Auxiliar 4

Coordenadas curvilíneas y un poco de dinámica

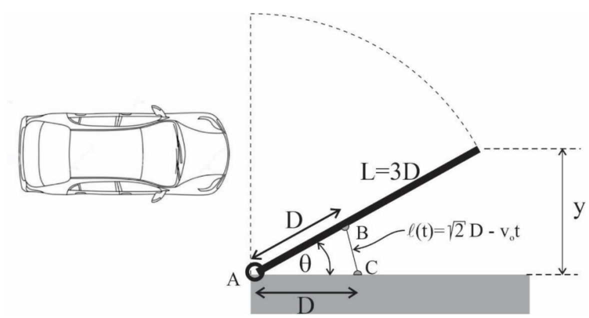
Profesora: Patricio Aceituno
Auxiliares: Gaspar De la Barrera, Rodrigo Rojas Sanhueza
Ayudantes: Gerd Hartmann, Constanza Rodriguez

P1. Portón mecánico

El sistema de apertura de un portón de estacionamiento vehicular lo modelaremos como una barra de largo $3D$ que gira en torno a su extremo A accionada por un brazo hidráulico BC que se va acortando de manera que su largo, ℓ, disminuye en el tiempo en la forma $\ell(t) = \sqrt{2}D - v_0 t$, con v_0 constante. Las distancias BA y CA son fijas e iguales a D, como muestra la figura.

a) Determine el tiempo que tarda el portón en liberar la mitad de la sección de entrada (cuando $y = 3D/2$).

b) Determine la velocidad angular $\dot{\theta}$ del portón en ese mismo instante

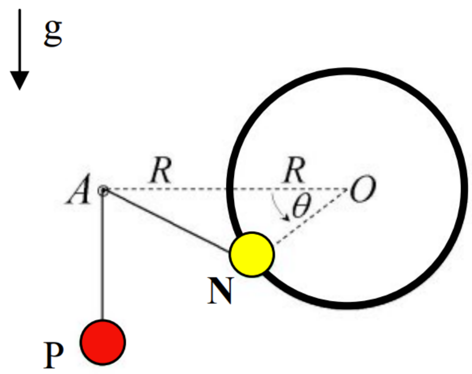


P2. [C1 Otoño 2007]

La partícula P y el anillo N están unidos por una cuerda ideal de largo $L > 3R$, que pasa por una polea fija en A. La partícula P cuelga libremente por gravedad. El anillo se puede mover con roce despreciable a lo largo de un aro circular de centro O y radio R. La polea está ubicada a una distancia R del aro, como se indica en la figura.

a) Si el anillo se mueve con velocidad angular constante a lo largo del aro $\dot{\theta} = \omega_0 > 0$ determine la rapidez máxima de la partícula P. Considere que su movimiento es siempre vertical y que la cuerda se mantiene siempre tensa.

b) Considere ahora que estando el anillo en la posición más baja ($\theta = \pi/2$) se obliga a la partícula P a descender con rapidez constante v_0. Determine la velocidad y aceleración del anillo cuando alcance la posición $\theta = \pi/3$. Asuma que la cuerda se mantiene siempre tensa.

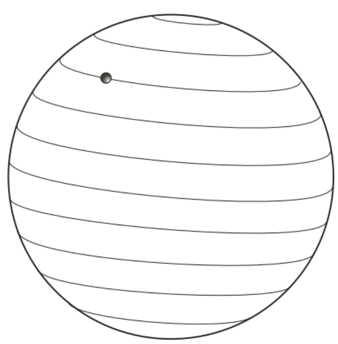


P3. Coordenadas esféricas

Tenemos una curva descrita por coordenadas esféricas donde $r = R_0$ y $\phi = N\theta$, donde N es un número entero par. Se tiene además que $\dot{\theta} = \omega_0$.

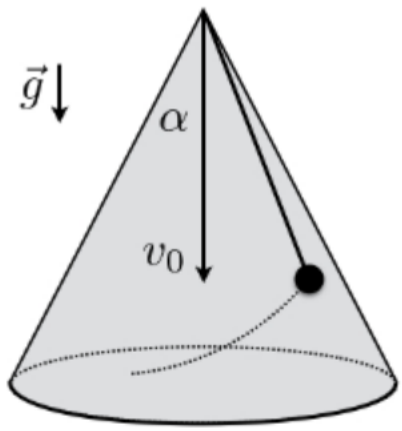
1. Determine la velocidad $\vec{v}$ y aceleración $\vec{a}$ de la partícula para una posición cualquiera.

2. Encuentre el radio de curvatura en el ecuador (cuando $\theta = \pi/2$). Recordar que el radio de curvatura se escribe como:
$$r_v = \frac{|\vec{v}|^3}{|\vec{v} \times \vec{a}|}$$



P4. Cono

Una partícula de masa m se mueve sin roce sobre la superficie de un cono de semiángulo α, ubicado de forma vertical con el vértice hacia arriba. La partícula está atada a una cuerda que pasa por el vértice del cono, de donde es recogida con velocidad v_0, como se muestra en la figura. Inicialmente la partícula está a una distancia r_0 del vértice y gira con velocidad angular ω_0. Determine la distancia a la cual la partícula se despega de la superficie del cono. Calcule la tensión de la cuerda en ese instante



Aceleración y velocidad en coordenadas esféricas

Esféricas:

$$
\begin{aligned}
\vec{r} &= r\hat{r} \\
\vec{v} &= \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\phi}\sin\theta\hat{\phi} \\
\vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\sin^2\theta)\hat{r} \\
&\quad + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\sin\theta\cos\theta)\hat{\theta} \\
&\quad + (r\ddot{\phi}\sin\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta)\hat{\phi}
\end{aligned}
$$