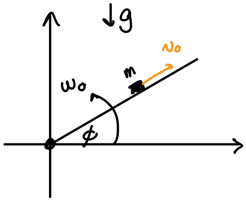
# Pauta Aux 6

## P3



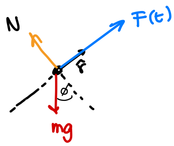

Sabemos que $\phi = w_0 t \longrightarrow \dot{\phi} = w_0 \longrightarrow \ddot{\phi} = 0$

$r = v_0 t \longrightarrow \dot{r} = v_0 \longrightarrow \ddot{r} = 0$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\phi}\hat{\phi}$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{r} + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) = -v_0 t\, w_0^2\,\hat{r} + 2v_0 w_0\hat{\phi}$$

DCL




$\hat{r}$: $m a_r = F(t) - mg\sin\phi$

$$-m v_0 t\, w_0^2 = F(t) - mg\sin(w_0 t)$$

1) $\hookrightarrow F(t) = m(g\sin(w_0 t) - w_0^2 v_0 t)$

2) para encontrar el max de F(t)

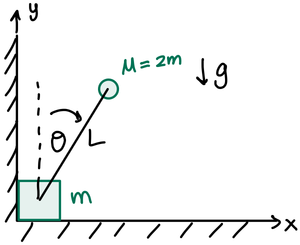
$$\frac{dF}{dt} = m(g w_0 \cos(w_0 t) - w_0^2 v_0)$$

en un $t^*$ $\frac{dF}{dt}(t^*) = 0 \implies g \cancel{w_0} \cos(w_0 t^*) - w_0^{\cancel{2}} v_0 = 0$

$$\cos(\theta) = \frac{w_0 v_0}{g} \qquad \left(\text{usando } v_0 = \frac{g}{2w_0}\right)$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{3} = 60°$$

P2




a) mientras el bloque no se mueva la masa M está parametrizada completamente por el ángulo θ

$\vec{r}_M = (L\sin\theta,\ L\cos\theta)$ (en cartesianas)

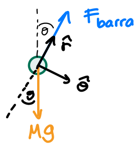
$\frac{d}{dt}$

$= L(\sin\theta, \cos\theta) = L\hat{r}$

$\vec{v}_M = L\dot{\theta}(\cos\theta, -\sin\theta) = L\dot{\theta}\hat{\theta}$ $\frac{d}{dt}$

$L\ddot{\theta}\hat{\theta} + L\dot{\theta}\underbrace{\dot{\hat{\theta}}}_{-\hat{r}\dot{\theta}}$

b) DCL M




$-L\dot{\theta}^2$

$\hat{r}$ : $M a_r = F_{barra} - Mg\cos\theta$

$\hat{\theta}$ : $M a_\theta = Mg\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{L}\sin\theta$

$L\ddot{\theta}$

$\dot{\theta}' \frac{d\dot{\theta}'}{d\theta'} = \frac{g}{L}\sin\theta' \quad / \int_0^\theta d\theta'$

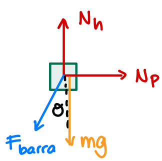
$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{g}{L}\cos\theta' \Big|_\theta^0$

$L\dot{\theta}^2 = 2g(1-\cos\theta)$

Reemplazamos por $\hat{r}$ : $-M\,2g(1-\cos\theta) = F_{barra} - Mg\cos\theta$

$F_{barra} = Mg(3\cos\theta - 2)$

DCL m




$\hat{x}$ : $\cancel{m\ddot{x}_m}^{\,0} = N_p - F_{barra}\sin\theta$

$\hat{y}$ : $\cancel{m\ddot{y}_m}^{\,0} = N_h - mg - F_{barra}\cos\theta$

$\theta^* = \arccos\frac{2}{3} \approx 48°$

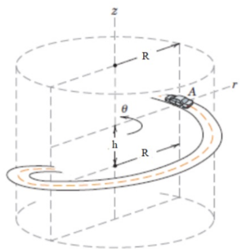
$N_p = \sin\theta\, Mg\,(3\cos\theta - 2)$ se hace cero 1° ( cuando $\cos\theta^* = \frac{2}{3}$ )

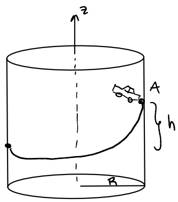
$\Rightarrow$ se despega de la pared primero

$N_h = mg + \cos\theta\, Mg(3\cos\theta - 2)$

**P extra**

El auto A está subiendo por una rampa de estacionamiento con forma de una hélice cilíndrica de radio $R$ y que aumenta su altura en $h$ por cada media vuelta. En la posición que se muestra el auto tiene una rapidez de $v_0$, la cual disminuye a con una aceleración $a_0$. Determine las componentes en las direcciones r, $\theta$ y z de la aceleración del auto




