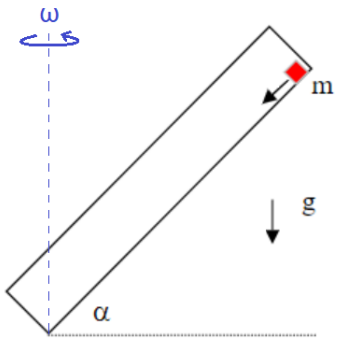
FI2001-5 Mecánica.
Profesor: Marcel Clerc.
Auxiliares: Manuel Díaz, Roberto Gajardo.

Desarrollo Auxiliar 5: 2da ley de Newton.

15 de Abril del 2024

P1.- <u>Partícula en canal inclinado</u>:

Se quiere encontrar la rapidez de una partícula de masa m dentro de una caja de vidrio muy delgada (aproximadamente unidimensional) de longitud L llena de un líquido viscoso e inclinada en un ángulo α y que rota con una velocidad angular ω, donde α y ω son constantes. El sistema se representa en la siguiente figura:

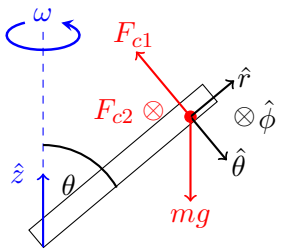


Para encontrar la rapidez de la partícula a lo largo del canal es necesario encontrar la velocidad $\vec{v}$ de esta, para lo cual debemos integrar la aceleración $\vec{a}$. Para obtener la aceleración aplicamos la 2da ley de Newton $\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a}$, donde la fuerza neta y la aceleración deben expresarse usando un sistema de coordenadas conveniente según el tipo de geometría presente en el sistema. En este caso particular, cuando la caja esté rotando a la vez que la partícula se mueve dentro de esta, la trayectoria descrita por la partícula en sí estará contenida en la superficie de un cono cuyo ángulo de apertura con respecto a su eje de simetría es $\frac{\pi}{2} - \alpha$, el cual es constante. En este tipo de situaciones es conveniente utilizar coordenadas esféricas para representar el movimiento de la partícula, y por ende, para representar $\vec{a}$ y $\vec{F}_{\text{neta}}$. La conveniencia viene del hecho de que el movimiento de la partícula a lo largo de la caja ocurre en la dirección radial $\hat{r}$, y además, el ángulo cenital θ, que se mide con respecto al eje vertical, es igual a $\frac{\pi}{2} - \alpha$ constante, de tal manera que $\dot{\theta} = 0$ y $\ddot{\theta} = 0$. Por último, la velocidad angular ω puede identificarse con la velocidad angular $\dot{\phi}$ de las coordenadas esféricas, de tal forma que $\dot{\phi} = \omega$, y como ω es constante, entonces $\ddot{\phi} = 0$. Con todo esto, la aceleración de la partícula en coordenadas esféricas se representa[1] de la siguiente forma:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\omega^2 \sin^2(\theta))\hat{r} - r\omega^2 \sin(\theta)\cos(\theta)\hat{\theta} + 2\omega\dot{r}\sin(\theta)\hat{\phi} \tag{1}$$

Para la fuerza neta $\vec{F}_{\text{neta}}$ se tiene el peso $-mg\hat{z}$, la fuerza de roce viscoso $-cm\vec{v}_*$ (donde $\vec{v}_*$ es la velocidad de la partícula en un sistema de referencia que se mueve junto con la caja), una fuerza de contacto $-F_{c1}\hat{\theta}$ que aparece como una reacción al peso, y otra fuerza de contacto $F_{c2}\hat{\phi}$ que cuantifica el hecho de que la caja está empujando constantemente a la partícula desde el lado de forma tal que esta siga el mismo movimiento que la caja. Todas las fuerzas (menos el roce viscoso) se muestran en la figura de la siguiente página.

[1] En estas expresiones $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ es constante, lo dejé así para simplificar las expresiones y se reemplazará en el resultado final.



