FI2001-5 Mecánica.
Profesor: Marcel Clerc.
Auxiliares: Manuel Díaz, Roberto Gajardo.

Desarrollo Auxiliar 3: Dinámica y coordenadas intrínsecas.

03 de Abril del 2024

P1.- Lanzamiento parabólico con disipación:

a) Usamos un sistema de referencia con origen en a nivel del piso justo debajo del punto donde parte la partícula, y con un set de vectores unitarios cartesianos de forma tal que $\hat{x}$ e $\hat{y}$ están ordenados de forma paralela y perpendicular al piso, respectivamente, o en otras palabras, $\hat{x}$ está en la dirección horizontal, y $\hat{y}$ en la dirección vertical usual. Tomando en cuenta eso la aceleración de gravedad se puede representar como $\vec{g} = -g\hat{y}$, y ya que la partícula se moverá en el plano XY, la velocidad y aceleración se pueden representar en coordenadas cartesianas de la forma $\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}$ y $\vec{a} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y}$, respectivamente. Reemplazando todo esto en la 2da ley de Newton mostrada en el enunciado y desarrollando podemos encontrar la ecuación de movimiento para cada componente x e y de la posición de la partícula:

$$\begin{aligned} m\vec{a} = m\vec{g} - \lambda\vec{v} \;\Rightarrow\; & m(\ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y}) = -mg\hat{y} - \lambda(\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}) \\ \Rightarrow\; & m\ddot{x}\hat{x} + m\ddot{y}\hat{y} = -\lambda\dot{x}\hat{x} + (-mg - \lambda\dot{y})\hat{y} \\ \Rightarrow\; & m\ddot{x} = -\lambda\dot{x} \quad ; \quad m\ddot{y} = -mg - \lambda\dot{y} \\ \Rightarrow\; & \ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} = 0 \quad ; \quad \ddot{y} + \frac{\lambda}{m}\dot{y} + g = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Podemos notar que la primera es una EDO lineal homogénea de 2do orden, la cual se puede resolver usando el ansatz $x(t) = e^{\gamma t}$, con lo cual $\dot{x} = \gamma e^{\gamma t}$ y $\ddot{x} = \gamma^2 e^{\gamma t}$, y así:

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} = 0 \;\Rightarrow\; \gamma^2 e^{\gamma t} + \frac{\lambda}{m}\gamma e^{\gamma t} = 0 \;\Rightarrow\; \gamma\left(\gamma + \frac{\lambda}{m}\right) = 0 \;\Rightarrow\; \gamma = 0 \;\;;\;\; \gamma = -\frac{\lambda}{m}$$

Como γ puede ser dos valores distintos, la solución general para $x(t)$ es una combinación lineal de las soluciones anteriores, entonces:

$$\Rightarrow\; x(t) = Ae^{0t} + Be^{-\frac{\lambda}{m}t} \;\Rightarrow\; x(t) = A + Be^{-\frac{\lambda}{m}t}$$

Para encontrar las constantes A y B debemos usar las condiciones iniciales para la posición y velocidad en el eje horizontal. Según la elección de origen que hicimos se tiene que $x(0) = 0$, y en el enunciado se nos dice que la partícula es lanzada *horizontalmente* con una rapidez v_0, de tal manera que $\dot{x}(0) = v_0$. Aplicamos primero la condición para la velocidad:

$$x(t) = A + Be^{-\frac{\lambda}{m}t} \;\Rightarrow\; \dot{x}(t) = -\frac{B\lambda}{m}e^{-\frac{\lambda}{m}t}$$

$$\dot{x}(0) = v_0 \;\Rightarrow\; -\frac{B\lambda}{m} = v_0 \;\Rightarrow\; B = -\frac{mv_0}{\lambda} \;\Rightarrow\; x(t) = A - \frac{mv_0}{\lambda}e^{-\frac{\lambda}{m}t}$$

Ahora aplicamos la condición inicial para la posición, con lo cual encontraremos la componente $x(t)$ de la trayectoria de la partícula:

$$x(0) = 0 \;\Rightarrow\; A - \frac{mv_0}{\lambda} = 0 \;\Rightarrow\; A = \frac{mv_0}{\lambda} \;\Rightarrow\; x(t) = \frac{mv_0}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right)$$

