

FI2001-5 Mecánica.

Profesor: Marcel Clerc.

Auxiliares: Manuel Díaz, Roberto Gajardo.



Desarrollo Auxiliar 1: Dinámica de sistemas mecánicos simples.

18 de Marzo del 2024

P1.- Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (MRUA):

- a) El movimiento rectilíneo uniformemente acelerado consiste en una partícula moviéndose en un camino unidimensional con aceleración constante a . Con esto en mente, si la posición de esta partícula se modela a partir de la función posición $x(t)$, la ecuación de movimiento del MRUA es:

$$\ddot{x} = a$$

Podemos integrar directamente esta ecuación diferencial. Primero que todo recordemos que la aceleración es, por definición, la derivada temporal de la velocidad, de tal forma que:

$$\Rightarrow \frac{d\dot{x}}{dt} = a$$

Integramos a ambos lados de la ecuación con respecto al tiempo desde un instante inicial $t = 0$ hasta un instante de tiempo arbitrario t , entonces:

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{d\dot{x}}{dt'} dt' = \int_0^t a dt'$$

La integral del lado derecho es directa, mientras que la integral del lado izquierdo se resuelve automáticamente en virtud del teorema fundamental del cálculo¹, entonces:

$$\Rightarrow \dot{x}(t) - \dot{x}(0) = a(t - 0) \Rightarrow \dot{x}(t) - v_0 = at \Rightarrow \dot{x}(t) = v_0 + at \quad (1)$$

Podemos integrar nuevamente este resultado tomando en cuenta que la velocidad es la derivada temporal de la posición, entonces:

$$\dot{x}(t) = v_0 + at \Rightarrow \frac{dx}{dt} = v_0 + at \Rightarrow \int_0^t \frac{dx}{dt'} dt' = \int_0^t v_0 dt' + \int_0^t at' dt'$$

Nuevamente el lado izquierdo se desarrolla con teorema fundamental del cálculo, mientras que las integrales del lado derecho son relativamente sencillas, entonces:

$$x(t) - x(0) = v_0(t - 0) + \frac{1}{2}a(t^2 - 0^2) \Rightarrow x(t) - x_0 = v_0t + \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2} \quad (2)$$

- b) Queremos encontrar una relación $\dot{x}(x)$, es decir, queremos encontrar una relación entre la velocidad y la posición del MRUA, pero que a la vez no dependa del tiempo (para poder bosquejar la curva

¹https://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_fundamental_del_c%C3%A1lculo#Corolario

$\dot{x}(x)$, que es una curva arbitraria del espacio de fase). Para ello podemos partir de la ecuación de movimiento y usar la siguiente relación diferencial, la cual es válida en virtud de la regla de la cadena:

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \frac{dx}{dt} \Rightarrow \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dx} \dot{x}$$

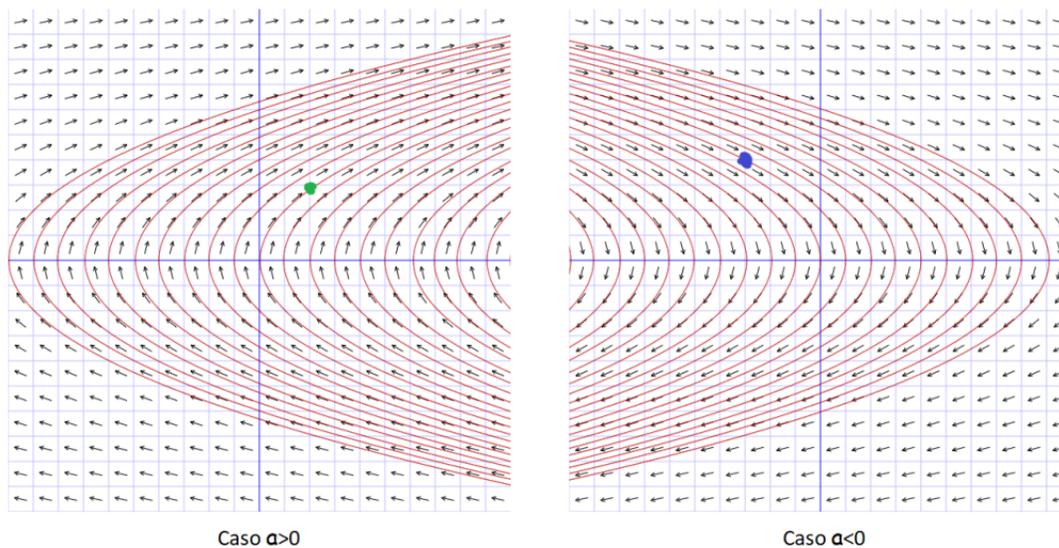
Reemplazando en la ecuación de movimiento, e integrando con las condiciones iniciales entregadas, se tiene lo siguiente:

$$\ddot{x} = a \Rightarrow \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = a \Rightarrow \int_{x_0}^x \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx'} dx' = \int_{x_0}^x a dx'$$

Al reparametrizar la integral del lado izquierdo usamos $\frac{d\dot{x}}{dx'} dx' = d\dot{x}'$, de tal manera que x_0 pasa a ser $\dot{x}'(x_0) = v_0$, y x pasa a ser $\dot{x}'(x) = \dot{x}$, entonces:

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{\dot{x}} \dot{x}' d\dot{x}' = a(x - x_0) \Rightarrow \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = a(x - x_0) \Rightarrow \boxed{\dot{x}(x) = \pm \sqrt{v_0^2 + 2a(x - x_0)}}$$

Con esto es sencillo notar que las curvas $\dot{x}(x)$ del espacio de fase son parábolas horizontales, cuyo vértice apunta hacia la izquierda o derecha si la aceleración a es positiva o negativa, respectivamente². Tomando esto en consideración, el espacio de fase se ve parecido a esto:

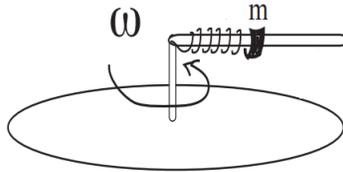


Podemos notar que el sentido de las curvas es consistente con las características físicas del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Por ejemplo, si partimos nuestro movimiento en $x_0 = 2$ m con una velocidad $v_0 = 3 \frac{m}{s}$ en un caso con aceleración positiva (punto verde) entonces lo natural es que tanto la posición como la velocidad aumenten, lo que se refleja en el sentido que evoluciona la curva asociada en el espacio de fase. De la misma forma, si en el caso con aceleración negativa partimos en una zona con velocidad positiva (punto azul) el objeto logrará avanzar cierta distancia, pero en algún instante la aceleración negativa hace que se detenga (cuando corta al eje horizontal) y luego adquiere una velocidad negativa, alejándose hacia el infinito negativo en el espacio.

²Para comprender esto podemos despejar \dot{x} y notar que cumple la ecuación de una parábola vertical en el plano $\dot{x} - x$.

P2.- Resorte no lineal girando:

- a) Se tiene un resorte no lineal sobre un disco giratorio, el cual se inserta en una barra de tal manera que siempre se mantenga como uno de los radios del disco, tal como se muestra en la siguiente figura:



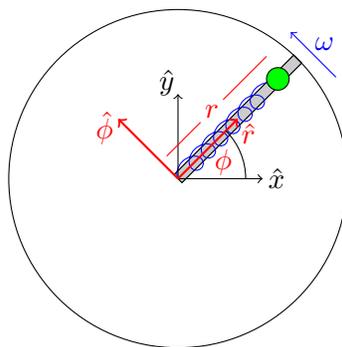
Queremos encontrar la ecuación de movimiento de la partícula de este sistema, que corresponde a una EDO de 2do orden en el tiempo para cada una de las coordenadas que usemos para describir la posición de la partícula. Por ejemplo, si usamos las coordenadas polares $\{r, \phi\}$, donde r es la distancia radial medida desde el centro del disco y ϕ el ángulo de rotación de la partícula, las ecuaciones de movimiento corresponden a encontrar explícitamente las siguientes relaciones para \ddot{r} y $\ddot{\phi}$:

$$\ddot{r} = \ddot{r}(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}, t) \quad ; \quad \ddot{\phi} = \ddot{\phi}(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi}, t)$$