Entonces, la fuerza neta $\vec{F}_{\text{neta}}$ es:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = -mg\hat{z} - F_{c1}\hat{\theta} + F_{c2}\hat{\phi} - cm\vec{v}$$

A partir de la figura notamos que $\hat{z}$ se puede expresar en función de $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ usando el ángulo θ, de forma tal que $\hat{z} = \cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta}$. Por otro lado, para la fuerza de roce viscoso $-cm\vec{v}_*$ podemos notar que la partícula se mueve a través del líquido sólo en la dirección radial $\hat{r}$, ya que la velocidad asociada a la dirección $\hat{\phi}$ no genera un desplazamiento interno de la partícula. Tomando en cuenta eso, en el sistema de referencia que se mueve junto con la caja se tiene que $\vec{v}_* = \dot{r}\hat{r}$, de tal forma que $-cm\vec{v}_* = -cm\dot{r}\hat{r}$. Reemplazando todo esto en la fuerza neta se tiene que:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{neta}} &= -mg\cos(\theta)\hat{r} + mg\sin(\theta)\hat{\theta} - F_{c1}\hat{\theta} + F_{c2}\hat{\phi} - cm\dot{r}\hat{r} \\ \Rightarrow\ \vec{F}_{\text{neta}} &= (-cm\dot{r} - mg\cos(\theta))\hat{r} + (mg\sin(\theta) - F_{c1})\hat{\theta} + F_{c2}\hat{\phi} \end{aligned}$$

Entonces, aplicamos la 2da ley de Newton $m\vec{a} = \vec{F}_{\text{neta}}$ usando esta expresión y la aceleración $\vec{a}$ mostrada en (1), con lo cual se obtiene lo siguiente:

$$(m\ddot{r} - mr\omega^2\sin^2(\theta))\hat{r} - mr\omega^2\sin(\theta)\cos(\theta)\hat{\theta} + 2m\omega\dot{r}\sin(\theta)\hat{\phi} = (-cm\dot{r} - mg\cos(\theta))\hat{r} + (mg\sin(\theta) - F_{c1})\hat{\theta} + F_{c2}\hat{\phi}$$

Igualando las componentes correspondientes a un mismo vector unitario a ambos lados de la expresión anterior se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\boxed{\hat{r}}\ m\ddot{r} - mr\omega^2\sin^2(\theta) = -cm\dot{r} - mg\cos(\theta)$$

$$\boxed{\hat{\theta}}\ -mr\omega^2\sin(\theta)\cos(\theta) = mg\sin(\theta) - F_{c1} \quad ; \quad \boxed{\hat{\phi}}\ 2m\omega\dot{r}\sin(\theta) = F_{c2}$$

Las expresiones asociadas a las direcciones $\hat{\theta}$ y $\hat{\phi}$ nos entregan una forma de despejar las fuerzas de contacto que se ejercen con las paredes de la caja en función de la posición radial r y la velocidad $\dot{r}$:

$$F_{c1}(r) = m\omega^2 r\sin(\theta)\cos(\theta) + mg\sin(\theta) \quad ; \quad F_{c2}(\dot{r}) = 2m\omega\dot{r}\sin(\theta)$$

La expresión asociada a $\hat{r}$ nos entrega la ecuación de movimiento para la coordenada radial r:

$$m\ddot{r} - mr\omega^2\sin^2(\theta) = -cm\dot{r} - mg\cos(\theta) \ \Rightarrow\ \ddot{r} + c\dot{r} - \omega^2\sin^2(\theta)r = -g\cos(\theta)$$

Usando la relación $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ se tiene que:

$$\sin(\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(\alpha) \;\Rightarrow\; \sin(\theta) = \cos(\alpha)$$
$$\cos(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\alpha) + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(\alpha) \;\Rightarrow\; \cos(\theta) = \sin(\alpha)$$

Entonces, la ecuación de movimiento para la coordenada radial r en función de los parámetros del problema está dada por la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\ddot{r} + c\dot{r} - \omega^2\cos^2(\alpha)r = -g\sin(\alpha)$$

Esta ecuación correponde a una EDO lineal no homogénea de 2do orden. Para resolverla conviene hacer un cambio de variable sumando una constante B a la función r que nos permita convertir esta EDO a una de las mismas características, pero homogénea, es decir, nos conviene usar $r = r' + B$, con lo cual $\dot{r} = \dot{r}'$ y $\ddot{r} = \ddot{r}'$. Para encontrar la constante B adecuada para el cambio de variable imponemos que la ecuación diferencial para r' sea homogénea:

$$\ddot{r}' + c\dot{r}' - \omega^2\cos^2(\alpha)(r' + B) = -g\sin(\alpha) \;\Rightarrow\; \ddot{r}' + c\dot{r}' - \omega^2\cos^2(\alpha)r' - B\omega^2\cos^2(\alpha) = -g\sin(\alpha)$$
$$\Rightarrow\; \ddot{r}' + c\dot{r}' - \omega^2\cos^2(\alpha)r' = B\omega^2\cos^2(\alpha) - g\sin(\alpha)$$

