$ y $\dot{\theta}(\theta)$.

Para $\dot{\phi}(\theta)$ podemos notar que el lado izquierdo de la expresión $\ddot{\phi}\sin(\theta) + 2\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta) = 0$ puede escribirse como una derivada total luego de algunas manipulaciones algebráicas:

$$\ddot{\phi}\sin(\theta) + 2\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta) = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{\phi}\sin^2(\theta) + 2\dot{\phi}\dot{\theta}\sin(\theta)\cos(\theta) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\left(\dot{\phi}\sin^2(\theta)\right) = 0$$

Cuando la derivada total de una magnitud con respecto al tiempo es cero, dicha magnitud es constante, entonces:

$$\frac{d}{dt}\left(\dot{\phi}\sin^2(\theta)\right) = 0 \;\Rightarrow\; \dot{\phi}\sin^2(\theta) = C_1$$

Asumiendo que el péndulo parte desde un ángulo cenital $\theta(0) = \theta_0$ con una velocidad tangencial $\dot{\phi}(0) = \omega_0$, entonces:

$$\dot{\phi}(0)\sin^2(\theta(0)) = C_1 \;\Rightarrow\; C_1 = \omega_0\sin^2(\theta_0) \;\Rightarrow\; \dot{\phi}\sin^2(\theta) = \omega_0\sin^2(\theta_0) \;\Rightarrow\; \dot{\phi}(\theta) = \frac{\omega_0\sin^2(\theta_0)}{\sin^2(\theta)} \quad (4)$$

Para encontrar $\dot{\theta}(\theta)$ usamos la ecuación de movimiento asociada a este ángulo y la relación $\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ para la 2da derivada:

$$\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta) + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0 \;\Rightarrow\; \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin(\theta) + \frac{\omega_0^2\sin^4(\theta_0)\sin(\theta)\cos(\theta)}{\sin^4(\theta)}$$

$$\Rightarrow\; \int_{\dot{\theta}(\theta_0)}^{\dot{\theta}(\theta)} \dot{\theta}' d\dot{\theta}' = -\frac{g}{\ell}\int_{\theta_0}^{\theta}\sin(\theta')d\theta' + \omega_0^2\sin^4(\theta_0)\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\cos(\theta')}{\sin^3(\theta')}d\theta'$$

Para la integral de la izquierda imponemos que inicialmente el péndulo sólo se mueve en $\hat{\phi}$, de tal forma que $\dot{\theta}(\theta_0) = 0$. Por otro lado, para la segunda integral del lado derecho se usa el cambio de variable[1] $u = \sin(\theta')$, con lo cual la antiderivada asociada es $-\frac{1}{2\sin^2(\theta')}$, y entonces:

$$\Rightarrow\; \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{g}{\ell}\left[-\cos(\theta')\right]\Big|_{\theta_0}^{\theta} + \omega_0^2\sin^4(\theta_0)\left[-\frac{1}{2\sin^2(\theta')}\right]\Bigg|_{\theta_0}^{\theta}$$

$$\Rightarrow\; \dot{\theta}^2(\theta) = \frac{2g}{\ell}\left[\cos(\theta) - \cos(\theta_0)\right] + \omega_0^2\sin^4(\theta_0)\left[\frac{1}{\sin^2(\theta_0)} - \frac{1}{\sin^2(\theta)}\right] \quad (5)$$

Dado que la expresión para F_T involucra $\dot{\theta}^2$, no es necesario aplicar la raíz cuadrada. Entonces, al reemplazar las expresiones (4) y (5) en la expresión (3) para la tensión, se tiene finalmente que:

$$F_T(\theta) = mg\cos(\theta) + \frac{m\ell\omega_0^2\sin^4(\theta_0)\sin^2(\theta)}{\sin^4(\theta)} + m\ell\left[\frac{2g}{\ell}\left[\cos(\theta) - \cos(\theta_0)\right] + \omega_0^2\sin^4(\theta_0)\left[\frac{1}{\sin^2(\theta_0)} - \frac{1}{\sin^2(\theta)}\right]\right]$$

$$\Rightarrow\; \boxed{F_T(\theta) = 3mg\cos(\theta) - 2mg\cos(\theta_0) + m\ell\omega_0^2\sin^2(\theta_0)}$$

[1] $\int \frac{\cos(\theta')}{\sin^3(\theta')}d\theta' = \int \frac{du}{u^3} = \int u^{-3}du = -\frac{1}{2u^2} = -\frac{1}{2\sin^2(\theta')}$

c) Ahora se añade un motor que ejerce una fuerza $F_* = m\ell\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta)$ en la dirección $\hat{\phi}$. Esto es equivalente a añadir un término $F_*\hat{\phi}$ a la fuerza neta en la 2da ley de Newton, que es equivalente a agregar el término $m\ell\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta)$ al lado derecho de la ecuación escalar asociada a $\hat{\phi}$. Entonces:

$$m\ell\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta) = m\ell\ddot{\phi}\sin(\theta) + 2m\ell\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta) \;\Rightarrow\; \ddot{\phi}\sin(\theta) + \dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta) = 0$$