En este caso particular sólo se nos pregunta por la primera expresión (es decir, la ecuación de movimiento para la coordenada radial r). Ahora, ya que la ecuación de movimiento está relacionada con la aceleración de cada coordenada, estas ecuaciones se obtienen planteando la 2da ley de Newton de nuestra partícula. La 2da ley de Newton establece que la fuerza neta³ \vec{F}_{neta} que se ejerce sobre una partícula es igual a la masa m de la partícula multiplicada por su aceleración \vec{a} , es decir:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a}$$

Los vectores \vec{F}_{neta} y \vec{a} deben parametrizarse en el sistema de referencia y sistema de coordenadas más conveniente según el tipo de movimiento que describa nuestra partícula. Como en este caso la partícula describe un movimiento rotatorio en un plano, lo más conveniente es usar coordenadas polares con origen en el punto por donde pasa el eje de rotación. Tomando en cuenta eso, si miramos nuestro sistema desde arriba el sistema de coordenadas queda de la siguiente manera:



El vector unitario \hat{r} siempre apunta desde el origen hacia la partícula, y por lo tanto su dirección y sentido no están fijos en el espacio, de manera similar, la coordenada radial r se define como la

³En esta fuerza neta sólo deben considerarse fuerzas “reales”, es decir, fuerzas que provienen directamente de la interacción de la partícula con otras partículas o partes del sistema. La fuerza centrípeta **NO** se incluye en esta categoría; su efecto ya está cuantificado en la aceleración \vec{a} .

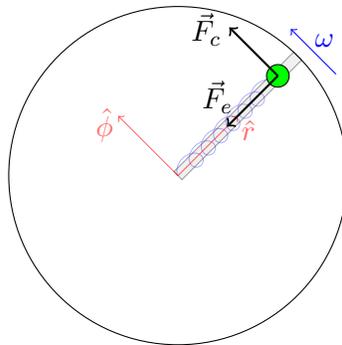
distancia desde el origen hacia la partícula. Por otro lado, la coordenada angular ϕ se define como el ángulo entre el vector unitario \hat{x} (asociado a un sistema de referencia cartesiano fijo) y el vector \hat{r} , mientras que el vector unitario $\hat{\phi}$ es el vector en el plano de la página que es perpendicular a \hat{r} y que apunta en el sentido en el cual ϕ aumenta (antihorario en la figura de la página anterior). Usando estas coordenadas, la aceleración de una partícula en el caso más general posible está dado por la siguiente expresión:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) \hat{r} + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) \hat{\phi}$$

Cuando aplicamos esta expresión en casos particulares, esta puede simplificarse reemplazando algunos datos del problema. Por ejemplo, ya que la plataforma rota con velocidad angular constante ω , y dado que la partícula rota junto con la plataforma, esta es la velocidad con la cual el ángulo ϕ va cambiando, y por lo tanto $\dot{\phi} = \omega$, y dado que esta cantidad es constante, se tiene que $\ddot{\phi} = 0$. Reemplazando esto en la aceleración se tiene que:

$$\Rightarrow \vec{a} = (\ddot{r} - r\omega^2) \hat{r} + 2\omega\dot{r}\hat{\phi} \quad (3)$$