Entonces, si queremos que la EDO para r' sea homogénea imponemos que el lado derecho sea cero, con lo cual despejamos la constante B que nos sirve para el cambio de variable:

$$B\omega^2\cos^2(\alpha) - g\sin(\alpha) = 0 \;\Rightarrow\; B = \frac{g\sin(\alpha)}{\omega^2\cos^2(\alpha)} \tag{2}$$

Entonces, con este valor de B se tiene que:

$$\ddot{r}' + c\dot{r}' - \omega^2\cos^2(\alpha)r' = 0 \tag{3}$$

Como esta es una EDO lineal y homogénea usamos el ansatz $r'(t) = r'_0 e^{\gamma t}$, donde r'_0 es una constante. Con esto se tiene que $\dot{r}'(t) = \gamma r'_0 e^{\gamma t}$ y $\ddot{r}'(t) = \gamma^2 r'_0 e^{\gamma t}$, y entonces al reemplazar en la EDO (3) podremos despejar los valores de γ que permiten que esta sea una solución:

$$\gamma^2 r'_0 e^{\gamma t} + c\gamma r'_0 e^{\gamma t} - \omega^2\cos^2(\alpha)r'_0 e^{\gamma t} = 0 \;\Rightarrow\; \gamma^2 + c\gamma - \omega^2\cos^2(\alpha) = 0 \;\Rightarrow\; \gamma = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 + 4\omega^2\cos^2(\alpha)}}{2}$$
$$\Rightarrow\; \gamma_1 = -\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \omega^2\cos^2(\alpha)} \quad ; \quad \gamma_2 = -\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \omega^2\cos^2(\alpha)}$$

La solución general $r'(t)$ es una superposición de las soluciones que resultan con cada valor de γ, es decir:

$$r'(t) = C_1 e^{\gamma_1 t} + C_2 e^{\gamma_2 t} = C_1 e^{\left(-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \omega^2\cos^2(\alpha)}\right)t} + C_2 e^{\left(-\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \omega^2\cos^2(\alpha)}\right)t}$$
$$\Rightarrow\; r'(t) = e^{-\frac{c}{2}t}\left[C_1 e^{\left(\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \omega^2\cos^2(\alpha)}\right)t} + C_2 e^{-\left(\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \omega^2\cos^2(\alpha)}\right)t}\right]$$

Deshaciendo el cambio de variable $r(t) = r'(t)+B$ usando el valor de B obtenido en (2), se tiene finalmente lo siguiente:

$$\Rightarrow\ r(t) = e^{-\frac{c}{2}t}\left[C_1 e^{\left(\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)t} + C_2 e^{-\left(\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)t}\right] + \frac{g\sin(\alpha)}{\omega^2\cos^2(\alpha)} \tag{4}$$

Como ya resolvimos la EDO, ahora debemos reemplazar las condiciones iniciales que conocemos para despejar las constantes de integración C_1 y C_2. Sabemos que la partícula parte en el extremo superior del canal, de tal forma que $r(0) = L$, entonces:

$$r(0) = L\ \Rightarrow\ C_1 + C_2 + \frac{g\sin(\alpha)}{\omega^2\cos^2(\alpha)} = L\ \Rightarrow\ C_1 + C_2 = L - \frac{g\sin(\alpha)}{\omega^2\cos^2(\alpha)} \tag{5}$$

Para la condición inicial de la velocidad necesitamos $\dot{r}(t)$, que se obtiene derivando la expresión (4) con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}\dot{r}(t) = C_1&\left(-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\omega^2\cos^2(\alpha)}\right) e^{\left(-\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)t} \\ &+C_2\left(-\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\omega^2\cos^2(\alpha)}\right) e^{\left(-\frac{c}{2}-\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)t}\end{aligned} \tag{6}$$