Ahora, si volvemos a la expresión (1) podemos notar que la EDO para $y(t)$ es una EDO lineal de 2do orden, pero no homogénea. En este caso podemos hacer un cambio de variable que elimine la constante para obtener una EDO de las mismas características, pero homogénea. Sea $\dot{y} = \dot{y}' - \frac{mg}{\lambda}$, con lo cual $\ddot{y} = \ddot{y}'$, y entonces:

$$\ddot{y} + \frac{\lambda}{m}\dot{y} + g = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{y}' + \frac{\lambda}{m}\left(\dot{y}' - \frac{mg}{\lambda}\right) + g = 0$$
$$\Rightarrow\; \ddot{y}' + \frac{\lambda}{m}\dot{y}' - g + g = 0 \;\Rightarrow\; \ddot{y}' + \frac{\lambda}{m}\dot{y}' = 0$$

Esta es la misma EDO que resolvimos anteriormente, entonces:

$$\Rightarrow\; y'(t) = C + De^{-\frac{\lambda}{m}t}$$

Derivamos para encontrar $\dot{y}'$ y deshacer el cambio de variable para obtener $\dot{y}$:

$$\dot{y}'(t) = -\frac{D\lambda}{m}e^{-\frac{\lambda}{m}t} \;\Rightarrow\; \dot{y}(t) = -\frac{D\lambda}{m}e^{-\frac{\lambda}{m}t} - \frac{mg}{\lambda}$$

Podemos obtener D usando la condición inicial para la velocidad en el eje vertical. Dado que el lanzamiento es puramente horizontal se tiene que $\dot{y}(0) = 0$, entonces:

$$\dot{y}(0) = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{D\lambda}{m} - \frac{mg}{\lambda} = 0 \;\Rightarrow\; D = -\frac{m^2 g}{\lambda^2} \;\Rightarrow\; \dot{y}(t) = \frac{mg}{\lambda}e^{-\frac{\lambda}{m}t} - \frac{mg}{\lambda}$$

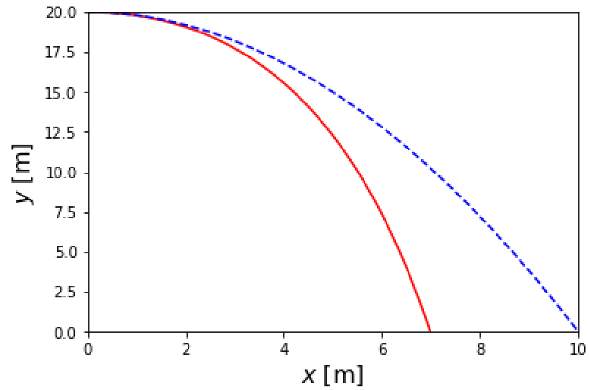
Ahora, para obtener $y(t)$ podemos integrar esta última expresión con respecto al tiempo usando la condición de que la altura inicial es $y(0) = H$, entonces:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{mg}{\lambda}e^{-\frac{\lambda}{m}t} - \frac{mg}{\lambda} \;\Rightarrow\; \int_0^t \frac{dy}{dt'}dt' = \frac{mg}{\lambda}\int_0^t e^{-\frac{\lambda}{m}t'}dt' - \frac{mg}{\lambda}\int_0^t dt'$$
$$\Rightarrow\; y(t) - y(0) = \frac{mg}{\lambda}\left(-\frac{m}{\lambda}e^{-\frac{\lambda}{m}t'}\right)\Bigg|_0^t - \frac{mg}{\lambda}(t-0)$$
$$\Rightarrow\; y(t) - H = \frac{m^2 g}{\lambda^2}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right) - \frac{mg}{\lambda}t \;\Rightarrow\; y(t) = \frac{m^2 g}{\lambda^2}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right) - \frac{mg}{\lambda}t + H$$

Entonces, usando esta expresión y la expresión para $x(t)$ encontrada anteriormente, la trayectoria de la partícula está modelada por el vector posición $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$, entonces:

$$\Rightarrow\; \boxed{\vec{r}(t) = \frac{mv_0}{\lambda}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right)\hat{x} + \left(\frac{m^2 g}{\lambda^2}\left(1 - e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right) - \frac{mg}{\lambda}t + H\right)\hat{y}}$$

