FI2001-5 Mecánica.
Profesor: Marcel Clerc.
Auxiliares: Manuel Díaz, Roberto Gajardo.

Auxiliar 4: Sistemas de coordenadas

8 de abril de 2024

P1.- Péndulo de Andronov:

Considere un anillo de masa m el cual se desplaza sin fricción sobre un aro vertical de radio R y masa despreciable, bajo la influencia de la gravedad. Si en aro gira con velocidad angular constante Ω como en la figura 2.

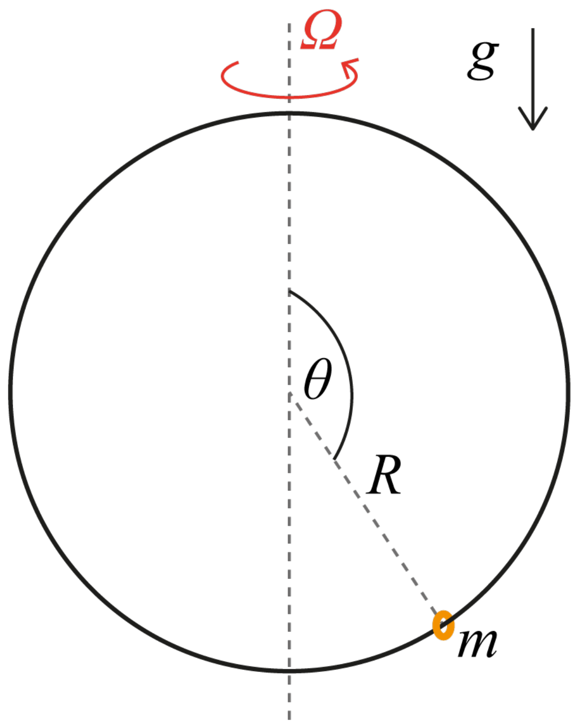

Figura 1: Péndulo de Andronov.

Deduzca la(s) ecuación(es) de movimiento que caracteriza este sistema en las coordenadas adecuadas y encuentre la(s) posición(es) de equilibrio de este sistema. Analice la estabilidad y el espacio de fase para distintos valores de Ω.

P2.- Coordenadas bipolares:

La interacción entre dos elementos es uno de los fenómenos más estudiados en la física, desde las partículas hasta sistemas planetarios. Un ejemplo de esto es la interacción eléctrica entre dos partículas de carga opuesta. La descripción del campo eléctrico producido por la interacción de estas partículas podría describirse de mejor manera si se cuenta con un sistema de coordenadas que cuente con dos puntos singulares donde se ubican las cargas y el campo no se puede definir. Este tipo de coordenadas, con dos puntos centrales o dos focos se llaman sistemas bifocales, y permiten describir de manera más adecuada los campos y/o trayectorias del sistema físico. Uno de estos sistemas son las coordenadas bipolares, útiles para interacciones entre cargas.

Considere dos focos A y B separados por una distancia $2a$, y un punto arbitrario P a una distancia D_1 y D_2 de los focos A y B respectivamente, como se ve en la figura 2. Se definen las coordenadas bipolares (σ, τ) mediante el ángulo interno APB y la relación $\tau = ln\left(\frac{D_1}{D_2}\right)$, que define las llamadas circunferencia de Apolonio.

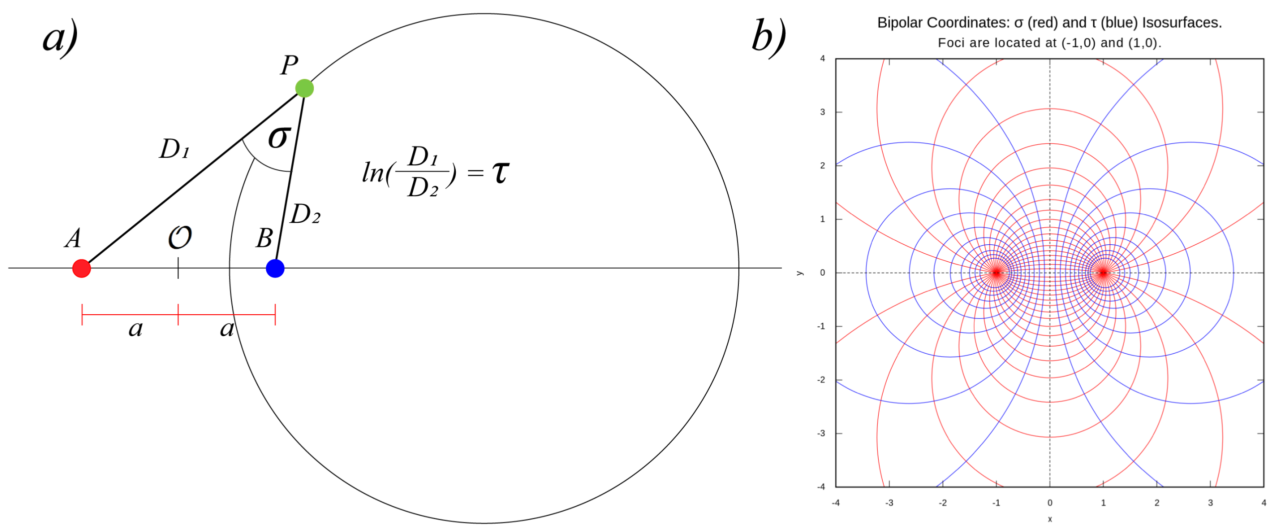

Figura 2: a) Esquema de circunferencia de Apolonio. b) Diagrama de coordenadas bipolares en espacio cartesiano.

Se puede deducir que las coordenadas (x, y) en función de (τ, σ) son

$$x = a\frac{\sinh(\tau)}{\cosh(\tau) - \cos(\sigma)} \tag{1}$$

$$y = a\frac{\sin(\sigma)}{\cosh(\tau) - \cos(\sigma)} \tag{2}$$

Determine los vectores de la base de coordenadas $\{\vec{\tau}, \vec{\sigma}\}$, represéntelos gráficamente y determine la posición, la velocidad, y la aceleración de una partícula de masa m en este sistema de coordenadas.