La partícula parte del reposo con respecto a la caja, con lo cual $\dot{r}(0) = 0$, y así:

$$\dot{r}(0) = 0\ \Rightarrow\ C_1\left(-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\omega^2\cos^2(\alpha)}\right) - C_2\left(\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\omega^2\cos^2(\alpha)}\right) = 0$$

$$\Rightarrow\ C_1 = \frac{\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\omega^2\cos^2(\alpha)}+\frac{c}{2}}{\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\omega^2\cos^2(\alpha)}-\frac{c}{2}}C_2\ \Rightarrow\ C_1 = \frac{\sqrt{c^2+4\omega^2\cos^2(\alpha)}+c}{\sqrt{c^2+4\omega^2\cos^2(\alpha)}-c}C_2$$

Reemplazando en la expresión (5) se tiene lo siguiente:

$$\frac{\sqrt{c^2+4\omega^2\cos^2(\alpha)}+c}{\sqrt{c^2+4\omega^2\cos^2(\alpha)}-c}C_2 + C_2 = L - \frac{g\sin(\alpha)}{\omega^2\cos^2(\alpha)}$$

$$\Rightarrow\ C_2 = \frac{\left(\sqrt{c^2+4\omega^2\cos^2(\alpha)}-c\right)\left(L-\frac{g\sin(\alpha)}{\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)}{2\sqrt{c^2+4\omega^2\cos^2(\alpha)}}\ \Rightarrow\ C_1 = \frac{\left(\sqrt{c^2+4\omega^2\cos^2(\alpha)}+c\right)\left(L-\frac{g\sin(\alpha)}{\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)}{2\sqrt{c^2+4\omega^2\cos^2(\alpha)}}$$

Con estos valores desarrollamos las constantes que acompañan a las exponenciales en la expresión para $\dot{r}(t)$:

$$C_1\left(-\frac{c}{2} + \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\omega^2\cos^2(\alpha)}\right) = \frac{\left(L-\frac{g\sin(\alpha)}{\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)}{4\sqrt{c^2+4\omega^2\cos^2(\alpha)}}\left(\sqrt{c^2+4\omega^2\cos^2(\alpha)}+c\right)\left(\sqrt{c^2+4\omega^2\cos^2(\alpha)}-c\right)$$

$$\Rightarrow\ C_1\left(-\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)=\frac{\left(L-\frac{g\sin(\alpha)}{\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)}{4\sqrt{c^2+4\omega^2\cos^2(\alpha)}}\left(c^2+4\omega^2\cos^2(\alpha)-c^2\right)$$

$$\Rightarrow\ C_1\left(-\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)=\frac{\omega^2\cos^2(\alpha)\left(L-\frac{g\sin(\alpha)}{\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)}{\sqrt{c^2+4\omega^2\cos^2(\alpha)}} \tag{7}$$

De forma similar para C_2:

$$C_2\left(-\frac{c}{2}-\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)=\frac{-\left(L-\frac{g\sin(\alpha)}{\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)}{4\sqrt{c^2+4\omega^2\cos^2(\alpha)}}\left(\sqrt{c^2+4\omega^2\cos^2(\alpha)}-c\right)\left(\sqrt{c^2+4\omega^2\cos^2(\alpha)}+c\right)$$

$$\Rightarrow\ C_2\left(-\frac{c}{2}-\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)=\frac{-\left(L-\frac{g\sin(\alpha)}{\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)}{4\sqrt{c^2+4\omega^2\cos^2(\alpha)}}\left(c^2+4\omega^2\cos^2(\alpha)-c^2\right)$$

$$\Rightarrow\ C_2\left(-\frac{c}{2}-\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)=-\frac{\omega^2\cos^2(\alpha)\left(L-\frac{g\sin(\alpha)}{\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)}{\sqrt{c^2+4\omega^2\cos^2(\alpha)}} \tag{8}$$

Entonces, al reemplazar las expresiones (7) y (8) en la expresión (6) para la velocidad radial $\dot{r}(t)$, se tiene finalmente lo siguiente:

$$\dot{r}(t)=\frac{\omega^2\cos^2(\alpha)\left(L-\frac{g\sin(\alpha)}{\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)}{\sqrt{c^2+4\omega^2\cos^2(\alpha)}}e^{\left(-\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)t}-\frac{\omega^2\cos^2(\alpha)\left(L-\frac{g\sin(\alpha)}{\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)}{\sqrt{c^2+4\omega^2\cos^2(\alpha)}}e^{\left(-\frac{c}{2}-\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)t}$$

$$\Rightarrow\ \dot{r}(t)=\frac{\omega^2\cos^2(\alpha)\left(L-\frac{g\sin(\alpha)}{\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)}{\sqrt{c^2+4\omega^2\cos^2(\alpha)}}e^{-\frac{c}{2}t}\left[e^{\left(\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)t}-e^{-\left(\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)t}\right]$$