La tensión F_T está dada por la expresión (3) obtenida en la parte anterior, sin embargo, a pesar de que esta expresión depende de θ, también depende de las velocidades $\dot{\theta}$ y $\dot{\phi}$. Si queremos obtener esta tensión sólo en función del ángulo θ necesitamos encontrar estas velocidades en función del ángulo cenital, es decir, debemos encontrar explícitamente las funciones $\dot{\phi}(\theta)$ y $\dot{\theta}(\theta)$.

Para $\dot{\phi}(\theta)$ podemos notar que el lado izquierdo de la expresión $\ddot{\phi}\sin(\theta)+\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta) = 0$ es una derivada de una multiplicación:

$$\ddot{\phi}\sin(\theta) + \dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\Big(\dot{\phi}\sin(\theta)\Big) = 0$$

Cuando la derivada total de una magnitud con respecto al tiempo es cero, dicha magnitud es constante, entonces:

$$\frac{d}{dt}\Big(\dot{\phi}\sin(\theta)\Big) = 0 \;\Rightarrow\; \dot{\phi}\sin(\theta) = C$$

Asumiendo que el péndulo parte desde un ángulo cenital $\theta(0) = \theta_0$ con una velocidad tangencial[2] $\dot{\phi}(0) = \omega_0$, entonces:

$$\dot{\phi}(0)\sin(\theta(0)) = C \;\Rightarrow\; C = \omega_0\sin(\theta_0) \;\Rightarrow\; \dot{\phi}\sin(\theta) = \omega_0\sin(\theta_0) \;\Rightarrow\; \dot{\phi}(\theta) = \frac{\omega_0\sin(\theta_0)}{\sin(\theta)} \tag{6}$$

Para encontrar $\dot{\theta}(\theta)$ usamos la ecuación de movimiento asociada a este ángulo y la relación $\ddot{\theta} = \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ para la 2da derivada:

$$\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta) + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0 \;\Rightarrow\; \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -\frac{g}{\ell}\sin(\theta) + \frac{\omega_0^2\sin^2(\theta_0)\sin(\theta)\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)}$$

$$\Rightarrow\; \int_{\dot{\theta}(\theta_0)}^{\dot{\theta}(\theta)} \dot{\theta}' d\dot{\theta}' = -\frac{g}{\ell}\int_{\theta_0}^{\theta}\sin(\theta')d\theta' + \omega_0^2\sin^2(\theta_0)\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\cos(\theta')}{\sin(\theta')}d\theta'$$

Para la integral de la izquierda imponemos que inicialmente el péndulo sólo se mueve en $\hat{\phi}$, de tal forma que $\dot{\theta}(\theta_0) = 0$. Por otro lado, para la segunda integral del lado derecho notamos que la función del denominador (es decir, $\cos(\theta')$) es la derivada de la función que está en el denominador (es decir, $\sin(\theta')$), y entonces la antiderivada asociada es igual a $\ln(|\sin(\theta')|)$, y así:

$$\Rightarrow\; \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = -\frac{g}{\ell}\left[-\cos(\theta')\right]\Big|_{\theta_0}^{\theta} + \omega_0^2\sin^2(\theta_0)\left[\ln(|\sin(\theta')|)\right]\Big|_{\theta_0}^{\theta}$$

$$\Rightarrow\; \dot{\theta}^2(\theta) = \frac{2g}{\ell}\left[\cos(\theta) - \cos(\theta_0)\right] + 2\omega_0^2\sin^2(\theta_0)\ln\left(\left|\frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta_0)}\right|\right) \tag{7}$$

[2]Cambié esto con respecto al enunciado porque de otra forma tendríamos un péndulo plano.

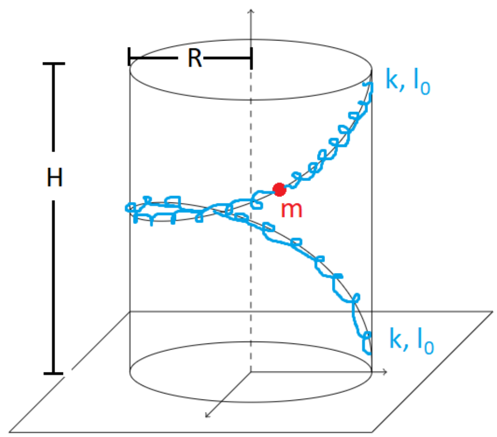
Dado que la expresión para F_T involucra $\dot{\theta}^2$, no es necesario aplicar la raíz cuadrada. Entonces, al reemplazar las expresiones (6) y (7) en la expresión (3) para la tensión, se tiene finalmente que:

$$F_T(\theta) = mg\cos(\theta) + \frac{m\ell\omega_0^2\sin^2(\theta_0)\sin^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} + m\ell\left[\frac{2g}{\ell}\left[\cos(\theta) - \cos(\theta_0)\right] + 2\omega_0^2\sin^2(\theta_0)\ln\left(\left|\frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta_0)}\right|\right)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{F_T(\theta) = 3mg\cos(\theta) + 2m\ell\omega_0^2\sin^2(\theta_0)\ln\left(\left|\frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta_0)}\right|\right) + m\ell\omega_0^2\sin^2(\theta_0) - 2mg\cos(\theta_0)}$$

P2.- Partícula oscilando en alambre espiral:

a) Se tiene un alambre sin masa con forma de espiral de radio R y altura H, la cual sólo da una vuelta completa. En el alambre se inserta una partícula de masa m, la cual puede deslizar sin roce a lo largo de este, y dicha partícula se conecta a dos resortes idénticos de constante elástica k y longitud natural l_0, que a la vez están conectados a cada extremo del alambre. Por simplicidad consideraremos un caso sin aceleración de gravedad. Todo el sistema se muestra en la siguiente figura:



Para entender el tipo de movimiento que realiza la partícula a lo largo del alambre debemos encontrar la ecuación de movimiento de dicha partícula, para lo cual debemos aplicar la 2da ley de Newton $\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a}$ representando los vectores $\vec{F}_{\text{neta}}$ y $\vec{a}$ en coordenadas convenientes según el tipo de movimiento que describe la partícula. Como en este caso el movimiento de la partícula ocurre en el manto de un cilindro de radio $r = R$ constante, conviene abordar el problema usando coordenadas cilíndricas. La aceleración en coordenadas cilíndricas es la siguiente:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z}$$

Para el caso $r = R$ constante se tiene que $\dot{r} = 0$ y $\ddot{r} = 0$, de tal forma que la aceleración para la partícula en la espiral es:

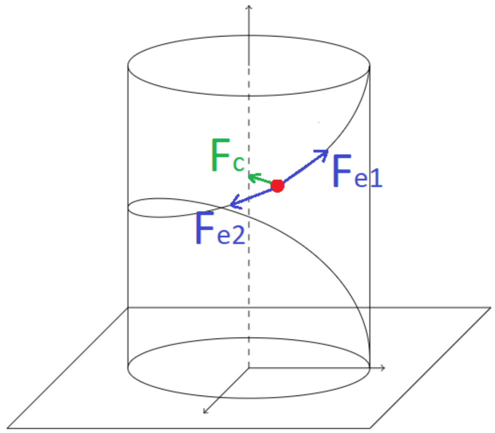
$$\Rightarrow \ \vec{a} = -R\dot{\phi}^2\hat{r} + R\ddot{\phi}\hat{\phi} + \ddot{z}\hat{z} \tag{8}$$

Ahora debemos encontrar la fuerza neta $\vec{F}_{\text{neta}}$ que se está ejerciendo sobre la partícula. Dado que no hay gravedad, cualitativamente hablando podemos entender que existen sólo tres fuerzas; la fuerza elástica asociada a cada uno de los resortes, y una fuerza de contacto que la espiral ejerce sobre la partícula, tal como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la página siguiente[3], entonces:

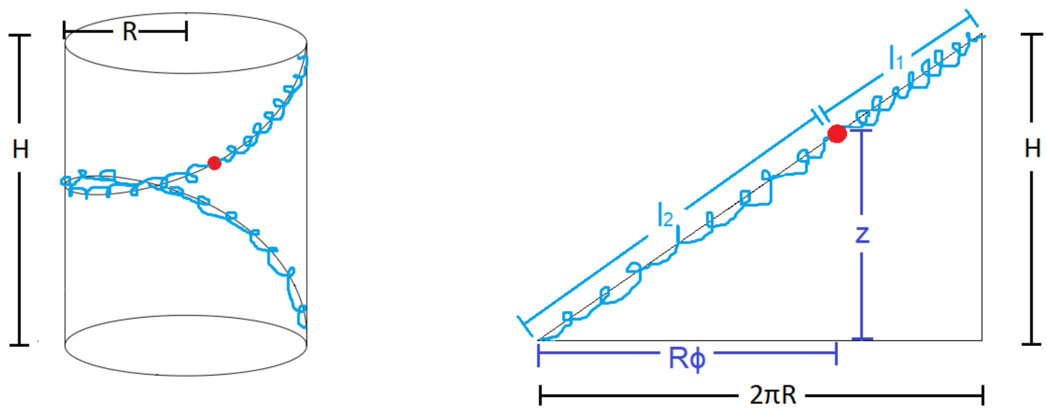
$$\vec{F}_{\text{neta}} = \vec{F}_{e_1} + \vec{F}_{e_2} + \vec{F}_c$$