Ahora, dado que la fuerza \vec{F}_{neta} debe expresarse en este sistema de coordenadas, debemos realizar el diagrama de cuerpo libre de la partícula descomponiendo nuestras distintas fuerzas en las direcciones definidas por los vectores \hat{r} y $\hat{\phi}$. Físicamente hablando podemos identificar dos fuerzas: la fuerza elástica \vec{F}_e generada por el resorte, la cual apunta desde la partícula hacia el eje de rotación⁴, y una fuerza de contacto \vec{F}_c que la barra ejerce sobre la partícula de tal manera que esta se mueva junto con la plataforma. Ambas fuerzas se muestran gráficamente en la siguiente figura:



En este caso particular las fuerzas quedan alineadas con las direcciones definidas por los vectores \hat{r} y $\hat{\phi}$, y de esa forma podemos identificar que $\vec{F}_e = -|\vec{F}_e|\hat{r}$ y $\vec{F}_c = |\vec{F}_c|\hat{\phi}$, y así:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = -|\vec{F}_e|\hat{r} + |\vec{F}_c|\hat{\phi}$$

Ahora, dado que el resorte es no lineal la magnitud de la fuerza elástica asociada a este cumple la siguiente relación, donde Δ es el estiramiento o compresión neta del resorte:

$$|\vec{F}_e| = k\Delta + \alpha\Delta^3$$

⁴Esto es así ya que la longitud natural del resorte es nula, por lo tanto el resorte tenderá a encogerse para restaurar dicha longitud.

Dado que la longitud natural del resorte es nula, el estiramiento/compresión neta del resorte corresponde a su longitud total. De esta forma, a partir de la figura de la página anterior podemos notar que $\Delta = r$, entonces:

$$|\vec{F}_e| = kr + \alpha r^3 \Rightarrow \vec{F}_{\text{neta}} = -(kr + \alpha r^3)\hat{r} + |\vec{F}_c|\hat{\phi} \quad (4)$$

Ya que tenemos la fuerza neta \vec{F}_{neta} y la aceleración \vec{a} de la partícula expresadas en un mismo sistema de coordenadas y con una misma base de vectores unitarios, podemos aplicar la 2da ley de Newton:

$$\vec{F}_{\text{neta}} = m\vec{a} \Rightarrow -(kr + \alpha r^3)\hat{r} + |\vec{F}_c|\hat{\phi} = m(\ddot{r} - r\omega^2)\hat{r} + 2m\omega\dot{r}\hat{\phi}$$

Ya que la igualdad anterior es entre dos vectores, esta igualdad debe cumplirse en cada una de las componentes asociadas a los vectores unitarios utilizados para expresarlos, es decir, todo lo que esté multiplicando a \hat{r} al lado izquierdo debe ser igual a lo que está multiplicando a \hat{r} al lado derecho, y lo mismo para $\hat{\phi}$, entonces:

$$\Rightarrow -(kr + \alpha r^3) = m(\ddot{r} - r\omega^2) \quad ; \quad |\vec{F}_c| = 2m\omega\dot{r}$$

La ecuación de movimiento se obtiene al desarrollar la primera expresión⁵:

$$\begin{aligned} -(kr + \alpha r^3) = m(\ddot{r} - r\omega^2) &\Rightarrow \ddot{r} - \omega^2 r = -\frac{k}{m}r - \frac{\alpha}{m}r^3 \\ &\Rightarrow \boxed{\ddot{r} = \left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right)r - \frac{\alpha}{m}r^3} \end{aligned} \quad (5)$$

- b) La expresión obtenida en la parte anterior nos permite estudiar la dinámica de la partícula a lo largo de la barra, es decir, nos permite entender cualitativa y cuantitativamente cómo se moverá la partícula en un sistema de referencia que se mueve junto con ella. Una forma útil de entender cómo será la dinámica de la partícula es el diagrama de fase del sistema. Si la dinámica de una partícula está descrita por la coordenada $q(t)$, el diagrama o espacio de fase corresponde al gráfico de las curvas $\dot{q}(q)$, y por lo tanto si se desea obtener este diagrama es necesario obtener una expresión para la velocidad \dot{q} en función de la coordenada q . Para obtener dicha expresión podemos usar la ecuación de movimiento $\ddot{q}(q, \dot{q})$ y un cambio de variable en virtud de la regla de la cadena:

$$\ddot{q} = \frac{d\dot{q}}{dt} = \frac{d\dot{q}}{dq} \frac{dq}{dt} \Rightarrow \ddot{q} = \dot{q} \frac{d\dot{q}}{dq}$$