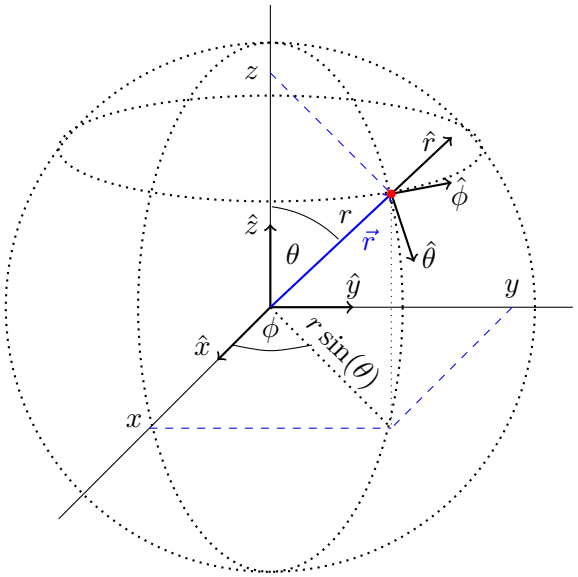
$$\Rightarrow\ \dot{r}(t)=\frac{2\omega^2\cos^2(\alpha)\left(L-\frac{g\sin(\alpha)}{\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)}{\sqrt{c^2+4\omega^2\cos^2(\alpha)}}e^{-\frac{c}{2}t}\left[\frac{e^{\left(\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)t}-e^{-\left(\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)t}}{2}\right]$$

$$\Rightarrow\ \boxed{\dot{r}(t)=\frac{2\omega^2\cos^2(\alpha)\left(L-\frac{g\sin(\alpha)}{\omega^2\cos^2(\alpha)}\right)}{\sqrt{c^2+4\omega^2\cos^2(\alpha)}}e^{-\frac{c}{2}t}\sinh\left(\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\omega^2\cos^2(\alpha)}t\right)}$$

P2.- <u>Péndulo esférico</u>:

a) Consideramos un péndulo de longitud ℓ y masa m cuyo movimiento no está restringido a un plano vertical (como el péndulo simple), sino que puede moverse libremente en el espacio con la única condición de que la cuerda se mantenga siempre tensa. Esta condición puede entenderse también como que la partícula puede moverse angularmente en cualquier dirección y sentido, siempre y cuando se mantenga a una distancia L constante con respecto al pivote. En este tipo de casos donde la partícula se mantiene a una distancia fija desde algún punto y puede moverse en cualquier dirección del espacio conviene abordarlos haciendo uso de las **coordenadas esféricas**.

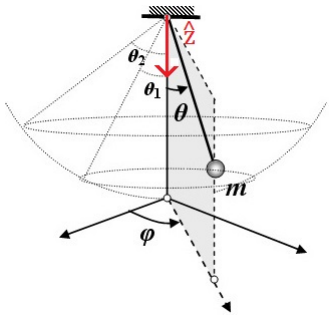
Las coordenadas esféricas corresponden a un sistema de coordenadas curvilíneas ortogonales que se utiliza para determinar la posición espacial de un punto mediante una distancia r (distancia radial) y dos ángulos θ (polar) y ϕ (azimutal). La distancia radial r se mide directamente desde el origen hasta la partícula de interés, mientras que el ángulo polar θ se mide desde el eje vertical $\hat{z}$ hasta el radio que une el origen con la partícula, y el ángulo azimutal ϕ se mide desde el eje $\hat{x}$ hasta la proyección del radio recién mencionado. Todo se muestra en la siguiente figura:



Como queremos encontrar la ecuación de movimiento del péndulo debemos usar la 2da ley de Newton $\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a}$. El movimiento descrito por el péndulo esférico es perfecto para ser descrito en coordenadas esféricas, ya que la partícula asociada a este péndulo se mueve siempre sobre la superficie de una esfera imaginaria de radio $r = \ell$ constante, de tal forma que si usamos como origen el pivote del péndulo, entonces la posición de esta partícula en coordenadas esféricas es $\vec{r} = \ell\hat{r}$. Esto es una ventaja ya que las derivadas temporales de la posición radial son nulas, es decir, $\dot{r} = 0$ y $\ddot{r} = 0$, con lo cual la aceleración de la partícula es:

$$\vec{a} = \left(-\ell\dot{\phi}^2\sin^2(\theta) - \ell\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(\ell\ddot{\theta} - \ell\dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta)\right)\hat{\theta} + \left(\ell\ddot{\phi}\sin(\theta) + 2\ell\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta)\right)\hat{\phi} \qquad (9)$$

