Auxiliar 20

Lagrangiano a segundo orden, modos normales y SRNI

Profesor: Gonzalo Palma
Auxiliares: Eduardo Droguett, Javier Huenupi
Ayudante: Thiare González, Lukas Philippi, Claudia San Martín

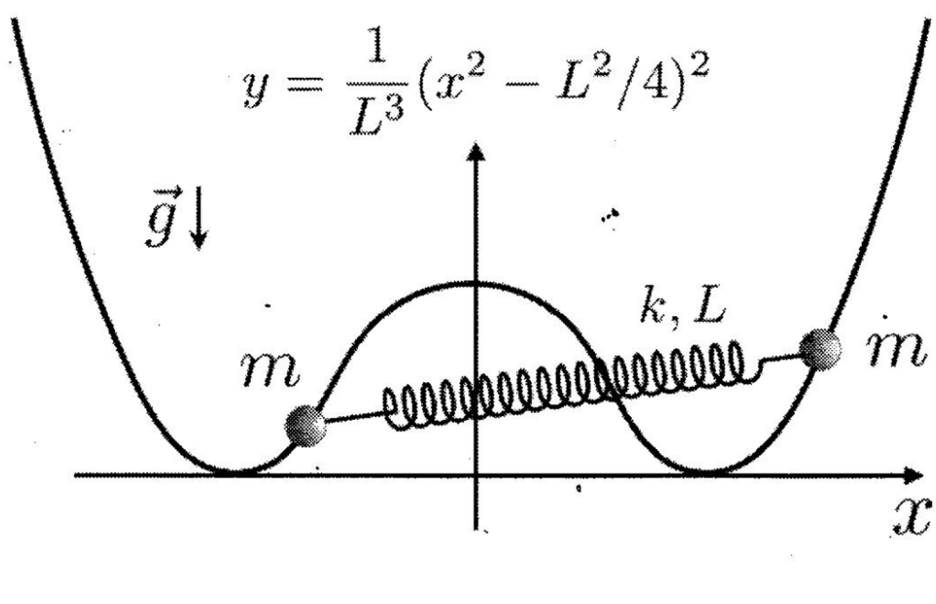
P1.-

Dos partículas de masa m están confinadas a moverse a lo largo de un alambre curvo descrito por la ecuación $y(x) = (x^2 - L^2/4)^2/L^3$. Estas permanecen comunicadas por medio de un resorte de largo natural L y constante elástica k, tal como lo muestra la figura. Se cumple que $m = kl/3g$.

a) Encuentre las ecuaciones de movimiento de pequeñas oscilaciones, en torno a los puntos de equilibrio $x_\pm = \pm L/2$

b) Determine los modos normales, junto con sus frecuencias

c) Si en tiempo $t = 0$ la primera partícula está en reposo en $x_1 = -L/2$ y la segunda cumple $\dot{x}_2 = v_0$ en $x_2 = +L/2$, determine el tiempo T mínimo que le toma al sistema en llegar a una configuración donde la segunda partícula se detiene en $x_2 = L/2$, mientras que la primera partícula oscila en torno a $x_1 = -L/2$

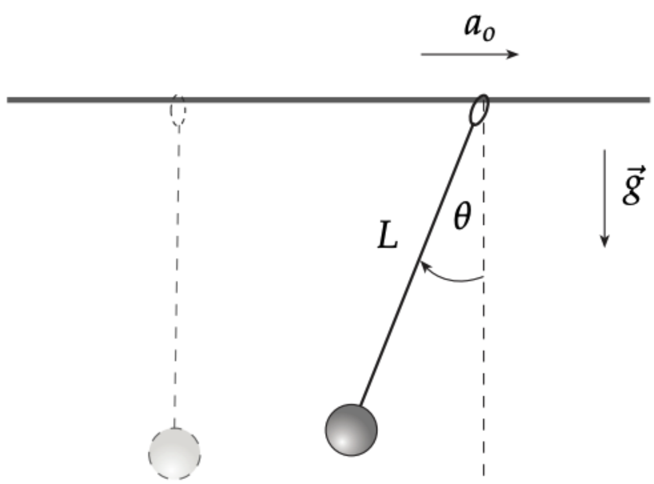


P2.-

Considere un péndulo simple de largo L y masa m que cuelga de un anillo que se puede mover libremente a lo largo de una barra horizontal. Estando el péndulo en reposo, se impulsa el anillo con una aceleración a_0 constante a lo largo de la barra. Determine:

a) Máxima desviación del péndulo con respecto a la vertical.

b) Tensión máxima que experimenta la cuerda y el ángulo con respecto a la vertical donde ésta se alcanza.



Formulario

Lagrangiano

El lagrangiano L se calcula como

$$L = K - U,$$

donde K es la energía cinética y U la energía potencial del sistema. Se debe considerar todas las partículas del sistema.
Las ecuaciones de Euler-Lagrange se calculan como

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0,$$

donde q es una coordenada generalizada, puede ser: $q = x$, $q = \theta$, $q = r$, etc. Estas ecuaciones de E-L nos dan las ecuaciones de movimiento del sistema.

Modos normales

De tener un sistema de ecuaciones de movimiento con forma de M.A.S. vectorial, como el siguiente:

$$\ddot{\vec{r}} + \Omega^2 \, \vec{r} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \Omega_{11}^2 & \Omega_{12}^2 & \cdots & \Omega_{1n}^2 \\ \Omega_{21}^2 & \Omega_{22}^2 & \cdots & \Omega_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega_{n1}^2 & \Omega_{n2}^2 & \cdots & \Omega_{nn}^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

se pueden calcular sus modos normales de oscilación, que serían los autovalores de la matriz *cuadrada*, $\Omega_{n\times n}$. O sea, queremos encontrar los ω_i que cumplen la ecuación de valores propios:

$$\left(\Omega_{n\times n}^2 - \omega_i^2 I_{n\times n}\right) \vec{v}_i = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \Omega_{11}^2 - \omega_i^2 & \Omega_{12}^2 & \cdots & \Omega_{1n}^2 \\ \Omega_{21}^2 & \Omega_{22}^2 - \omega_i^2 & \cdots & \Omega_{2n}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega_{n1}^2 & \Omega_{n2}^2 & \cdots & \Omega_{nn}^2 - \omega_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{i,1} \\ v_{i,2} \\ \vdots \\ v_{i,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sistema de referencia no inercial

La ecuación de movimiento para el SRNI S' es

$$m\ddot{\vec{r}}' = \underbrace{\vec{F}}_{\text{reales}} - \underbrace{m\ddot{\vec{R}}}_{\text{traslacional}} - \underbrace{m\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}')}_{\text{centrífuga}} - \underbrace{2m\vec{\Omega} \times \dot{\vec{r}}'}_{\text{Coriolis}} - \underbrace{m\dot{\vec{\Omega}} \times \vec{r}'}_{\text{azimutal}},$$

donde

- $\vec{F}$ es la suma de las fuerzas **reales** aplicadas sobre la partícula;
- $\vec{R}$ vector que va desde el origen de S al origen de S';
- $\vec{\Omega}$ velocidad angular con la que giran los ejes **cartesianos** de S' c/r a los de S y
- $\vec{r}'$ vector que va desde el origen de S' hasta la partícula.