Si aplicamos este cambio de variable, lo que obtendremos será una EDO de primer orden para \dot{q} en función de la variable q , la cual podremos integrar para obtener la solución $\dot{q}(q)$. En nuestro caso particular se tiene $q = r$, y se tiene la ecuación de movimiento obtenida en (5), entonces:

$$\ddot{r} = \left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right)r - \frac{\alpha}{m}r^3 \Rightarrow \dot{r} \frac{d\dot{r}}{dr} = \left(\omega^2 - \frac{k}{m}\right)r - \frac{\alpha}{m}r^3$$

⁵La segunda expresión es útil para despejar la fuerza de contacto \vec{F}_c que la barra ejerce sobre la partícula, pero como no se nos pide esa cantidad, la ignoramos.

Integramos a ambos lados con respecto a la coordenada radial entre una posición inicial r_0 y una posición arbitraria r , entonces:

$$\Rightarrow \int_{r_0}^r \dot{r} \frac{d\dot{r}}{dr} dr = \int_{r_0}^r \left[\left(\omega^2 - \frac{k}{m} \right) r - \frac{\alpha}{m} r^3 \right] dr$$

Podemos hacer un cambio de variable en la integral del lado izquierdo⁶ para integrar en función de la velocidad:

$$\int_{y_1}^{y_2} f(y) dy = \int_{y(x_1)}^{y(x_2)} f(y(x)) dy = \int_{x_1}^{x_2} f(x) \frac{dy}{dx} dx \Rightarrow \int_{r_0}^r \dot{r}(r) \frac{d\dot{r}}{dr} dr = \int_{\dot{r}(r_0)}^{\dot{r}(r)} \dot{r}(\dot{r}) d\dot{r} = \int_{\dot{r}_0}^{\dot{r}} \dot{r} d\dot{r}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \int_{\dot{r}_0}^{\dot{r}} \dot{r} d\dot{r} &= \left(\omega^2 - \frac{k}{m} \right) \int_{r_0}^r r dr - \frac{\alpha}{m} \int_{r_0}^r r^3 dr \Rightarrow \frac{\dot{r}^2}{2} - \frac{\dot{r}_0^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\omega^2 - \frac{k}{m} \right) (r^2 - r_0^2) - \frac{\alpha}{4m} (r^4 - r_0^4) \\ \Rightarrow \dot{r}^2 &= \left(\omega^2 - \frac{k}{m} \right) r^2 - \frac{\alpha}{2m} r^4 - \left(\omega^2 - \frac{k}{m} \right) r_0^2 + \frac{\alpha}{2m} r_0^4 + \frac{1}{2} \dot{r}_0^2 \end{aligned}$$

Si llamamos C a la suma de los últimos tres términos constantes, se tiene finalmente que:

$$\Rightarrow \dot{r}(r) = \pm \sqrt{\left(\omega^2 - \frac{k}{m} \right) r^2 - \frac{\alpha}{2m} r^4 + C} \quad (6)$$