En la siguiente página se muestra la trayectoria (en rojo) para el caso con $m = 0{,}1$ kg, $v_0 = 5\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $\lambda = 0{,}05\ \frac{\text{kg}}{\text{s}}$, $g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y $H = 20$ m, donde se compara con el caso sin roce (en azul). Inicialmente la trayectoria no difiere mucho del caso sin roce, sin embargo, a medida que la partícula avanza va perdiendo energía, y por lo tanto su velocidad disminuye drásticamente en ambos ejes, haciendo que la trayectoria deje de ser una parábola perfecta. Ahora, ya que el roce del aire pierde intensidad si el coeficiente de disipación es muy pequeño o la masa de la partícula es muy grande, en el límite $\lambda \to 0$ o $m \to \infty$ la trayectoria $\vec{r}(t)$ debe converger a la expresión para un movimiento parabólico.



b) Para obtener el radio de curvatura R se usa la siguiente expresión que involucra la velocidad $\vec{v}$ y la aceleración $\vec{a}$ de la partícula:

$$R = \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|} \tag{2}$$

La velocidad $\vec{v}(t)$ se puede obtener derivando el vector posición $\vec{r}$, entonces:

$$\Rightarrow \ \vec{v}(t) = v_0 e^{-\frac{\lambda}{m}t}\hat{x} + \frac{mg}{\lambda}\left(e^{-\frac{\lambda}{m}t} - 1\right)\hat{y} \tag{3}$$

De forma similar podemos obtener la aceleración $\vec{a}(t)$ al derivar el vector velocidad $\vec{v}$:

$$\Rightarrow \ \vec{a}(t) = -\frac{v_0\lambda}{m} e^{-\frac{\lambda}{m}t}\hat{x} - g e^{-\frac{\lambda}{m}t}\hat{y}$$

Calculamos el producto cruz $\vec{v} \times \vec{a}$ usando las relaciones con vectores cartesianos[1]:

$$\vec{v} \times \vec{a} = (\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}) \times (\ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y}) = \dot{x}\ddot{y}(\hat{x} \times \hat{y}) + \dot{y}\ddot{x}(\hat{y} \times \hat{x}) \ \Rightarrow \ \vec{v} \times \vec{a} = (\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x})\hat{z}$$

$$\Rightarrow \ \vec{v} \times \vec{a} = \left[-v_0 g e^{-\frac{2\lambda}{m}t} + \frac{v_0\lambda}{m}\frac{mg}{\lambda} e^{-\frac{\lambda}{m}t}\left(e^{-\frac{\lambda}{m}t} - 1\right)\right]\hat{z}$$

$$\Rightarrow \ \vec{v} \times \vec{a} = \left[-v_0 g e^{-\frac{2\lambda}{m}t} + v_0 g e^{-\frac{2\lambda}{m}t} - v_0 g e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right]\hat{z} \ \Rightarrow \ \vec{v} \times \vec{a} = -v_0 g e^{-\frac{\lambda}{m}t}\hat{z} \tag{4}$$

Calculamos $|\vec{v}|^3$ y $|\vec{v} \times \vec{a}|$ a partir de los resultados obtenidos en (3) y (4), respectivamente:

$$|\vec{v}|^3 = \left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{\frac{3}{2}} \ \Rightarrow \ |\vec{v}|^3 = \left[v_0^2 e^{-\frac{2\lambda}{m}t} + \frac{m^2g^2}{\lambda^2}\left(e^{-\frac{\lambda}{m}t} - 1\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

$$|\vec{v} \times \vec{a}| = \sqrt{\left(-v_0 g e^{-\frac{\lambda}{m}t}\right)^2} \ \Rightarrow \ |\vec{v} \times \vec{a}| = v_0 g e^{-\frac{\lambda}{m}t}$$

Entonces, reemplazando estas expresiones en la expresión (2) para el radio de curvatura, se tiene lo siguiente:

$$R = \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|} \ \Rightarrow \ \boxed{R = \frac{\left[v_0^2 e^{-\frac{2\lambda}{m}t} + \frac{m^2g^2}{\lambda^2}\left(e^{-\frac{\lambda}{m}t} - 1\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{v_0 g e^{-\frac{\lambda}{m}t}}}$$

[1] $\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = \vec{0}$; $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$; $\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$; $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$

P2.- Partícula magnética en caída libre:

a) Para encontrar las ecuaciones de movimiento debemos aplicar la segunda ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ en algún sistema de referencia con coordenadas convenientes según la geometría del problema. Dado que en este sistema no existe ninguna simetría (ni cilíndrica ni esférica) lo mejor es partir abordando el problema usando un sistema de referencia con coordenadas y vectores unitarios cartesianos. Con eso en mente, en un instante de tiempo arbitrario las cantidades cinemáticas de la partícula pueden representarse de la siguiente manera:

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} \quad ; \quad \vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z} \quad ; \quad \vec{a} = \ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}$$

Con la tercera expresión podemos escribir el lado derecho de la segunda ley de Newton, sólo nos falta revisar el lado izquierdo, que corresponde a la fuerza neta que siente la partícula. En este caso las fuerzas que actúan sobre la partícula son el peso $\vec{F}_g$ y la fuerza electromagnética $\vec{F}_e$. Usando un sistema de referencia tal que $\hat{x}$ y $\hat{y}$ son paralelos al suelo, mientras que $\hat{z}$ es perpendicular a este, se tiene que $\vec{F}_g = -mg\hat{z}$. Por otro lado la fuerza electromagnética puede calcularse usando la velocidad mostrada anteriormente, entonces:

$$\vec{F}_e = q\left(\vec{v} \times \vec{B}\right) = q\left(\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}\right) \times \left(B\hat{x}\right) \;\Rightarrow\; \vec{F}_e = qB\left(\dot{z}\hat{y} - \dot{y}\hat{z}\right)$$

Entonces, aplicando la segunda ley de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$ se tiene que:

$$\vec{F} = m\vec{a} \;\Rightarrow\; \vec{F}_g + \vec{F}_e = m\left(\ddot{x}\hat{x} + \ddot{y}\hat{y} + \ddot{z}\hat{z}\right)$$
$$\Rightarrow\; m\ddot{x}\hat{x} + m\ddot{y}\hat{y} + m\ddot{z}\hat{z} = -mg\hat{z} + qB\dot{z}\hat{y} - qB\dot{y}\hat{z}$$

Separamos los términos asociados a un mismo vector unitario, y entonces:

$$\Rightarrow\; m\ddot{x} = 0 \quad ; \quad m\ddot{y} = qB\dot{z} \quad ; \quad m\ddot{z} = -qB\dot{y} - mg$$

Despejando la aceleración asociada a cada componente encontramos las ecuaciones de movimiento, entonces:

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} = 0 \quad ; \quad \ddot{y} = \frac{qB}{m}\dot{z} \quad ; \quad \ddot{z} = -\frac{qB}{m}\dot{y} - g} \tag{5}$$

b) Para caracterizar la trayectoria de la partícula necesitamos encontrar las funciones $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ que cuantifican la posición de la partícula a lo largo del tiempo, las cuales podemos obtener mediante integración de las ecuaciones de movimiento encontradas anteriormente. Primero veamos cuáles son nuestras condiciones iniciales; como la partícula se suelta desde cierta altura entonces estamos en el caso de caída libre, lo cual nos dice que la velocidad inicial de la partícula es cero, es decir, $\dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$. Por otro lado, podemos ubicar nuestro origen en el punto de la superficie terrestre que está justo por debajo de la posición inicial de la partícula, de tal forma que $x(0) = y(0) = 0$ y $z(0) = z_0$. Como ya tenemos claras nuestras condiciones iniciales tratemos de integrar las ecuaciones de movimiento mostradas en (5). Partiendo por la ecuación asociada a la coordenada x:

$$\ddot{x} = 0 \;\Rightarrow\; \int_0^t \frac{d\dot{x}}{dt}dt = 0 \;\Rightarrow\; \dot{x}(t) - \dot{x}(0) = 0 \;\Rightarrow\; \dot{x}(t) = 0$$
$$\Rightarrow\; \int_0^t \frac{dx}{dt}dt = 0 \;\Rightarrow\; x(t) - x(0) = 0 \;\Rightarrow\; x(t) = 0$$

Con este resultado podemos entender que el movimiento de la partícula está contenido completamente en el plano YZ. Ahora, viendo las últimas dos expresiones mostradas en (5) notamos que no es directo integrar para obtener $y(t)$ y $z(t)$, ya que sus ecuaciones de movimiento están *acopladas*, es decir, la aceleración en una dirección depende de las cantidades cinemáticas de la otra dirección, y viceversa. Para desacoplar estas ecuaciones podemos derivar la expresión para $\ddot{y}$ con respecto al tiempo, entonces:

$$\ddot{y} = \frac{qB}{m}\dot{z} \;\Rightarrow\; \dddot{y} = \frac{qB}{m}\ddot{z}$$

