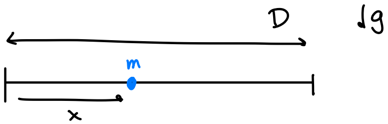
Pauta Aux 10

P1



$$\vec{F} = F_0 \sin(2\pi x/D)\ \hat{x}$$

a) ¿Es una fza conservativa?

Veamos si $\nabla \times \vec{F} = 0$ (esto porque si es conservativa se puede escribir $\vec{F} = -\nabla V$ y se puede mostrar que $\nabla \times \nabla U = 0$ para cualquier U)

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_0 \sin(2\pi x/D) & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\hat{y}\left(-\underbrace{\partial_z F_0 \sin\left(\tfrac{2\pi x}{D}\right)}_{=0}\right) + \hat{z}\left(-\underbrace{\partial_y F_0 \sin\left(\tfrac{2\pi x}{D}\right)}_{=0}\right)$$

$= 0$ ✓ es conservativa

b) Encuentre el potencial

$\nabla V = \partial_x V \hat{x} + \partial_y V \hat{y} + \partial_z V \hat{z}$

Como sabemos que es conservativa $\vec{F} = -\nabla V$, en este caso sólo tenemos 1 dimensión

$$\Longrightarrow F_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{D}\right) = -\frac{\partial}{\partial x} V$$

integremos esta cuestión para obtener V!

$$\int F_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{D}\right) dx = -\int \frac{\partial}{\partial x} V \, dx$$

una cte al hacer la primitiva

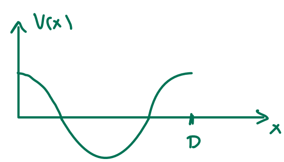
$$-F_0 \frac{D}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi x}{D}\right) - V_0 = -V$$

real%. esta const. da lo mismo

la podemos tomar $V_0 = 0$

$$\Longrightarrow V(x) = \frac{F_0 D}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi x}{D}\right) + V_0$$

$$V(x) = \frac{F_0 D}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi x}{D}\right)$$



Luego $E(x(t)) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{F_0 D}{2\pi} \cos\left(\frac{2\pi x}{D}\right)$

c) si parte en $x_0 = D/4$, cuál es la vel. inicial necesaria para que llegue al extremo de la vara

$$E(x_0) = \frac{1}{2} m \dot{x}_0^2 + \frac{F_0 D}{2\pi} \underbrace{\cos\left(\frac{2\pi}{4}\right)}_{=0} = \frac{1}{2} m \dot{x}_0^2$$

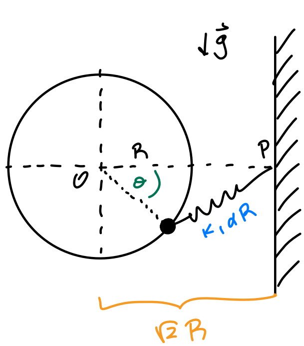
$$E(x=D) = \frac{1}{2} m \cdot 0 + \frac{F_0 D}{2\pi} \underbrace{\cos(2\pi)}_{=1} = \frac{F_0 D}{2\pi}$$

que llegue con velocidad = 0

Usando conservación de la energía $\Longrightarrow \frac{1}{2} m \dot{x}_0^2 = \frac{F_0 D}{2\pi}$

$$\dot{x}_0^2 = \frac{F_0 D}{m\pi}$$

P2



largo del resorte : $\ell^2 = R^2 + 2R^2 - 2R\sqrt{2}R\cos\theta$

$$V_{\text{elástica}} = \frac{1}{2}K(\ell-\ell_0)^2$$
$$= \frac{1}{2}K\left(\sqrt{3R^2 - 2\sqrt{2}R^2\cos\theta} - \alpha R\right)^2$$

$$V_{grav.} = \pm\, mgR\sin\theta$$

depende si defino θ ↑ ó θ)

usaré este ⟹ uso el −

a) $U = \frac{1}{2}K\left(R\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos\theta} - \alpha R\right)^2 - mgR\sin\theta$

b) $U(\alpha=1, g=0) = \frac{1}{2}KR^2\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos\theta} - 1\right)^2$

así $\vec F = \nabla U = 0$ en un máx o mín

Los puntos de equilibrio son los máx y mín del potencial U

$$\frac{\partial U}{\partial\theta} = KR^2\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos\theta}-1\right)\cancel{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos\theta}}\cdot +\cancel{2}\sqrt{2}\sin\theta$$

$$KR^2\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos\theta^*}-1\right)\frac{\sqrt{2}\sin\theta^*}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos\theta^*}} = 0 \quad \Big/ \cdot \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos\theta^*}}{\sqrt{2}KR^2}$$