Estas curvas caracterizan el diagrama de fase de la partícula, donde la constante C tiene información sobre las condiciones iniciales de la partícula (tomando en cuenta eso, distintos valores de C nos entregan distintas curvas en el gráfico $\dot{r}(r)$). Ahora, antes de graficar estas curvas conviene estudiar los *puntos de equilibrio* del sistema, ya que la dinámica cualitativa de un sistema dinámico (y por lo tanto el comportamiento de las curvas $\dot{r}(r)$ en el diagrama de fase) es bien conocida cerca de estos puntos. Los puntos de equilibrio corresponden a aquellos valores de la coordenada r para los cuales la aceleración \ddot{r} es cero. Entonces, si r_{eq} corresponde a un punto de equilibrio de la partícula en la barra, a partir de la ecuación de movimiento (5) se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \left(\omega^2 - \frac{k}{m} \right) r_{\text{eq}} - \frac{\alpha}{m} r_{\text{eq}}^3 &= 0 \Rightarrow r_{\text{eq}} \left[\left(\omega^2 - \frac{k}{m} \right) - \frac{\alpha}{m} r_{\text{eq}}^2 \right] = 0 \\ \Rightarrow r_{\text{eq}} &= 0 \quad ; \quad \left(\omega^2 - \frac{k}{m} \right) - \frac{\alpha}{m} r_{\text{eq}}^2 = 0 \\ \Rightarrow r_{\text{eq}} &= 0 \quad ; \quad r_{\text{eq}} = \pm \sqrt{\frac{m\omega^2}{\alpha} - \frac{k}{\alpha}} \end{aligned} \quad (7)$$

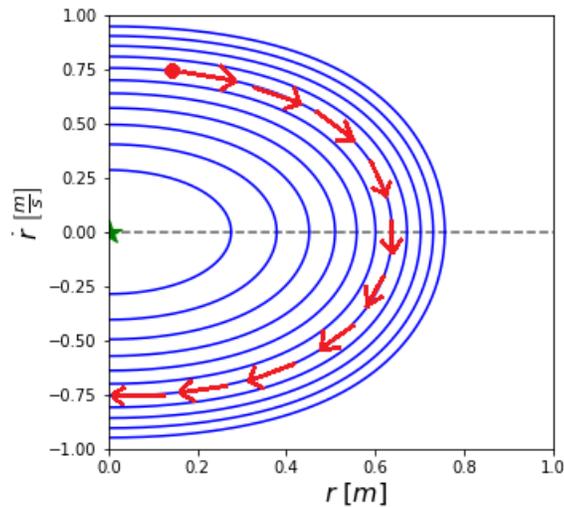
Dado que la segunda expresión está asociada a una raíz con índice par, la existencia de esos puntos de equilibrio está sujeta a la condición de que el radicando sea mayor a cero, es decir, está sujeta a la siguiente condición:

$$\frac{m\omega^2}{\alpha} - \frac{k}{\alpha} > 0 \Rightarrow \omega^2 > \frac{k}{m} \Rightarrow \omega > \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (8)$$

⁶Todo este desarrollo es para explicar formalmente de dónde viene el cambio de variable, pero no es necesario hacerlo tan rigurosamente cada vez. En casos futuros nos saltaremos estos pasos.

Cuando se tiene un punto de equilibrio, este punto estará justo sobre la línea $\dot{r} = 0$ en el diagrama de fase, y dependiendo del tipo de estabilidad, este punto estará rodeado de elipses (equilibrio estable) o hipérbolas (equilibrio inestable). Con esta información es posible dibujar curvas en el diagrama de fase sin necesidad de graficar explícitamente la expresión $\dot{r}(r)$ obtenida en (6).

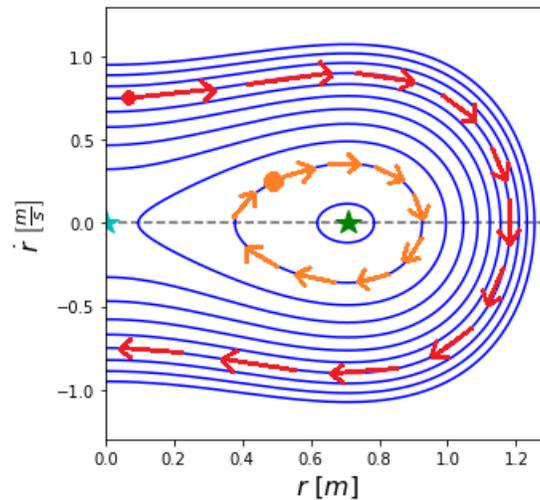
Nos separaremos en dos casos considerando la condición mostrada en (8). Para el caso $\omega < \sqrt{\frac{k}{m}}$ sólo se tiene un punto de equilibrio $r_{\text{eq}} = 0$, el cual es estable, y considerando que $r > 0$ (ya que por definición la coordenada radial siempre es positiva) entonces tendremos mitades de elipses rodeando ese punto, tal como se muestra en el siguiente caso para $\omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $k = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ y $\alpha = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$, con la estrella verde representando el punto de equilibrio $r_{\text{eq}} = 0$:



Para simplificar la interpretación asumiremos que cuando la partícula choca en el origen, esta rebota de forma perfectamente elástica, es decir, ocurre un cambio instantáneo en el signo de su velocidad. Si partimos con una posición y velocidad como las mostradas en el punto rojo de la figura, ya que estamos en la zona sobre la línea segmentada se tiene $\dot{r} > 0$, por lo tanto la partícula debe seguir el sentido de la curva en el cual r aumenta. Ahora, dada la forma de las curvas, al seguir este sentido existe una posición en la cual se corta al eje $\dot{r} = 0$ (que físicamente ocurre en la elongación máxima del resorte), y luego pasamos a la zona debajo de la línea segmentada, lo que implica que $\dot{r} < 0$, y por lo tanto se debe seguir un sentido en el cual r disminuya. Al llegar al origen (pared lateral izquierda del gráfico) ocurre un choque perfectamente elástico, de tal forma que ocurre un cambio de signo de la velocidad (pasamos al mismo punto del eje vertical, pero con signo positivo), con lo que la misma curva se recorre nuevamente. Las distintas curvas dan cuenta de distintos valores de C en la expresión (6), y físicamente corresponden a trayectorias para la partícula con distinta energía mecánica (por eso hay distintas elongaciones y velocidades máximas).

Para el caso $\omega > \sqrt{\frac{k}{m}}$ se tienen los puntos de equilibrio⁷ $r_{\text{eq}} = 0$ (inestable) y $r_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{m\omega^2}{\alpha} - \frac{k}{\alpha}}$ (estable). El gráfico de las curvas para $\omega = 3 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $k = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ y $\alpha = 2 \frac{\text{N}}{\text{m}^3}$, con la estrella celeste representando el punto de equilibrio $r_{\text{eq}} = 0$ y la estrella verde representando el punto $r_{\text{eq}} = \sqrt{\frac{m\omega^2}{\alpha} - \frac{k}{\alpha}}$ se muestra en la siguiente página. Podemos notar que principalmente existen dos tipos de curvas dependiendo qué tan cerca estemos del punto de equilibrio estable. Si partimos con una posición y velocidad como las mostradas en el punto rojo de la figura tendremos una dinámica muy similar a

⁷El punto $r_{\text{eq}} = -\sqrt{\frac{m\omega^2}{\alpha} - \frac{k}{\alpha}}$ se ignora por la condición $r > 0$.



la explicada en la parte anterior, en la cual la partícula realizará una oscilación amplia pasando por los dos puntos de equilibrio (acelerando ligeramente al pasar por el punto inestable, y frenando al pasar por el punto estable). Lo interesante ocurre si partimos con una posición y velocidad como las mostradas en el punto naranja; si partimos en una zona por sobre la línea segmentada se tiene que $\dot{r} > 0$, por lo tanto la partícula seguirá el sentido de la curva en el cual r aumenta hasta llegar a una elongación máxima (en donde $\dot{r} = 0$), y luego comienza a disminuir pasando por el punto de equilibrio inestable y deteniéndose en una elongación mínima (donde nuevamente $\dot{r} = 0$) para repetir el ciclo nuevamente. Esta trayectoria representa una oscilación cuasi-armónica alrededor del punto de equilibrio estable.