Reemplazando la expresión que tenemos para $\ddot{z}$:

$$\Rightarrow\; \dddot{y} = \frac{qB}{m}\left(-\frac{qB}{m}\dot{y} - g\right) \;\Rightarrow\; \dddot{y} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 \dot{y} - \frac{qBg}{m}$$

Esta es una EDO lineal no homogénea de 2do orden, y para resolverla centramos nuestra atención en dos cosas. Primero, el lado derecho de la igualdad es proporcional a $\dot{y}$, mientras que el lado izquierdo es proporcional a la segunda derivada de este término (es decir, $\dddot{y}$). Esto nos debería recordar la ecuación de movimiento del oscilador armónico[2], entonces el primer cambio de variable que nos conviene hacer es $\dot{y} = v$, con lo cual $\dddot{y} = \ddot{v}$, y así la ecuación anterior cambia a:

$$\Rightarrow\; \ddot{v} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v - \frac{qBg}{m} \;\Rightarrow\; \ddot{v} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v = -\frac{qBg}{m}$$

Ahora, al igual que en la pregunta anterior, podemos hacer un cambio de variable que elimine la constante del lado derecho para obtener una EDO de las mismas características, pero homogénea. Sea $v = v' - \frac{qBg}{m}\left(\frac{m}{qB}\right)^2$, con lo cual $\ddot{v} = \ddot{v}'$, y entonces:

$$\ddot{v} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v = -\frac{qBg}{m} \;\Rightarrow\; \ddot{v}' + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v' - \frac{qBg}{m}\left(\frac{m}{qB}\right)^2\left(\frac{qB}{m}\right)^2 = -\frac{qBg}{m}$$

$$\Rightarrow\; \ddot{v}' + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v' - \frac{qBg}{m} = -\frac{qBg}{m} \;\Rightarrow\; \ddot{v}' + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 v' = 0$$

Esta es la ecuación de un oscilador armónico con frecuencia natural $\omega = \frac{qB}{m}$, entonces la solución para $v'(t)$ es:

$$\Rightarrow\; v'(t) = A_1 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + A_2 \sin\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

Deshaciendo los cambios de variable se tiene lo siguiente:

$$v = v' - \frac{mg}{qB} \;\Rightarrow\; v(t) = A_1 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + A_2 \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) - \frac{mg}{qB}$$

$$\dot{y} = v \;\Rightarrow\; \dot{y}(t) = A_1 \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + A_2 \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) - \frac{mg}{qB}$$

[2] En un oscilador armónico de variable $\theta(t)$ la ecuación de movimiento es $\ddot{\theta} + \omega^2\theta = 0$, con solución $\theta(t) = A_1\cos(\omega t) + A_2\sin(\omega t)$, donde A_1 y A_2 son constantes de integración.

Ahora, para obtener $\dot{z}$ podemos usar la segunda expresión de (5), para lo cual necesitamos calcular $\ddot{y}$, entonces:

$$\Rightarrow\ \ddot{y}(t) = -\frac{qBA_1}{m}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{qBA_2}{m}\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\ \Rightarrow\ \frac{qB}{m}\dot{z} = -\frac{qBA_1}{m}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + \frac{qBA_2}{m}\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

$$\Rightarrow\ \dot{z}(t) = -A_1\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) + A_2\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)$$

Ahora aplicamos las condiciones iniciales para encontrar las constantes de integración A_1 y A_2. Recordamos que la condición de caída libre implica que $\dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$, entonces:

$$\dot{y}(0) = 0\ \Rightarrow\ A_1 - \frac{mg}{qB} = 0\ \Rightarrow\ A_1 = \frac{mg}{qB}\quad ;\quad \dot{z}(0) = 0\ \Rightarrow\ A_2 = 0$$

Con esto finalmente obtenemos las componentes restantes de la velocidad de la partícula:

$$\Rightarrow\ \dot{y}(t) = \frac{mg}{qB}\left(\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - 1\right)\quad ;\quad \dot{z}(t) = -\frac{mg}{qB}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \tag{6}$$