La opción lógica es usar coords. cilíndricas

$r = R$ constante $\Rightarrow \dot{r} = 0$

Busquemos la relación entre $z$ y $\theta$

$$z(t) = z(0) + h\,\frac{(\theta(t) - \theta(0))}{\pi} \Big\} \text{ cuando } \Delta\theta = \pi \text{ (media vuelta)}, \; z \text{ sube } h$$

$\frac{d}{dt}$

$$\boxed{\dot{z} = \frac{h}{\pi}\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{z} = \frac{h}{\pi}\ddot{\theta}}$$

y en cilíndricas tenemos

$$\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{z}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + \dot{z}\hat{z} \xrightarrow{\dot{r}=0,\ \dot{z}=\frac{h}{\pi}\dot{\theta},\ r=R} R\dot{\theta}\hat{\theta} + \frac{h}{\pi}\dot{\theta}\hat{z} \qquad (i)$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} + \ddot{z}\hat{z} \xrightarrow[\substack{\ddot{z}=\frac{h}{\pi}\ddot{\theta} \\ \dot{r}=\ddot{r}=0 \\ r=R}]{} -R\dot{\theta}^2\hat{r} + \underbrace{R\ddot{\theta}\hat{\theta} + \frac{h}{\pi}\ddot{\theta}\hat{z}}_{\text{componente tangencial}} \qquad (ii)$$

Sabemos que en (A) tiene velocidad $v_0$

$\therefore$ usamos $|(i)|$ para calcular $\dot{\theta}$

$$\hookrightarrow \sqrt{R^2\dot{\theta}^2 + \frac{h^2}{\pi^2}\dot{\theta}^2} = v_0 \Rightarrow |\dot{\theta}| = \frac{v_0}{\sqrt{R^2 + h^2/\pi^2}} \qquad (iii)$$

y sabemos que la aceleración tangencial es $-a_0$, $\therefore$ $|\vec{a}_{tangencial}| = a_0$

incluye componentes en $\hat{\theta}$ y $\hat{z}$

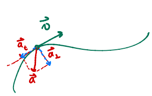
(ii)

$$\sqrt{R^2\ddot{\theta}^2 + \frac{h^2}{\pi^2}\ddot{\theta}^2} = a_0 \Rightarrow |\ddot{\theta}| = \frac{a_0}{\sqrt{R^2 + h^2/\pi^2}}$$

¿Por qué aceleración tangencial?

El enunciado dice "... el auto tiene rapidez ($|\vec{v}|$) $v_0$, la cual disminuye con una aceleración $a_0$

En una trayectoria cualquiera la componente tangencial a $\vec{v}$ de $\vec{a}$ es la encargada de cambiar la rapidez, la componente perpendicular es responsable de cambiar la dirección de la velocidad




$\therefore$ la que disminuye $|\vec{v}|$ es $\vec{a}_t$, en nuestro caso $\hat{r} \perp \vec{v}$ (se puede ver con $\hat{r} \cdot (i) = 0$)

$\therefore$ $\vec{a}_t$ es $\vec{a}$ sin la componente $\hat{r}$

porque la velocidad disminuye

Luego, reemplazando $\dot{\theta} = |\dot{\theta}| = v_0/\sqrt{\cdots}$, $\ddot{\theta} = -|\ddot{\theta}| = -a_0/\sqrt{\cdots}$, en (ii)

$$\vec{a} = -\frac{R\, v_0^2}{R^2 + h^2/\pi^2}\,\hat{r} - \frac{R\, a_0}{\sqrt{R^2 + h^2/\pi^2}}\,\hat{\theta} - \frac{h}{\pi}\frac{a_0}{\sqrt{R^2 + h^2/\pi^2}}\,\hat{z}$$

Otra forma de resolverlo es notar

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} = -a_0$$

y

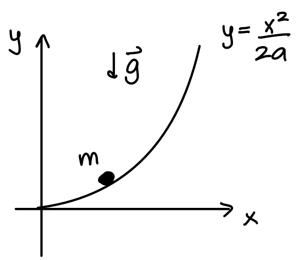
$$|\vec{v}| = \left| R\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \frac{h}{\pi}\dot{\theta}\,\hat{z} \right| = \sqrt{R^2\dot{\theta}^2 + \frac{h^2}{\pi^2}\dot{\theta}^2} = \dot{\theta}\sqrt{R^2 + \frac{h^2}{\pi^2}}$$

$$\frac{d|\vec{v}|}{dt} = \ddot{\theta}\sqrt{R^2 + h^2/\pi^2} = -a_0$$

$$\ddot{\theta} = \frac{-a_0}{\sqrt{R^2 + h^2/\pi^2}}$$

y reemplazando en (ii) se llega a la misma solución (reemplazando $\dot{\theta}$ con el obtenido anteriormente (iii))

**P1**




$\vec{F}_v = -c(y)\vec{v}$ tq $|\vec{v}| = v_0$

$\vec{r} = (x, x^2/2a)$ en cartesianas

$\frac{d}{dt}$

$\vec{v} = (\dot{x}, \cancel{2}x\dot{x}/\cancel{2}a)$

Ahora impongo que tiene rapidez constante $|\vec{v}|^2 = \dot{x}^2 + \frac{x^2\dot{x}^2}{a^2} = v_0^2$

para que vaya para abajo y a la izq.

