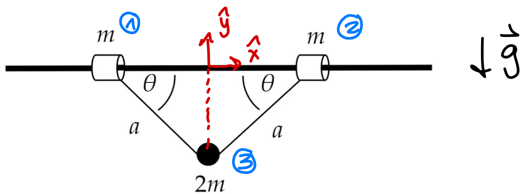
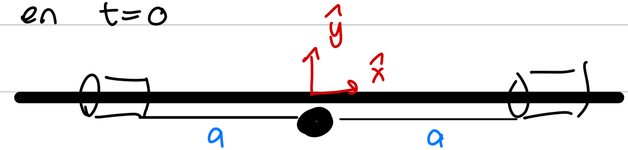
P1.

Se tiene un sistema de tres partículas de masas m, m y $2m$, respectivamente que están unidas por dos varas de largo a, como muestra la imagen. Las dos partículas de masa m sólo se pueden mover horizontalmente, pues están pegadas a una barra horizontal. Si en un instante inicial, se tiene la configuración con $\theta = 0$ en reposo y se suelta el sistema,

- ¿Cuál es la rapidez de las masas m en el instante cuando chocan?
- Calcule la normal entre la barra y una masa m en ese instante.



en $t=0$



a) en el instante que chocan $\theta = \frac{\pi}{2}$

$v^2(\theta = \frac{\pi}{2})$

lo que quiero $v^2(\theta)$

$$E = \frac{1}{2} m v_1^2 + \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} 2m v_3^2 + mg y_1 + mg y_2 + 2mg y_3$$

$\vec{r}_1 = (-a\cos\theta, 0)$, $\vec{r}_2 = (a\cos\theta, 0)$, $\vec{r}_3 = (0, -a\sin\theta)$

$\dot{\vec{r}}_1 = (+a\sin\theta\,\dot{\theta}, 0)$, $\dot{\vec{r}}_2 = (-a\sin\theta\,\dot{\theta}, 0)$, $\dot{\vec{r}}_3 = (0, -a\cos\theta\,\dot{\theta})$

$|\dot{\vec{r}}_1|^2 = \underline{a^2\sin^2\theta}\,\dot{\theta}^2$ $\quad |\dot{\vec{r}}_2|^2 = \underline{a^2\sin^2}\,\dot{\theta}^2$ $\quad |\dot{\vec{r}}_3|^2 = \underline{a^2\cos^2\theta}\,\dot{\theta}^2$

$$E = \frac{1}{2} m a^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m a^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} 2m a^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 + 2mg(-a\sin\theta)$$

$$E = ma^2\sin^2\theta\,\dot{\theta}^2 + m a^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2 - 2mg\,a\sin\theta$$

$$E = ma^2\sin^2\theta\,\dot\theta^2 + m\,a^2\cos^2\theta\,\dot\theta^2 - 2mg\,a\sin\theta$$

$$= ma^2\dot\theta^2\,(\underbrace{\sin^2\theta + \cos^2\theta}_{=1}) - 2mga\sin\theta$$

$$E(\theta,\dot\theta) = ma^2\dot\theta^2 - 2mga\sin\theta$$

Ahora usamos cons. E : * en $t=0$, $\theta=0$ y $\dot\theta=0 \Longrightarrow E_i = 0$

* cuando chocan los m's $\theta = \pi/2$

$$\Longrightarrow E_f = ma^2\dot\theta^2 - 2mga\,\underbrace{\cancel{\sin\tfrac{\pi}{2}}}_{1}$$

$$E_i = E_f \Longrightarrow 0 = \cancel{m}a^{\cancel{2}}\dot\theta^2 - 2\cancel{m}g\cancel{a}$$

$$0 = a\dot\theta^2 - 2g \Longrightarrow \dot\theta^2 = 2g/a \Longrightarrow |\dot\theta| = \sqrt{2g/a}$$

lo que nos piden $|\vec{v}_1|$

$$|\dot{\vec{r}}_1|^2 = a^2\sin^2\theta\,\dot\theta^2 \quad /\sqrt{\ }$$

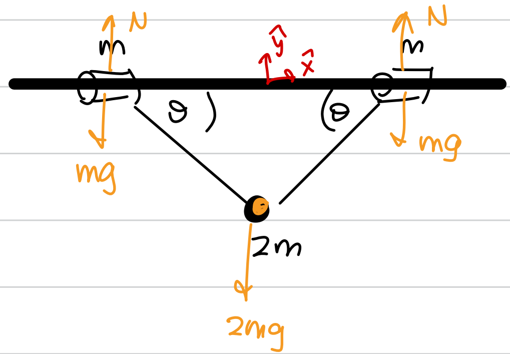
$$|\dot{\vec{r}}_1| = a\sin\theta\,\dot\theta \quad , \quad \theta = \pi/2 \quad , \quad \dot\theta = \sqrt{2g/a}$$

$$|\dot{\vec{r}}_1|_{\text{choque}} = a\,\underbrace{\cancel{\sin\tfrac{\pi}{2}}}_{1}\sqrt{2g/\cancel{a}} = \sqrt{2ga} \quad //$$

$$a \to \sqrt{a}\,\cancel{\sqrt{a}}$$

→ cuando chocan las m's

b) ¿Cuánto vale N_1 en ese punto?