Si queremos caracterizar la trayectoria debemos integrar nuevamente con respecto al tiempo para encontrar la posición en estos ejes. Para la coordenada $y(t)$, usando la condición inicial $y(0) = 0$ se tiene que:

$$\dot{y}(t) = \frac{mg}{qB}\left(\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - 1\right)\ \Rightarrow\ \int_0^t \frac{dy}{dt'}dt' = \frac{mg}{qB}\int_0^t \cos\left(\frac{qB}{m}t'\right)dt' - \frac{mg}{qB}\int_0^t dt'$$

$$\Rightarrow\ y(t) - y(0) = \frac{mg}{qB}\frac{m}{qB}\left[\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) - \sin(0)\right] - \frac{mg}{qB}(t-0)\ \Rightarrow\ y(t) = \frac{m^2g}{q^2B^2}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) - \frac{mg}{qB}t$$

Para la coordenada $z(t)$ usamos la condición inicial $z(0) = z_0$, entonces:

$$\dot{z}(t) = -\frac{mg}{qB}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)\ \Rightarrow\ \int_0^t \frac{dz}{dt'}dt' = -\frac{mg}{qB}\int_0^t \sin\left(\frac{qB}{m}t'\right)dt'$$

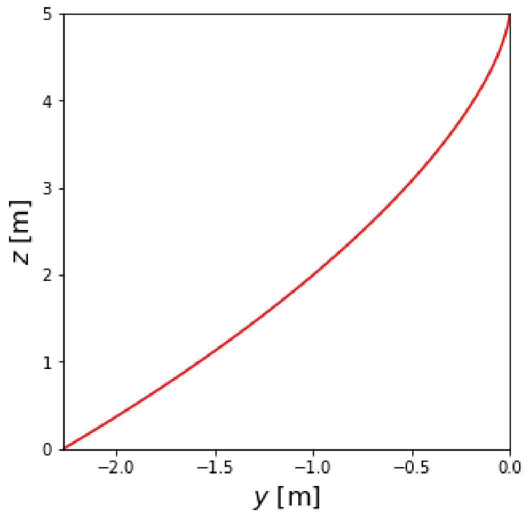
$$\Rightarrow\ z(t) - z(0) = -\frac{mg}{qB}\left(-\frac{m}{qB}\right)\left[\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - \cos(0)\right]\ \Rightarrow\ z(t) = z_0 + \frac{m^2g}{q^2B^2}\left(\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - 1\right)$$

Entonces, al juntar las componentes $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$, la trayectoria de la partícula está modelada por el vector posición $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$, entonces:

$$\Rightarrow\ \boxed{\vec{r}(t) = \left[\frac{m^2g}{q^2B^2}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) - \frac{mg}{qB}t\right]\hat{y} + \left[z_0 + \frac{m^2g}{q^2B^2}\left(\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - 1\right)\right]\hat{z}}$$

En la siguiente página se muestra la trayectoria para el caso con $m = 0{,}1$ kg, $z_0 = 5$ m, $q = 0{,}4$ C, $B = 0{,}3$ T y $g = 10\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Es posible notar que ocurre una desviación hacia la izquierda con respecto al movimiento típico de caída libre, además de una desaceleración vertical, lo cual es consecuencia del acoplamiento del movimiento en cada componente debido a la fuerza electromagnética. En el caso en que q o B sean muy grandes, la desviación será cada vez mayor, hasta un punto en donde es posible oponerse a la gravedad y mantener a la partícula en un movimiento oscilatorio en el aire. En el caso $q \to 0$ ó $B \to 0$ se recupera la expresión asociada a una caída libre[3].

[3] Para demostrar estos límites puede ser útil la regla de L'Hôpital.



c) Por definición el vector tangente $\hat{t}$ apunta en la dirección y sentido en que apunta el cambio del vector posición $\vec{r}$ cuando variamos infinitesimalmente el tiempo. Como es un vector unitario, la expresión para construir $\hat{t}$ es:

$$\hat{t} = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^{-1}\frac{d\vec{r}}{dt} \tag{7}$$

Sabemos que por definición $\frac{d\vec{r}}{dt}$ es el vector velocidad $\vec{v} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y} + \dot{z}\hat{z}$, entonces usando los resultados mostrados en (6) se tiene que:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{mg}{qB}\left(\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - 1\right)\hat{y} - \frac{mg}{qB}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)\hat{z} \tag{8}$$

Ahora calculamos el módulo de este vector (que es equivalente a $|\vec{v}|$):