$\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos\theta^*} \neq 0$ porque $3 > 2\sqrt{2}\cos\theta$

$$\underbrace{\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos\theta^*}-1\right)}_{\text{ó esto es }=0}\underbrace{\sin\theta^*}_{\text{ó esto otro es }=0} = 0$$

$\sin\theta^* = 0 \implies \boxed{\theta^* = 0, \pi}$ puntos de equilibrio

$\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos\theta^*} - 1 = 0 \implies 3-2\sqrt{2}\cos\theta^* = 1$

$2\sqrt{2}\cos\theta^* = 2 \implies \cos\theta^* = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\boxed{\theta^* = \pm\pi/4}$ puntos de eq

Para ver la estabilidad hay que ver si son máximos ó mínimos

↳ inestable ↳ estable

$$\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} = \frac{\partial}{\partial\theta}KR^2\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos\theta}-1\right)\frac{\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos\theta}}$$

$$= KR^2\left\{\frac{2\sin^2\theta}{3-2\sqrt{2}\cos\theta} + \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos\theta}-1\right)\cdot\left[\frac{\sqrt{2}\cos\theta}{\sqrt{3-2\sqrt{2}\cos\theta}} + \frac{\sqrt{2}\sin\theta\cdot -\frac{1}{2}2\sqrt{2}\sin\theta}{(3-2\sqrt{2}\cos\theta)^{3/2}}\right]\right\}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\theta=0) = KR^2 \left(\underbrace{\sqrt{3-2\sqrt2} - 1}_{<0} \right) \frac{\sqrt2}{\sqrt{3-2\sqrt2}} < 0$$ inestable

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\theta=\pi) = KR^2 \left(\underbrace{\sqrt{3+2\sqrt2} - 1}_{>0} \right) \underbrace{\frac{-\sqrt2}{\sqrt{3+2\sqrt2}}}_{<0} < 0$$ inestable

$\sin\theta = \cos\theta = \frac{1}{\sqrt2}$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\theta=\pi/4) = KR^2 \left\{ \frac{2 \cdot 1/2}{3-2\sqrt2 \cdot 1/\sqrt2} + \left(\overbrace{\sqrt{3-2\sqrt2 \cdot 1/\sqrt2} - 1}^{=0} \right) \cdot \left[\frac{\sqrt2 \cdot 1/\sqrt2}{\sqrt{3-2\sqrt2 \cdot 1/\sqrt2}} + \frac{\sqrt2 \cdot 1/\sqrt2 \cdot -\frac12 \, 2\sqrt2 \cdot 1/\sqrt2}{(3-2\sqrt2 \cdot 1/\sqrt2)^{3/2}} \right] \right\}$$

$$= KR^2 (1+0) > 0$$ estable

$\cos\theta = -\sin\theta = 1/\sqrt2$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\theta=-\frac{\pi}{4}) = KR^2 \left\{ \frac{2 (-1/\sqrt2)^2}{3-2\sqrt2 \cdot 1/\sqrt2} + \left(\overbrace{\sqrt{3-2\sqrt2 \cdot 1/\sqrt2} - 1}^{=0} \right) \cdot \left[\frac{\sqrt2 \cdot 1/\sqrt2}{\sqrt{3-2\sqrt2 \cdot 1/\sqrt2}} + \frac{\sqrt2 \cdot -1/\sqrt2 \cdot -\frac12 \, 2\sqrt2 \cdot -1/\sqrt2}{(3-2\sqrt2 \cdot 1/\sqrt2)^{3/2}} \right] \right\}$$

$$= KR^2 > 0$$

estable

c) Ahora usamos el U completo

$$U = \frac12 K \left(R\sqrt{3-2\sqrt2\cos\theta} - \alpha R \right)^2 - mgR\sin\theta$$

$$U'(\theta) = K\left(R\sqrt{3-2\sqrt2\cos\theta} - \alpha R \right) \frac{\frac12 R}{\sqrt{3-2\sqrt2\cos\theta}} \cdot 2\sqrt2\sin\theta - mgR\cos\theta$$

1° para que $\theta = \pi/4$ sea equilibrio, $U'(\pi/4) = 0$

$$\parallel$$

$$K\left(R\sqrt{3-2} - \alpha R \right) \frac{\cancel{R}}{\sqrt{3-2}} - mg\cancel{R}/\sqrt2 = 0$$

$$KR(1-\alpha) = mg/\sqrt2$$

$$\boxed{\alpha = 1 - \frac{mg}{\sqrt2 KR}}$$

y veamos si es estable

$$U''(\theta) = K\left(\frac{\frac12 R}{\sqrt{3-2\sqrt2\cos\theta}} \cdot 2\sqrt2\sin\theta \right)^2 + K\left(R\sqrt{3-2\sqrt2\cos\theta} - \alpha R \right) \left\{ \frac{R\sqrt2\cos\theta}{\sqrt{3-2\sqrt2\cos\theta}} - \frac12 \frac{R\sqrt2\sin\theta \quad 2\sqrt2\sin\theta}{(3-2\sqrt2\cos\theta)^{3/2}} \right\}$$