Si asumimos que la fuerza que cada resorte ejerce sobre la partícula siempre es paralela a la espiral, entonces podemos entender que la fuerza de contacto es puramente radial, además de apuntar *hacia* el eje de del cilindro, de tal forma que $\vec{F}_c = -F_c\hat{r}$. Por otro lado, ya que la fuerza elástica de cada resorte es paralela al alambre, podemos entender que estas fuerzas tendrán componentes tanto en $\hat{\phi}$ como en $\hat{z}$, y por lo tanto debemos usar trigonometría para descomponer la fuerza elástica de cada resorte en esa direcciones.

[3] En esta figura ya se asume que $l_0 = 0$, por eso las fuerzas de los resortes apuntan en el sentido mostrado.



La magnitud de la fuerza elástica asociada a un resorte de constante elástica k y longitud natural l_0 está dada por la relación $|F_e| = k|l(t) - l_0|$, donde $l(t)$ es la longitud del resorte en un instante de tiempo arbitrario. Dado que esta longitud se mide a lo largo de la espiral, nos conviene "desenrrollar" la espiral para medir las distancias a lo largo de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, tal como se representa en la siguiente figura:



A partir de esta figura podemos notar que, al usar un origen en la base del cilindro, la longitud de cada resorte se puede representar con las coordenadas ϕ y z usando el teorema de Pitágoras, y entonces:

$$l_1 = \sqrt{(2\pi R - R\phi)^2 + (H - z)^2} \quad ; \quad l_2 = \sqrt{(R\phi)^2 + z^2}$$

$$\Rightarrow \; l_1 = \sqrt{R^2(2\pi - \phi)^2 + (H - z)^2} \quad ; \quad l_2 = \sqrt{R^2\phi^2 + z^2}$$

Por otro lado, usando la razón entre los lados de triángulos semejantes se puede encontra una expresión para z en función de ϕ:

$$\frac{z}{H} = \frac{R\phi}{2\pi R} \;\Rightarrow\; z = \frac{H}{2\pi}\phi$$

Al reemplazar en las expresiones anteriores, se tiene que:

$$l_1 = \sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}\sqrt{(2\pi-\phi)^2} \quad ; \quad l_2 = \sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}\sqrt{\phi^2}$$

$$\Rightarrow \ l_1 = \sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}|2\pi-\phi| \quad ; \quad l_2 = \sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}|\phi|$$

Por nuestra elección de origen en nuestra figura anterior podemos inferir que $\phi \in [0, 2\pi)$, de tal forma que $|2\pi - \phi| = 2\pi - \phi$ y $|\phi| = \phi$, y entonces:

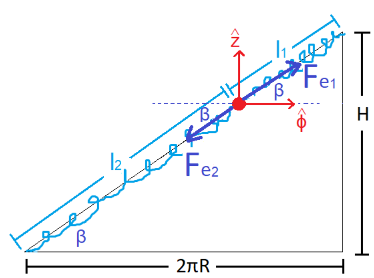
$$\Rightarrow \ l_1 = \sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}(2\pi-\phi) \quad ; \quad l_2 = \sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}\phi \tag{9}$$

Entonces, si consideramos la longitud natural del resorte como nula ($l_0 = 0$) la magnitud de la fuerza ejercida por cada resorte es:

$$F_{e_1} = k\left|\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}(2\pi-\phi) - 0\right| \quad ; \quad F_{e_2} = k\left|\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}\phi - 0\right|$$

$$\Rightarrow \ F_{e_1} = k\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}(2\pi-\phi) \quad ; \quad F_{e_2} = k\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}\phi$$

Por las condiciones físicas del problema asumiremos que la fuerza elástica va en la misma dirección del resorte, mientras que el sentido de la fuerza asociada a cada resorte es tal que este quiere volver a su longitud natural. Dado que $l_0 = 0$ ambos resortes quieren contraerse, y entonces la fuerzas de los resortes quedan como se ilustra en la siguiente figura:



Al descomponer cada fuerza se tiene que:

$$\vec{F}_{e_1} = F_{e_1}\cos(\beta)\hat{\phi} + F_{e_1}\sin(\beta)\hat{z} \quad ; \quad \vec{F}_{e_2} = -F_{e_2}\cos(\beta)\hat{\phi} - F_{e_2}\sin(\beta)\hat{z} \tag{10}$$