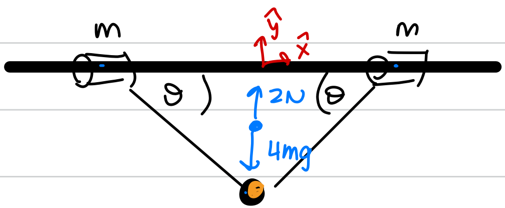


$$\boxed{m\vec{a}_{CM} = \vec{F}^{ext}}$$

$N_1 = N_2 = N$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{4\cancel{m}}\left(\cancel{m}\,\vec{r}_1 + \cancel{m}\,\vec{r}_2 + 2\cancel{m}\,\vec{r}_3\right)$$

$\vec{r}_1 = (-a\cos\theta , 0)$, $\vec{r}_2 = (a\cos\theta , 0)$, $\vec{r}_3 = (0 , -a\sin\theta)$



$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{4}\left(\cancel{-a\cos\theta\,\hat{x}} + \cancel{a\cos\theta\,\hat{x}} + 2(-a\sin\theta)\,\hat{y}\right)$$

$$= -\frac{1}{2}a\sin\theta\,\hat{y}$$

$$\dot{\vec{r}}_{CM} = -\frac{1}{2}a\cos\theta\,\dot{\theta}\,\hat{y}$$

$$\ddot{\vec{r}}_{CM} = \left(+\frac{1}{2}a\sin\theta\,\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}a\cos\theta\,\ddot{\theta}\right)\hat{y}$$

$$4m\left(+\frac{1}{2}a\sin\theta\,\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}a\cos\theta\,\ddot{\theta}\right)\cancel{\hat{y}} = (2N - 4mg)\cancel{\hat{y}}$$

$$4m\left(+\frac{1}{2}a\sin\theta\,\dot{\theta}^2-\frac{1}{2}a\cos\theta\,\ddot{\theta}\right)=2N-4mg$$

N cuando choca, $\theta=\pi/2$

$$2ma\dot{\theta}^2=2N-4mg$$

$$\boxed{\dot{\theta}^2=2g/a}$$

$$2m\cancel{a}\,2g/\cancel{a}=2N-4mg$$

$$4mg=2N-4mg$$

$$8mg=2N$$

$$\boxed{N=4mg}$$

P2.

En un ambiente sin gravedad considere un anillo de masa m que desliza sin roce a lo largo de una barra. El anillo está unido a una partícula de masa m, a través de una cuerda de largo L, como se muestra en la figura. En el instante inicial, con la cuerda completamente extendida y la partícula colocada junto a la barra, se imprime una velocidad v_0 a esta última, en dirección perpendicular a la barra. Determine la velocidad angular $\dot{\phi}$ de la cuerda, en función del ángulo ϕ que forma con la barra.

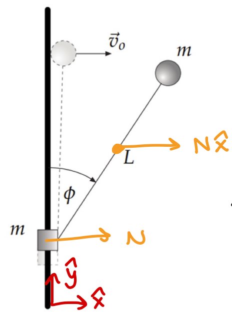
$$\dot{\vec{r}}_{\square} = \dot{y}_{\square}\,\hat{y}$$

$$\dot{\vec{r}}_{\bullet} = \dot{y}_{\square}\,\hat{y} + L(\cos\phi\,\dot{\phi}\,\hat{x} + -\sin\phi\,\dot{\phi}\,\hat{y})$$

$\dot{\phi}(\phi)$

L cons. (E)