$$+\ mgR\sin\theta$$

$$U''(\theta=\pi/4) = K\left(\frac{R}{\sqrt{3-2}}\right)^2 + K\left(R\sqrt{3-2} - \alpha R\right)\underbrace{\left\{\frac{R}{\sqrt{3-2}} - \frac{R}{(3-2)^{3/2}}\right\}}_{=0}$$

$$+\ mgR\,1/\sqrt{2}$$

$$= KR^2 + mgR/\sqrt{2} > 0 \quad \text{estable}$$

independiente del α

P3

$$V(x) = -Cx^n e^{-ax}$$

$$V'(x) = -Cnx^{n-1}e^{-ax} + Cx^n e^{-ax}\, a$$

en el equilibrio
$$0 = \underbrace{C\, x_{eq}^{n-1}}_{x_{eq}=0 \text{ para } n\geq 2}\, e^{-ax}\,(\underbrace{-n + a x_{eq}}_{=0}) \Longrightarrow x_{eq} = \frac{n}{a}$$

estabilidad

$$V''(x) = -Cn(n-1)x^{n-2}e^{-ax} + Cnx^{n-1}e^{-ax}a + Cnx^{n-1}e^{-ax}a - Cx^n e^{-ax}a^2$$
$$= Ce^{-ax}x^{n-2}\left(-n(n-1) + 2nxa - x^2a^2\right)$$

$$V''\left(x=\frac{n}{a}\right) = Ce^{-ax}\left(\frac{n}{a}\right)^{n-2}\left(-n(\cancel{n}-1) + \cancel{2n^2} - \cancel{n^2}\right)$$
$$= Ce^{-ax}\left(\frac{n}{a}\right)^{n-2} n$$
$$> 0$$ estable

$$V''(x=0) = Ce^{-ax}(0)^{n-2}\left(-n(n-1)\right) < 0 \quad \text{para } n\geq 2$$

inestable

Luego veamos la frec. de pequeñas oscilaciones entorno a $x_{eq} = \frac{n}{a}$, para esto hacemos el cambio de variable $x(t) = x_{eq} + \epsilon(t)$ con $\epsilon \ll 1$ (chiquito)

Taylor entorno a n/a

$$V(x) = V\left(\frac{n}{a} + \epsilon(t)\right) \approx \underbrace{V\left(\frac{n}{a}\right)}_{\text{es una constante}} + \underbrace{V'\left(\frac{n}{a}\right)}_{=0}\epsilon + \frac{1}{2!}V''\left(\frac{n}{a}\right)\epsilon^2 + \underbrace{\mathcal{O}(x^3)}_{\text{despreciamos estos términos}}$$

porque $\frac{n}{a}$ es un mínimo de V

$$\approx B + 0 + \frac{1}{2}Ce^{-ax}\left(\frac{n}{a}\right)^{n-2} n\, \epsilon(t)^2$$

$$\approx B + \underbrace{\frac{1}{2}Ce^{-ax}\left(\frac{n}{a}\right)^{n-2} n\, \epsilon(t)^2}_{\text{se parece a la energía elástica}}$$

se parece a la energía elástica $\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x$ cambiando $x \longrightarrow \epsilon$

Con lo que identificamos $m\omega^2 = Ce^{-ax}\left(\frac{n}{a}\right)^{n-2} n$

$$\Longrightarrow \omega^2 = \frac{1}{m}Ce^{-ax}\left(\frac{n}{a}\right)^{n-2} n \quad //$$

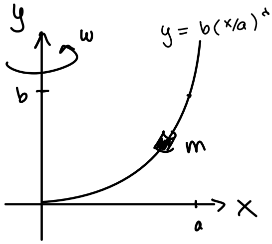
Este mismo mapeo nos entrega la forma usual de la frec. de pequeñas osc. $\omega^2 = \frac{V''(x_{eq})}{m}$

PN1

Este es un problema que no me gustó y que se hace con Potencial Efectivo

lo dejo para los curiosos :(

si no lo han visto no lo pesquen



el sistema gira con vel. angular ω cte.