Los factores $\cos(\beta)$ y $\sin(\beta)$ se pueden escribir usando los lados del triángulo rectángulo mostrado anteriormente. Dado que la hipotenusa es igual a $\sqrt{(2\pi R)^2 + H^2}$, se tiene lo siguiente:

$$2\pi R = \sqrt{(2\pi R)^2 + H^2}\cos(\beta) \ \Rightarrow \ \cos(\beta) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}}$$

$$H = \sqrt{(2\pi R)^2 + H^2}\sin(\beta) \ \Rightarrow \ \sin(\beta) = \frac{(H/2\pi)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}}$$

Entonces, al reemplazar esto y las magnitudes F_{e_1} y F_{e_2} en las expresiones (10) se tiene lo siguiente:

$$\vec{F}_{e_1} = kR(2\pi - \phi)\hat{\phi} + \frac{kH}{2\pi}(2\pi - \phi)\hat{z} \quad ; \quad \vec{F}_{e_2} = -kR\phi\hat{\phi} - \frac{kH}{2\pi}\phi\hat{z}$$

Al juntar esto con la fuerza de contacto radial $\vec{F}_c = -F_c\hat{r}$ la fuerza neta que se ejerce sobre la partícula es:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = -F_c\hat{r} + kR(2\pi - 2\phi)\hat{\phi} + \frac{kH}{2\pi}(2\pi - 2\phi)\hat{z}$$

Con esto y la aceleración mostrada en (8) podemos aplicar la 2da ley de Newton, y entonces:

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{neta}} \;\Rightarrow\; -mR\dot{\phi}^2\hat{r} + mR\ddot{\phi}\hat{\phi} + m\ddot{z}\hat{z} = -F_c\hat{r} + kR(2\pi - 2\phi)\hat{\phi} + \frac{kH}{2\pi}(2\pi - 2\phi)\hat{z}$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{r}} \; -mR\dot{\phi}^2 = -F_c \quad ; \quad \boxed{\hat{\phi}} \; mR\ddot{\phi} = -2kR\phi + 2\pi kR \quad ; \quad \boxed{\hat{z}} \; m\ddot{z} = -\frac{kH}{\pi}\phi + kH$$

A partir de la ecuación para la dirección $\hat{\phi}$ encontraremos la ecuación de movimiento de la partícula:

$$mR\ddot{\phi} = -2kR\phi + 2\pi kR \;\Rightarrow\; \ddot{\phi} + \frac{2k}{m}\phi = \frac{2\pi k}{m} \tag{11}$$

Podemos notar que esta es la ecuación de movimiento de un oscilador armónico, donde identificamos al factor que acompaña a la variable ϕ como ω_0^2, donde ω_0 es la frecuencia de oscilación, entonces:

$$\omega_0^2 = \frac{2k}{m} \;\Rightarrow\; \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}}$$

Es importante entender que a partir de la ecuación de movimiento para z (usando la relación $z = \frac{H}{2\pi}\phi$) se llega al mismo resultado:

$$\phi = \frac{2\pi}{H}z \;\Rightarrow\; \frac{kH}{\pi}\phi = 2kz \;\Rightarrow\; m\ddot{z} = -2kz + kH \;\Rightarrow\; \ddot{z} + \frac{2k}{m}z = \frac{kH}{m}$$

También se obtiene que z cumple la ecuación de movimiento de un oscilador armónico, donde identificamos que $\omega_0^2 = \frac{2k}{m}$, por lo tanto se obtiene la misma frecuencia de oscilación.

b) A partir de la ecuación escalar para $\hat{r}$ podemos despejar la fuerza de contacto que el alambre ejerce sobre la partícula:

$$F_c = mR\dot{\phi}^2$$

Como queremos esta fuerza en función del ángulo ϕ, necesitamos encontrar el factor $\dot{\phi}^2$ en función de dicho ángulo, para lo cual usamos la ecuación de movimiento (11) para ϕ, y el cambio de variable típico[4] para la segunda derivada temporal, entonces:

$$\ddot{\phi} + \frac{2k}{m}\phi = \frac{2\pi k}{m} \;\Rightarrow\; \dot{\phi}\frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = -\frac{2k}{m}\phi + \frac{2\pi k}{m} \;\Rightarrow\; \int_{\dot{\phi}(0)}^{\dot{\phi}(t)} \dot{\phi}' d\dot{\phi}' = -\frac{2k}{m}\int_{\phi(0)}^{\phi(t)} \phi' d\phi' + \frac{2\pi k}{m}\int_{\phi(0)}^{\phi(t)} d\phi'$$

[4] $\ddot{\phi} = \dot{\phi}\frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$