$E = K$



$$\vec{a}_{CM} = \ddot{x}_{CM}\,\hat{x} + \ddot{y}_{CM}\,\hat{y}$$

$$M\,\vec{a}_{CM} = N\hat{x}$$

$$M(\ddot{x}_{CM}\hat{x} + \ddot{y}_{CM}\hat{y}) = N\hat{x}$$

$$\Downarrow$$

$\hat{x}]$ $\quad M\ddot{x}_{CM} = N$

$\hat{y}]$ $\quad \cancel{M}\ddot{y}_{CM} = 0 \quad / \int dt$

$$\boxed{\dot{y}_{CM} = \dot{y}_{CM}(t=0)}$$

$$\vec{r}_{\square} = y_{\square}\,\hat{y}$$

$$\vec{r}_{\bullet} = \underbrace{\vec{r}_{\square}}_{y_{\square}\hat{y}} + L(\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y})$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{2\cancel{m}}(\cancel{m}\vec{r}_{\square} + \cancel{m}\vec{r}_{\bullet}) = \frac{1}{2}\left(y_{\square}\hat{y} + y_{\square}\hat{y} + L(\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y})\right)$$

$$\vec{r}_{CM} = y_{\square}\,\hat{y} + \frac{L}{2}(\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y})$$

$$\vec{r}_{CM} = y_{\square}\,\hat{y} + \frac{L}{2}\left(\sin\phi\,\hat{x} + \cos\phi\,\hat{y}\right)$$

$$\dot{\vec{r}}_{CM} = \dot{y}_{\square}\,\hat{y} + \frac{L}{2}\left(\cos\phi\,\dot{\phi}\,\hat{x} - \sin\phi\,\dot{\phi}\,\hat{y}\right)$$

la comp. $\hat{y}$ $\longrightarrow$

$$\dot{y}_{CM} = \dot{y}_{\square} - \frac{L}{2}\sin\phi\,\dot{\phi}$$

$$\dot{y}_{CM}(t=0) =$$

$\hookrightarrow$ notar que en $t=0$, $\phi=0$, $\dot{y}_{CM} = \dot{y}_{\square}(t=0) - \frac{L}{2}\cancel{\sin 0}^{\,0}\,\dot{\phi}$

$\dot{y}_{CM}(t=0) = 0$

$$\dot{y}_{CM}(t) = \dot{y}_{CM}(t=0) = 0$$

$$\dot{y}_{\square} - \frac{L}{2}\sin\phi\,\dot{\phi} = 0$$

$$\dot{y}_{\square} = \frac{L}{2}\sin\phi\,\dot{\phi}$$

$$\dot{\vec{r}}_{\square} = \dot{y}_{\square}\,\hat{y} = \frac{L}{2}\sin\phi\,\dot{\phi}\,\hat{y}$$

$$\dot{\vec{r}}_{\bullet} = \dot{y}_{\square}\,\hat{y} + L\left(\cos\phi\,\dot{\phi}\,\hat{x} + -\sin\phi\,\dot{\phi}\,\hat{y}\right) = \frac{L}{2}\sin\phi\,\dot{\phi}\,\hat{y} + L\left(\cos\phi\,\dot{\phi}\,\hat{x} + -\sin\phi\,\dot{\phi}\,\hat{y}\right)$$

$$= -\frac{L}{2}\sin\phi\,\dot{\phi}\,\hat{y} + L\cos\phi\,\dot{\phi}\,\hat{x}$$

$$\dot{\vec{r}}_{\square} = \frac{L}{2}\sin\phi\,\dot{\phi}\,\hat{y} \longrightarrow |\dot{\vec{r}}_{\square}|^2 = \frac{L^2}{4}\sin^2\phi\,\dot{\phi}^2$$

$$\dot{\vec{r}}_{\bullet} = -\frac{L}{2}\sin\phi\,\dot{\phi}\,\hat{y} + L\cos\phi\,\dot{\phi}\,\hat{x} \longrightarrow |\dot{\vec{r}}_{\bullet}|^2 = L^2\cos^2\phi\,\dot{\phi}^2 + \frac{L^2}{4}\sin^2\phi\,\dot{\phi}^2$$

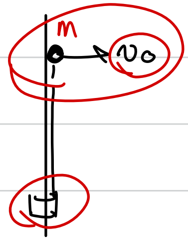
$$E = K = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{r}}_{\square}|^2 + \frac{1}{2}m|\dot{\vec{r}}_{\bullet}|^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left[\frac{L^2}{4}\sin^2\phi\,\dot{\phi}^2 + L^2\cos^2\phi\,\dot{\phi}^2 + \frac{L^2}{4}\sin^2\phi\,\dot{\phi}^2\right]$$

cons. de energía $= E_i$

$$= \cancel{\frac{1}{2}m}\left[\frac{L^2}{2}\sin^2\phi\,\dot{\phi}^2 + L^2\cos^2\phi\,\dot{\phi}^2\right] = \cancel{\frac{1}{2}m}v_0^2$$

en $t=0$,



$E_i = \frac{1}{2}m v_0^2$

$$\dot{\phi}^2 L^2\left(\frac{1}{2}\sin^2\phi + \cos^2\phi\right) = v_0^2$$

$$\dot{\phi}^2 = \frac{v_0^2}{L^2\left(\frac{1}{2}\sin^2\phi + \cos^2\phi\right)}$$