encontrar punto de equilibrio

vamos a trabajar en cilíndricas $\hat{r} \to \hat{x}$, $\hat{z} \to \hat{y}$

$$\vec{a} = (\ddot{x} - x\dot{\phi}^2)\hat{x} + (x\ddot{\phi} + 2\dot{x}\dot{\phi})\hat{\phi} + \ddot{y}\,\hat{y}$$

$$\dot{\phi} = \omega \to \ddot{\phi} = 0$$

$$y = b(x/a)^{\alpha}$$

$$\dot{y} = \frac{b\alpha x^{\alpha-1}}{a^{\alpha}}\dot{x}$$

$$\ddot{y} = \frac{b\alpha(\alpha-1)}{a^{\alpha}}x^{\alpha-2}\dot{x}^2 + \frac{b\alpha x^{\alpha-1}}{a^{\alpha}}\ddot{x}$$

$$\Longrightarrow \vec{a} = (\ddot{x} - x\omega^2)\hat{x} + 2\dot{x}\omega\,\hat{\phi} + \left(\frac{b\alpha(\alpha-1)}{a^{\alpha}}x^{\alpha-2}\dot{x}^2 + \frac{b\alpha x^{\alpha-1}}{a^{\alpha}}\ddot{x}\right)\hat{y}$$

voy a considerar la componente tangente a la curva (en su plano), así no nos preocupamos por las normales

$$\vec{v}_{plano} = \dot{x}\,\hat{x} + \dot{y}\,\hat{y} = \dot{x}\left(\hat{x} + \frac{b\alpha x^{\alpha-1}}{a^{\alpha}}\hat{y}\right)$$

$$\hat{t} = \frac{\vec{v}_{plano}}{\|\vec{v}_{plano}\|} = \frac{\cancel{\dot{x}}\left(\hat{x} + b\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^{\alpha}}\hat{y}\right)}{\cancel{\dot{x}}\sqrt{1 + \frac{b^2\alpha^2x^{2(\alpha-1)}}{a^{2\alpha}}}}$$

$$\vec{a}\cdot\hat{t} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2\alpha^2x^{2(\alpha-1)}}{a^{2\alpha}}}}\left[\ddot{x} - x\omega^2 + \frac{b\alpha x^{\alpha-1}}{a^{\alpha}}\left(\frac{b\alpha(\alpha-1)}{a^{\alpha}}x^{\alpha-2}\dot{x}^2 + \frac{b\alpha x^{\alpha-1}}{a^{\alpha}}\ddot{x}\right)\right]$$

y tenemos $\cancel{m}\,\vec{a}\cdot\hat{t} = -\cancel{m}g\,\hat{y}\cdot\hat{t}$

$$\cancel{\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2\alpha^2x^{2(\alpha-1)}}{a^{2\alpha}}}}}\left[\ddot{x} - x\omega^2 + \frac{b\alpha x^{\alpha-1}}{a^{\alpha}}\left(\frac{b\alpha(\alpha-1)}{a^{\alpha}}x^{\alpha-2}\dot{x}^2 + \frac{b\alpha x^{\alpha-1}}{a^{\alpha}}\ddot{x}\right)\right]$$

$$= -g\frac{b\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^{\alpha}}}{\cancel{\sqrt{1 + \frac{b^2\alpha^2x^{2(\alpha-1)}}{a^{2\alpha}}}}}$$

Para encontrar el equilibrio podemos tomar $\dot{x} = 0$

$$\ddot{x} - x\omega^2 + \frac{b\alpha x^{\alpha-1}}{a^\alpha}\left(\frac{b\alpha x^{\alpha-1}}{a^\alpha}\ddot{x}\right) = -g\, b\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^\alpha}$$

$$\ddot{x}\left(1 + \frac{b^2\alpha^2 x^{2(\alpha-1)}}{a^{2\alpha}}\right) = -g b\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^\alpha} + x\omega^2$$

$$\ddot{x} = \frac{-g b\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^\alpha} + x\omega^2}{\left(1 + \frac{b^2\alpha^2 x^{2(\alpha-1)}}{a^{2\alpha}}\right)} \quad / \cdot m$$

$$m\ddot{x} = -\nabla U_{eff}$$

con $-\nabla U_{eff} = \dfrac{-g b\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^\alpha} + x\omega}{\left(1 + \frac{b^2\alpha^2 x^{2(\alpha-1)}}{a^{2\alpha}}\right)}$

Vemos que, en principio, el único potencial que teníamos era el gravitatorio, pero para encontrar puntos mínimos se usa el potencial efectivo U_{eff} que modifica el potencial original debido a la geometría y giro del sistema.

Luego el eq. es cuando $\nabla U_{eff} = 0$

$$\frac{g b\frac{\alpha x^{\alpha-1}}{a^\alpha} - x\omega^2}{\left(\cancel{1 + \frac{b^2\alpha^2 x^{2(\alpha-1)}}{a^{2\alpha}}}\right)} = 0$$

$$x\left(g b\frac{\alpha x^{\alpha-2}}{a^\alpha} - \omega^2\right) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x_{eq} = 0$$

$$x_{eq} = \left(\frac{a^\alpha \omega^2}{\alpha g b}\right)^{1/\alpha-2}$$