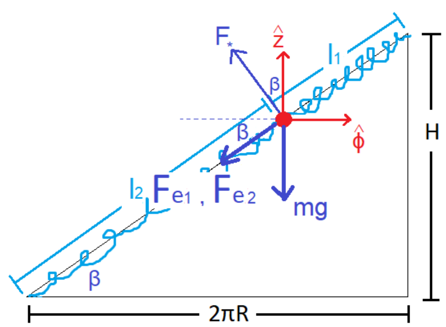
Si usamos condiciones iniciales arbitrarias ($\phi(0) = \phi_0$ y $\dot{\phi}(0) = \dot{\phi}_0$, con ϕ_0 y $\dot{\phi}_0$ constantes conocidas) entonces:

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\dot{\phi}^2 - \dot{\phi}_0^2\right) = -\frac{2k}{2m}\left(\phi^2 - \phi_0^2\right) + \frac{2\pi k}{m}\left(\phi - \phi_0\right) \Rightarrow \dot{\phi}^2 = \frac{4\pi k}{m}\left(\phi - \phi_0\right) - \frac{2k}{m}\left(\phi^2 - \phi_0^2\right) + \dot{\phi}_0^2$$

Entonces, al reemplazar en la expresión para fuerza de contacto F_c, se tiene finalmente que:

$$\Rightarrow \boxed{F_c(\phi) = 4\pi kR\left(\phi - \phi_0\right) - 2kR\left(\phi^2 - \phi_0^2\right) + mR\dot{\phi}_0^2}$$

c) Ahora se tiene que la longitud natural es $l_0 = \pi\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}$, que corresponde a la mitad de la hipotenusa completa, de tal forma que cuando la partícula está al medio del alambre, los resortes no están ni estirados ni contraídos. Tomando en cuenta eso, para una situación similar a la de las partes anteriores se tendrá al resorte 1 contraído, y al resorte 2 estirado, de tal forma que ambas fuerzas apuntan en la misma dirección y sentido. Por otro lado, si ahora el sistema está en un ambiente con aceleración de gravedad g, la partícula tenderá a caer un poco en la dirección $\hat{z}$, por lo tanto, además de una fuerza de contacto radial (que en esta parte del problema usaremos como F_{cr}) existe una fuerza de contacto F_* que va perpendicular al alambre y que se descompone en $\hat{\phi}$ y $\hat{z}$. Todo se muestra en la siguiente figura:



Con esto, y considerando la fuerza de contacto radial F_{cr}, la fuerza neta de la partícula es la siguiente:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = -F_{cr}\hat{r} - (F_{e_1} + F_{e_2})\cos(\beta)\hat{\phi} - (F_{e_1} + F_{e_2})\sin(\beta)\hat{z} - F_*\sin(\beta)\hat{\phi} + F_*\cos(\beta)\hat{z} - mg\hat{z}$$

Ya que la geometría del problema no ha cambiado, los valores de l_1 y l_2 mostrados en (9) siguen siendo los mismos que en las partes anteriores del problema, sin embargo, dado que la longitud natural de los resortes cambia, las magnitudes F_{e_1} y F_{e_2} si son distintas a las ocupadas anteriormente:

$$F_{e_1} = k|l_1 - l_0| = k\left|\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}(2\pi - \phi) - \pi\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}\right| \Rightarrow F_{e_1} = k\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}|\pi - \phi|$$

$$F_{e_2} = k|l_2 - l_0| = k\left|\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}\phi - \pi\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}\right| \Rightarrow F_{e_2} = k\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}|\pi - \phi|$$

Ya que en la situación que nos pusimos en la figura anterior estábamos considerando $\phi > \pi$, se tiene que[5] $|\pi - \phi| = \phi - \pi$, y entonces:

$$\Rightarrow \;\; F_{e_1} = k\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}(\phi - \pi) \quad ; \quad F_{e_2} = k\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}(\phi - \pi)$$

$$\Rightarrow \;\; F_{e_1} + F_{e_2} = 2k\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}(\phi - \pi)$$

Como la geometría del problema no ha cambiado, las expresiones para $\cos(\beta)$ y $\sin(\beta)$ siguen siendo las mismas que en la parte anterior, y entonces:

$$(F_{e_1} + F_{e_2})\cos(\beta) = 2kR(\phi - \pi) \quad ; \quad (F_{e_1} + F_{e_2})\sin(\beta) = \frac{kH}{\pi}(\phi - \pi)$$

Entonces, al reemplazar en la fuerza neta[6] se tiene lo siguiente:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = -F_{cr}\hat{r} - 2kR(\phi - \pi)\hat{\phi} - \frac{kH}{\pi}(\phi - \pi)\hat{z} - F_* \sin(\beta)\hat{\phi} + F_* \cos(\beta)\hat{z} - mg\hat{z}$$