Ahora, si queremos usar el ángulo cenital θ como el ángulo de equilibrio del péndulo, necesitamos utilizar un sistema de referencia donde $\hat{z}$ esté apuntando hacia el suelo (ver figura en la página siguiente), de tal forma que la definición de θ sea consistente con la mostrada en el diagrama anterior.



Tomando en cuenta eso, el peso de la partícula es $mg\hat{z}$, mientras que la tensión es $-F_T\hat{r}$, la cual apunta desde la partícula hacia el pivote (origen), y por lo tanto va en la dirección radial negativa. Con esto, la fuerza neta que actúa sobre la partícula es:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = mg\hat{z} - F_T\hat{r}$$

Usando la relación $\hat{z} = \cos(\theta)\hat{r} - \sin(\theta)\hat{\theta}$ se tiene que:

$$\Rightarrow \ \vec{F}_{\text{neta}} = (mg\cos(\theta) - F_T)\hat{r} - mg\sin(\theta)\hat{\theta} \tag{10}$$

Entonces, aplicando la 2da ley de Newton $\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a}$ usando las expresiones (9) y (10), se tiene lo siguiente:

$$(mg\cos(\theta) - F_T)\hat{r} - mg\sin(\theta)\hat{\theta} = \left(-m\ell\dot{\phi}^2\sin^2(\theta) - m\ell\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(m\ell\ddot{\theta} - m\ell\dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta)\right)\hat{\theta}$$
$$+ \left(m\ell\ddot{\phi}\sin(\theta) + 2m\ell\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta)\right)\hat{\phi}$$

Tomando en cuenta que las componentes correspondientes a un mismo vector unitario a ambos lados de esta expresión deben ser iguales, se obtienen las siguientes ecuaciones escalares:

$$\boxed{\hat{r}} \ mg\cos(\theta) - F_T = -m\ell\dot{\phi}^2\sin^2(\theta) - m\ell\dot{\theta}^2$$

$$\boxed{\hat{\theta}} \ -mg\sin(\theta) = m\ell\ddot{\theta} - m\ell\dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta) \quad ; \quad \boxed{\hat{\phi}} \ 0 = m\ell\ddot{\phi}\sin(\theta) + 2m\ell\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta)$$

La primera expresión nos sirve para despejar la tensión:

$$F_T(\theta, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = mg\cos(\theta) + m\ell\dot{\phi}^2\sin^2(\theta) + m\ell\dot{\theta}^2 \tag{11}$$

Las otras dos expresiones nos permiten obtener la ecuación de movimiento para los ángulos θ y ϕ:

$$\boxed{\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta) + \frac{g}{\ell}\sin(\theta) = 0 \quad ; \quad \ddot{\phi} + \frac{2\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = 0}$$

b) Ahora se añade un motor que ejerce una fuerza $F_* = m\ell\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta)$ en la dirección $\hat{\phi}$. Esto es equivalente a añadir un término $F_*\hat{\phi}$ a la fuerza neta en la 2da ley de Newton, que es equivalente a agregar el término $m\ell\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta)$ al lado derecho de la ecuación escalar asociada a $\hat{\phi}$. Entonces:

$$m\ell\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta) = m\ell\ddot{\phi}\sin(\theta) + 2m\ell\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta) \ \Rightarrow \ \ddot{\phi}\sin(\theta) + \dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta) = 0$$

La tensión F_T está dada por la expresión (11) obtenida en la parte anterior, sin embargo, a pesar de que esta expresión depende de θ, también depende de las velocidades $\dot{\theta}$ y $\dot{\phi}$. Si queremos obtener esta tensión sólo en función del ángulo θ necesitamos encontrar estas velocidades en función del ángulo cenital, es decir, debemos encontrar explícitamente las funciones $\dot{\phi}(\theta)$ y $\dot{\theta}(\theta)$.
Para $\dot{\phi}(\theta)$ podemos notar que el lado izquierdo de la expresión $\ddot{\phi}\sin(\theta)+\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta)=0$ es una derivada de una multiplicación:

$$\ddot{\phi}\sin(\theta)+\dot{\phi}\dot{\theta}\cos(\theta)=0 \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}\Big(\dot{\phi}\sin(\theta)\Big)=0$$

