

**FI2001-5** Mecánica.

**Profesor:** Marcel Clerc.

**Auxiliares:** Manuel Díaz, Roberto Gajardo.



## Auxiliar 7: Centro de masa

22 de abril de 2024

### P1.- Estabilidad de puntos de equilibrio:

- a) Considere primero un sistema en  $1D$  ya conocido y encuentre la estabilidad de sus puntos de equilibrio de tres formas distintas.

$$m\ddot{x} = -k_1x + k_3x^3 \quad (1)$$

(2)

Con  $k_1$  de dimensiones  $\left[\frac{\text{Newton}}{m}\right]$  y  $k_3 \left[\frac{\text{Newton}}{m^3}\right]$ .

- b) (Propuesto) Considere ahora el siguiente sistema físico acoplado y analice su estabilidad.

$$m\ddot{x} = -ax + cxy^2 \quad (3)$$

$$m\ddot{y} = -by + cx^2y \quad (4)$$

Con  $a, b$  de dimensiones  $\left[\frac{\text{Newton}}{m}\right]$  y  $c \left[\frac{\text{Newton}}{m^3}\right]$ . **Hint:** Utilice la matriz Jacobiana y/o la Hessiana para sus análisis. Utilice que  $\vec{F} = -\partial_x V \hat{x} - \partial_y V \hat{y}$ .

### P2.- Centro de masa de un cono de helado:

Considere un cono de helado simple, el cual puede modelarse como un cono de densidad de masa uniforme  $\rho_c$ , ángulo  $\gamma$  y altura  $H$ , al cual se le adhiere una semiesfera de densidad de masa  $\rho_s$  y radio  $R$ , tal como se muestra en la figura 1.

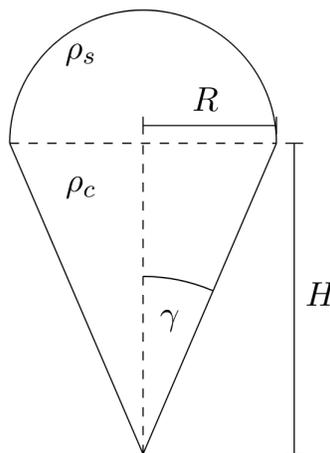


Figura 1: Esquema cono de helado.

Encuentre el centro de masa  $\vec{R}_{CM}$  del cono de helado.

**P3.- Disco de acreción de un agujero negro:**

Suponga que la densidad de masa del perfil radial de un disco de acreción de un agujero negro se puede modelar de la forma

$$\rho(r, z) = \rho_0 r e^{-\alpha r - \beta |z|} \quad (5)$$

donde  $r \in \{0, R\}$  y  $z \in \{-\infty, \infty\}$ , siendo  $R$  el radio del disco de acreción.



Figura 2: Ilustración de agujero negro.

- Calcule la masa total  $M$  y el centro de masa radial  $\vec{R}_{CM}$  en función de  $R$ .
- suponga que el radio del disco de acreción varía en el tiempo como

$$R(t) = R_c \left(1 - \frac{t}{T}\right) \quad (6)$$

Encuentre la velocidad del centro de masa  $\vec{V}_{CM}$  y comente su resultado. Interprete  $T$ .