Con esto y la aceleración mostrada en (8) podemos aplicar la 2da ley de Newton, y entonces:

$$\Rightarrow \;\; -mR\dot{\phi}^2\hat{r} + mR\ddot{\phi}\hat{\phi} + m\ddot{z}\hat{z} = -F_{cr}\hat{r} - 2kR(\phi - \pi)\hat{\phi} - \frac{kH}{\pi}(\phi - \pi)\hat{z} - F_* \sin(\beta)\hat{\phi} + F_* \cos(\beta)\hat{z} - mg\hat{z}$$

$$\Rightarrow \;\; \boxed{\hat{r}} \;\; -mR\dot{\phi}^2 = -F_{cr} \quad ; \quad \boxed{\hat{\phi}} \;\; mR\ddot{\phi} = -2kR\phi + 2\pi kR - F_* \sin(\beta)$$

$$\boxed{\hat{z}} \;\; m\ddot{z} = -\frac{kH}{\pi}\phi + kH + F_* \cos(\beta) - mg$$

Para poder despejar la fuerza de contacto F_* debemos entender que en este caso las ecuaciones en las componentes $\hat{\phi}$ y $\hat{z}$ forman un sistema de ecuaciones donde las incógnitas son F_* y $\ddot{\phi}$ (ó $\ddot{z}$, dependiendo cuál coordenada usamos para cuantificar la dinámica del sistema). Para ello primero aplicamos la relación $z = \frac{H}{2\pi}\phi$ en la ecuación asociada a la dirección $\hat{z}$:

$$z = \frac{H}{2\pi}\phi \;\; \Rightarrow \;\; \ddot{z} = \frac{H}{2\pi}\ddot{\phi} \;\; \Rightarrow \;\; \frac{mH}{2\pi}\ddot{\phi} = -\frac{kH}{\pi}\phi + kH + F_* \cos(\beta) - mg$$

Entonces, el sistema de dos ecuaciones (reordenadas) con dos incógnitas F_* y $\ddot{\phi}$ es:

$$F_* \sin(\beta) = -2kR\phi + 2\pi kR - mR\ddot{\phi} \quad ; \quad F_* \cos(\beta) = \frac{mH}{2\pi}\ddot{\phi} + \frac{kH}{\pi}\phi - kH + mg \tag{12}$$

Si multiplicamos la primera ecuación por $\sin(\beta)$, la segunda ecuación por $\cos(\beta)$, las sumamos y usamos la identidad trigonométrica $\sin^2(\beta) + \cos^2(\beta) = 1$, podremos encontrar una expresión para la fuerza de contacto F_*:

$$\Rightarrow \;\; F_* = \left(-2kR\phi + 2\pi kR - mR\ddot{\phi}\right)\sin(\beta) + \left(\frac{mH}{2\pi}\ddot{\phi} + \frac{kH}{\pi}\phi - kH + mg\right)\cos(\beta)$$

[5]Esto es consistente con la dirección y sentido (y por lo tanto el signo) mostrado en el diagrama de cuerpo libre.
[6]Los factores $\cos(\beta)$ y $\sin(\beta)$ que acompañan a F_* se dejan inalterados por conveniencia.

$$\Rightarrow\ F_* = \left(\frac{mH}{2\pi}\cos(\beta) - mR\sin(\beta)\right)\ddot{\phi} + \left(\frac{kH}{\pi}\cos(\beta) - 2kR\sin(\beta)\right)\phi$$
$$+\left(2\pi kR\sin(\beta) - kH\cos(\beta) + mg\cos(\beta)\right)$$

Al reemplazar las expresiones para $\sin(\beta)$ y $\cos(\beta)$ podemos demostrar que se cumple lo siguiente:

$$\frac{mH}{2\pi}\cos(\beta) - mR\sin(\beta) = 0 \quad ; \quad \frac{kH}{\pi}\cos(\beta) - 2kR\sin(\beta) = 0$$
$$2\pi kR\sin(\beta) - kH\cos(\beta) + mg\cos(\beta) = \frac{mgR}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}}$$

Entonces:

$$\Rightarrow\ F_* = \frac{mgR}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}} \tag{13}$$

Es importante entender que esta no es la intensidad de la fuerza de contacto total, ya que aún nos falta considerar la componente radial $F_{cr} = mR\dot{\phi}^2$, con la cual la magnitud de la fuerza de contacto total será $F_c = \sqrt{F_*^2 + F_{cr}^2}$. Para encontrar F_{cr} necesitamos $\dot{\phi}^2$, para lo cual necesitamos la ecuación de movimiento para ϕ, la cual se obtiene al despejar $\ddot{\phi}$ del sistema de ecuaciones mostrado en (12). Para despejar la incóngita $\ddot{\phi}$ necesitamos hacer desaparecer la incógnita F_*, para lo cual multiplicamos la primera ecuación por $\cos(\beta)$, la segunda ecuación por $-\sin(\beta)$, y luego sumamos a ambos lados de la igualdad (de tal forma que el lado izquierdo que contiene a F_* desaparezca). Entonces:

$$F_*\sin(\beta)\cos(\beta) + F_*\cos(\beta)(-\sin(\beta)) = 0$$
$$\Rightarrow\ \left(-2kR\phi + 2\pi kR - mR\ddot{\phi}\right)\cos(\beta) - \left(\frac{mH}{2\pi}\ddot{\phi} + \frac{kH}{\pi}\phi - kH + mg\right)\sin(\beta) = 0$$
$$\Rightarrow\ \left(-\frac{mH}{2\pi}\sin(\beta) - mR\cos(\beta)\right)\ddot{\phi} + \left(-\frac{kH}{\pi}\sin(\beta) - 2kR\cos(\beta)\right)\phi$$
$$+\left(2\pi kR\cos(\beta) + kH\sin(\beta) - mg\sin(\beta)\right) = 0$$

Al reemplazar las expresiones para $\sin(\beta)$ y $\cos(\beta)$ podemos demostrar que se cumple lo siguiente:

$$-\frac{mH}{2\pi}\sin(\beta) - mR\cos(\beta) = -m\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2} \quad ; \quad -\frac{kH}{\pi}\sin(\beta) - 2kR\cos(\beta) = -2k\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}$$
$$2\pi kR\sin(\beta) - kH\cos(\beta) + mg\cos(\beta) = 2\pi k\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2} + \frac{mgH}{2\pi\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}}$$

Entonces:

$$\Rightarrow\ -m\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}\ddot{\phi} - 2k\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}\phi + 2\pi k\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2} + \frac{mgH}{2\pi\sqrt{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2}} = 0$$

$$\Rightarrow\ \ddot{\phi} + \frac{2k}{m}\phi = \frac{2\pi k}{m} + \frac{gH}{2\pi\left(R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2\right)}$$

Ahora integramos usando el cambio de variable $\ddot{\phi} = \dot{\phi}\frac{d\dot{\phi}}{d\phi}$ y con las condiciones iniciales $\phi(0) = 0$ y $\dot{\phi}(0) = \dot{\phi}_0$, entonces:

$$\ddot{\phi} + \frac{2k}{m}\phi = \frac{2\pi k}{m} + \frac{gH}{2\pi\left(R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2\right)} \ \Rightarrow\ \dot{\phi}\frac{d\dot{\phi}}{d\phi} = -\frac{2k}{m}\phi + \frac{2\pi k}{m} + \frac{gH}{2\pi\left(R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2\right)}$$

$$\Rightarrow\ \int_{\dot{\phi}(0)}^{\dot{\phi}(t)} \dot{\phi}' d\dot{\phi}' = -\frac{2k}{m}\int_{\phi(0)}^{\phi(t)} \phi' d\phi' + \left(\frac{2\pi k}{m} + \frac{gH}{2\pi\left(R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2\right)}\right)\int_{\phi(0)}^{\phi(t)} d\phi'$$

$$\Rightarrow\ \int_{\dot{\phi}_0}^{\dot{\phi}} \dot{\phi}' d\dot{\phi}' = -\frac{2k}{m}\int_{\pi}^{\phi} \phi' d\phi' + \left(\frac{2\pi k}{m} + \frac{gH}{2\pi\left(R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2\right)}\right)\int_{\pi}^{\phi} d\phi'$$

$$\frac{1}{2}\left(\dot{\phi}^2 - \dot{\phi}_0^2\right) = -\frac{2k}{2m}\left(\phi^2 - \pi^2\right) + \left(\frac{2\pi k}{m} + \frac{gH}{2\pi\left(R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2\right)}\right)(\phi - \pi)$$

$$\Rightarrow\ \dot{\phi}^2 = \left(\frac{4\pi k}{m} + \frac{gH}{\pi\left(R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2\right)}\right)(\phi - \pi) - \frac{2k}{m}\left(\phi^2 - \pi^2\right) + \dot{\phi}_0^2$$

Entonces, la componente radial de la fuerza de contacto es:

$$F_{cr} = mR\dot{\phi}^2 \ \Rightarrow\ F_{cr} = \left(4\pi kR + \frac{mgRH}{\pi\left(R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2\right)}\right)(\phi - \pi) - 2kR\left(\phi^2 - \pi^2\right) + mR\dot{\phi}_0^2$$

Finalmente, dado que $F_c = \sqrt{F_*^2 + F_{cr}^2}$, usando esta expresión y lo encontrado para F_* en (13) se tiene que:

$$\Rightarrow\ \boxed{F_c(\phi) = \sqrt{\frac{m^2g^2R^2}{R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2} + \left(\left(4\pi kR + \frac{mgRH}{\pi\left(R^2 + \left(\frac{H}{2\pi}\right)^2\right)}\right)(\phi - \pi) - 2kR\left(\phi^2 - \pi^2\right) + mR\dot{\phi}_0^2\right)^2}}$$