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{mg}{qB}\right)^2\left(\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - 1\right)^2 + \left(\frac{mg}{qB}\right)^2\sin^2\left(\frac{qB}{m}t\right)}$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{mg}{qB}\sqrt{\cos^2\left(\frac{qB}{m}t\right) - 2\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + 1 + \sin^2\left(\frac{qB}{m}t\right)} \Rightarrow \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{mg}{qB}\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)} \tag{9}$$

Entonces, aplicando la definición (7) se tiene que:

$$\Rightarrow \hat{t} = \boxed{\frac{\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - 1}{\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)}}\hat{y} - \frac{\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)}{\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)}}\hat{z}}$$

Para el radio de curvatura R usamos la expresión (2). El vector aceleración $\vec{a}$ se puede obtener calculando $\ddot{y}$ y $\ddot{z}$ a partir de las ecuaciones de movimiento obtenidas en (5), entonces:

$$\ddot{y} = -g\sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \quad ; \quad \ddot{z} = -g\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = -g\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)\hat{y} - g\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\hat{z}$$

Ahora realizamos el producto cruz entre este vector y el vector velocidad mostrado en (8) y calculamos su magnitud, y entonces:

$$\vec{v} \times \vec{a} = \left[\frac{mg}{qB}\left(\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - 1\right)\hat{y} - \frac{mg}{qB}\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)\hat{z}\right] \times \left[-g\sin\left(\frac{qB}{m}t\right)\hat{y} - g\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\hat{z}\right]$$

$$\Rightarrow \ \vec{v} \times \vec{a} = -\frac{mg^2}{qB}\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\left(\cos\left(\frac{qB}{m}t\right) - 1\right)(\hat{y} \times \hat{z}) + \frac{mg^2}{qB}\sin^2\left(\frac{qB}{m}t\right)(\hat{z} \times \hat{y})$$

$$\Rightarrow \ \vec{v} \times \vec{a} = -\frac{mg^2}{qB}\left[\cos^2\left(\frac{qB}{m}t\right) - \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) + \sin^2\left(\frac{qB}{m}t\right)\right]\hat{x}$$

$$\Rightarrow \ \vec{v} \times \vec{a} = -\frac{mg^2}{qB}\left(1 - \cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right)\hat{x} \ \Rightarrow \ |\vec{v} \times \vec{a}| = \frac{mg^2}{qB}\left(1 - \cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right) \tag{10}$$

Entonces, usando este resultado y el módulo de la velocidad $|\vec{v}|$ mostrado en (9) en la definición (2) de radio de curvatura, se tiene que:

$$R = \frac{\left(\frac{mg}{qB}\right)^3\left(2 - 2\cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{mg^2}{qB}\left(1 - \cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right)} = \frac{\sqrt{8}m^2g}{q^2B^2}\left[\frac{\left(1 - \cos\left(\frac{qB}{m}t\right)\right)^{\frac{3}{2}}}{1 - \cos\left(\frac{qB}{m}t\right)}\right]$$

$$\Rightarrow \ \boxed{R(t) = \frac{\sqrt{8}m^2g}{q^2B^2}\sqrt{1 - \cos\left(\frac{qB}{m}t\right)}}$$

Ahora se nos pide el valor de esta cantidad en el instante de tiempo t_f en el cual la partícula toca el suelo. Partimos obteniendo el valor de t_f imponiendo la condición de que $z(t_f) = 0$, entonces:

$$z(t_f) = 0 \ \Rightarrow \ z_0 + \frac{m^2g}{q^2B^2}\left(\cos\left(\frac{qB}{m}t_f\right) - 1\right) = 0$$

Podemos notar que no es necesario despejar directamente el tiempo t_f, ya que podemos despejar el factor $1 - \cos\left(\frac{qB}{m}t_f\right)$ y reemplazarlo en la raíz cuadrada de la expresión para R:

$$z_0 + \frac{m^2g}{q^2B^2}\left(\cos\left(\frac{qB}{m}t_f\right) - 1\right) = 0 \ \Rightarrow \ 1 - \cos\left(\frac{qB}{m}t_f\right) = \frac{z_0q^2B^2}{m^2g}$$

Entonces:

$$R(t_f) = \frac{\sqrt{8}m^2g}{q^2B^2}\sqrt{1 - \cos\left(\frac{qB}{m}t_f\right)} = \frac{\sqrt{8}m^2g}{q^2B^2}\sqrt{\frac{z_0q^2B^2}{m^2g}} \ \Rightarrow \ \boxed{R(t_f) = \sqrt{\frac{8m^2gz_0}{q^2B^2}}}$$