Cuando la derivada total de una magnitud con respecto al tiempo es cero, dicha magnitud es constante, entonces:

$$\frac{d}{dt}\Big(\dot{\phi}\sin(\theta)\Big)=0 \;\Rightarrow\; \dot{\phi}\sin(\theta)=C$$

Asumiendo que el péndulo parte desde un ángulo cenital $\theta(0)=\theta_0$ con una velocidad tangencial[2] $\dot{\phi}(0)=\omega_0$, entonces:

$$\dot{\phi}(0)\sin(\theta(0))=C \;\Rightarrow\; C=\omega_0\sin(\theta_0) \;\Rightarrow\; \dot{\phi}\sin(\theta)=\omega_0\sin(\theta_0) \;\Rightarrow\; \dot{\phi}(\theta)=\frac{\omega_0\sin(\theta_0)}{\sin(\theta)} \tag{12}$$

Para encontrar $\dot{\theta}(\theta)$ usamos la ecuación de movimiento asociada a este ángulo y la relación $\ddot{\theta}=\dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}$ para la 2da derivada:

$$\ddot{\theta}-\dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta)+\frac{g}{\ell}\sin(\theta)=0 \;\Rightarrow\; \dot{\theta}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta}=-\frac{g}{\ell}\sin(\theta)+\frac{\omega_0^2\sin^2(\theta_0)\sin(\theta)\cos(\theta)}{\sin^2(\theta)}$$

$$\Rightarrow\; \int_{\dot{\theta}(\theta_0)}^{\dot{\theta}(\theta)}\dot{\theta}'d\dot{\theta}'=-\frac{g}{\ell}\int_{\theta_0}^{\theta}\sin(\theta')d\theta'+\omega_0^2\sin^2(\theta_0)\int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\cos(\theta')}{\sin(\theta')}d\theta'$$

Para la integral de la izquierda imponemos que inicialmente el péndulo sólo se mueve en $\hat{\phi}$, de tal forma que $\dot{\theta}(\theta_0)=0$. Por otro lado, para la segunda integral del lado derecho notamos que la función del denominador (es decir, $\cos(\theta')$) es la derivada de la función que está en el denominador (es decir, $\sin(\theta')$), y entonces la antiderivada asociada es igual a $\ln(|\sin(\theta')|)$, y así:

$$\Rightarrow\; \frac{1}{2}\dot{\theta}^2=-\frac{g}{\ell}\left[-\cos(\theta')\right]\Big|_{\theta_0}^{\theta}+\omega_0^2\sin^2(\theta_0)\left[\ln(|\sin(\theta')|)\right]\Big|_{\theta_0}^{\theta}$$

$$\Rightarrow\; \dot{\theta}^2(\theta)=\frac{2g}{\ell}\left[\cos(\theta)-\cos(\theta_0)\right]+2\omega_0^2\sin^2(\theta_0)\ln\left(\left|\frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta_0)}\right|\right) \tag{13}$$

Dado que la expresión para F_T involucra $\dot{\theta}^2$, no es necesario aplicar la raíz cuadrada. Entonces, al reemplazar las expresiones (12) y (13) en la expresión (11) para la tensión, se tiene finalmente que:

$$F_T(\theta)=mg\cos(\theta)+\frac{m\ell\omega_0^2\sin^2(\theta_0)\sin^2(\theta)}{\sin^2(\theta)}+m\ell\left[\frac{2g}{\ell}\left[\cos(\theta)-\cos(\theta_0)\right]+2\omega_0^2\sin^2(\theta_0)\ln\left(\left|\frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta_0)}\right|\right)\right]$$

$$\Rightarrow\; \boxed{F_T(\theta)=3mg\cos(\theta)+2m\ell\omega_0^2\sin^2(\theta_0)\ln\left(\left|\frac{\sin(\theta)}{\sin(\theta_0)}\right|\right)+m\ell\omega_0^2\sin^2(\theta_0)-2mg\cos(\theta_0)}$$

[2]Cambié esto con respecto al enunciado porque de otra forma tendríamos un péndulo plano.