Luego $\vec{v} = \frac{-v_0}{\sqrt{1+x^2/a}}(1, x/a)$ (válido para $x>0$)

$\dot{x}^2(1+x^2/a^2) = v_0^2$

$\dot{x}^2 = v_0^2/(1+x^2/a^2)$

aceleración

vector tangencial

Entonces $a_{tangencial} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \cdot \underbrace{\frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}}{\left\|\frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\right\|}}_{\hat{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\hat{v} \overset{\uparrow}{=} 0$

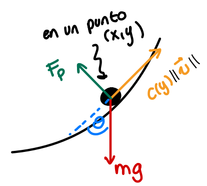
ahora, sabemos que $\vec{v}\cdot\vec{v} = v_0^2 \quad / \frac{d}{dt}$

$\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = 0$ derivada de cte $\Longrightarrow 2\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = 0$

son perpendiculares $\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = 0}$

Luego la aceleración tangencial es cero

**b)** Hacemos un DCL




veamos sólo la componente tangencial

$m\,a_t = mg\cos\theta - c(y)\,v_0 \quad (*)$

¿Cuánto vale $\cos\theta$? es el producto punto de $\hat{y}$ y $-\hat{v}$ : $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2/a^2}}(1, x/a)\cdot(0,1)$

$\cos\theta = \frac{x/a}{\sqrt{1+x^2/a^2}}$

parte a)

y sabemos que $a_t = 0$, por lo que $(*)$ queda :

$0 = mg\frac{x/a}{\sqrt{1+x^2/a^2}} - c(y)\,v_0$

Luego $c(y) = \frac{mg}{v_0}\frac{x/a}{\sqrt{1+x^2/a^2}} \underset{x=\sqrt{2ay}}{=} \frac{mg}{v_0}\sqrt{\frac{2y/a}{1+2y/a}}$ //

c) para encontrar la fuerza perpendicular, como sabemos que $a_t = 0$ y la aceleración se puede descomponer en componente perpendicular y tangente : $\vec{a} = \cancel{a_t \hat{t}}^{\,0} + a_p \hat{p}$

$\Longrightarrow$ toda la aceleración es perpendicular a la trayectoria

$$\Longrightarrow \hat{p}: \quad ma = F_p - mg\sin\theta \quad \Longrightarrow \quad F_p = m(a + g\sin\theta) \quad (\smile)$$

teníamos $\vec{v} = \dfrac{-v_0}{\sqrt{1+x^2/a^2}}(1, x/a) \quad \overset{d/dt}{\Longrightarrow} \quad \vec{a} = +v_0 \dfrac{1}{\cancel{2}} \dfrac{1}{(1+x^2/a^2)^{3/2}} \cancel{2}x/a^2 \; \dot{x} \; (1, x/a)$

$$\frac{-v_0}{\sqrt{1+x^2/a^2}}(0, \dot{x}/a)$$

$$= \frac{v_0}{\sqrt{1+x^2/a^2}} \dot{x} \left( \frac{x/a^2}{(1+x^2/a^2)}, \; \frac{x^2/a^3}{(1+x^2/a^2)} - 1/a \right)$$

$$= \frac{v_0}{(1+x^2/a^2)^{3/2}} \dot{x} \left( \frac{x}{a^2}, \cancel{\frac{x^2}{a^3}} - \frac{1}{a} - \cancel{\frac{x^2}{a^3}} \right)$$

$\dot{x} = -\dfrac{v_0}{\sqrt{1+x^2/a^2}}$

$$= \frac{-v_0^2}{(1+x^2/a^2)^2} \frac{1}{a} \left( \frac{x}{a}, -1 \right)$$

$$\Longrightarrow a = \|\vec{a}\| = \frac{v_0^2}{(1+x^2/a^2)^2} \frac{1}{a} \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}$$

$$= \frac{v_0^2}{a} \frac{1}{(1+x^2/a^2)^{3/2}}$$

Falta encontrar $\sin\theta$, sabemos que $\cos\theta = \dfrac{x/a}{\sqrt{1+x^2/a^2}}$

$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta}$

$$\Longrightarrow \sin\theta = \sqrt{1 - \frac{x^2/a^2}{1+x^2/a^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{1+x^2/a^2}}$$

Reemplazando en $(\smile)$

$$F_p = m\left( \underbrace{\frac{v_0^2}{a} \frac{1}{(1+x^2/a^2)^{3/2}}} + g \frac{1}{\sqrt{1+x^2/a^2}} \right)$$

Nota : radio de curvatura $R_c = \dfrac{\left(1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2\right)^{3/2}}{\left|\frac{d^2f}{dx^2}\right|} = \dfrac{(1 + x^2/a^2)^{3/2}}{\left|\frac{1}{a}\right|}$

vemos que es $\dfrac{v_0^2}{R_c}$ ✓✓