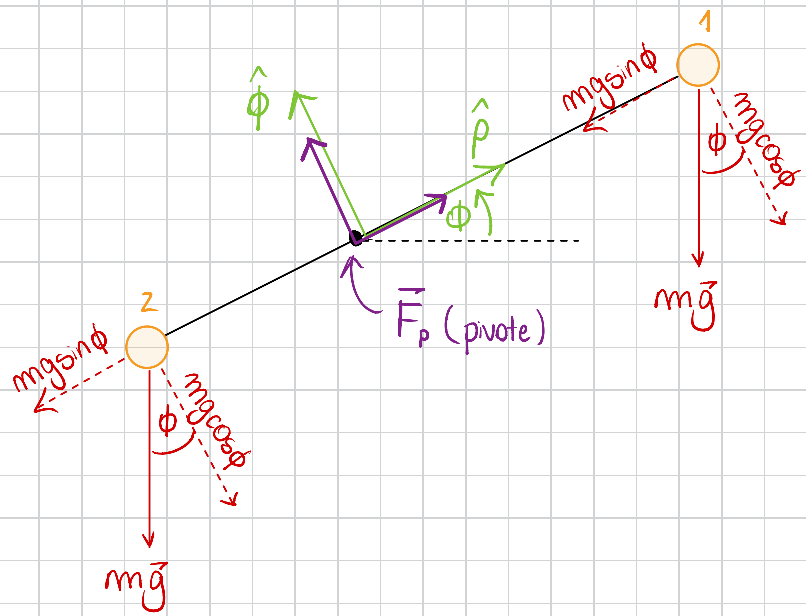
Control 2

P1



a) La posición de cada partícula es:

- $\vec{r}_1 = 2D\hat{\rho}$ ▫ $\vec{r}_2 = -D\hat{\rho}$

por lo que las velocidades son

- $\vec{v}_1 = 2D\dot{\phi}\hat{\phi}$ ▹ $\vec{v}_2 = -D\dot{\phi}\hat{\phi}$

así que el momentum ang. es

- $\vec{L}_1 = m4D^2\dot{\phi}\hat{k}$ ∘ $\vec{L}_2 = mD^2\dot{\phi}\hat{k}$

$$\therefore \boxed{\vec{L}_0 = 5mD^2\dot{\phi}\hat{k}}$$

La fuerza peso se escribe como (en ambos casos)

$$m\vec{g} = -mg\sin\phi\,\hat{\rho} - mg\cos\phi\,\hat{\phi}$$

así que los torques serían:

- $\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times m\vec{g} = 2D\hat{\rho} \times (-mg\sin\phi\,\hat{\rho} - mg\cos\phi\,\hat{\phi}) = -2mgD\cos\phi\,\hat{k}$
- $\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times m\vec{g} = mgD\cos\phi\,\hat{k}$

$$\therefore \boxed{\vec{\tau}_0 = -mgD\cos\phi\,\hat{k}}$$

b) Para la EoM usamos que

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\tau}_0 \iff 5mD^2\ddot{\phi} = -mgD\cos\phi$$

$$\iff \boxed{\ddot{\phi} + \frac{g}{5D}\cos\phi = 0} \qquad (1)$$

que podemos integrar usando $\ddot{\phi} = \dot{\phi}\dfrac{d\dot{\phi}}{d\phi}$

$$(1) \Rightarrow \int_0^{\dot{\phi}} \dot{\phi}\,d\dot{\phi} = -\frac{g}{5D}\int_{\pi/4}^{\phi} \cos\phi\,d\phi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\dot\phi^2}{2} = -\frac{g}{5D}\left(\sin\phi - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

así que en $\phi = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\dot\phi(\phi=0) = -\left(\frac{2g}{5D}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1/2}} \quad (2)$$

c) Calculemos el $\vec{R}_{CM}$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{1}{M_{tot}}\sum_{i=1}^{2} m_i \vec{r}_i = \frac{1}{2}\left(2D\hat\rho - D\hat\rho\right) = \frac{D}{2}\hat\rho$$

así que la aceleración es

$$\dot{\vec{R}}_{CM} = \frac{D}{2}\dot\phi\hat\phi \Rightarrow \ddot{\vec{R}}_{CM} = -\frac{D}{2}\dot\phi^2\hat\rho + \frac{D}{2}\ddot\phi\hat\phi$$

La única fuerza externa es la fuerza del pivote, que llamamos $\vec{F}_P$ (ver dibujo). Así que utilizando

$$M_{tot}\ddot{\vec{R}}_{CM} = \vec{F}^{ext}_{tot}$$

obtenemos

$$2m\left(-\frac{D}{2}\dot\phi^2\hat\rho + \frac{D}{2}\ddot\phi\hat\phi\right) = \vec{F}_P$$

y ocupando (1) y (2) obtenemos

$$\boxed{\vec{F}_P(\phi=0) = 2m\left(-g\frac{\sqrt{2}}{10}\hat\rho - \frac{g}{10}\hat\phi\right)}$$

P2

En el ítem a) y b) tenemos conservación de la energía mecánica

a) Tomemos que la potencial gravitatoria es 0 en la altura del punto C, por lo que en el instante inicial tenemos

$$E_A = \cancel{K_A}^{=0} + U_{tot,A} = \frac{1}{2}k\delta_{min}^2 + mgL$$

y cuando llega al punto B consideramos que llega con la velocidad justa, por lo que llega con velocidad nula

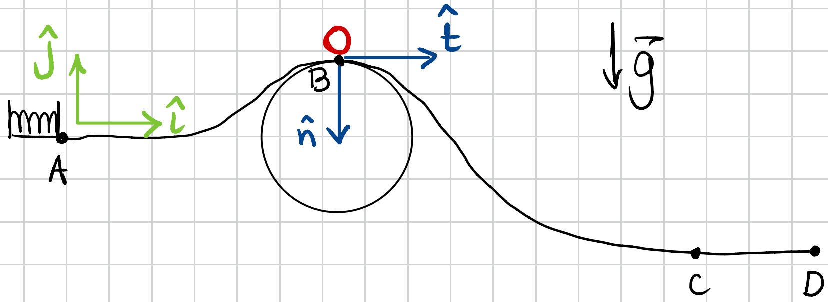
$$\Rightarrow E_B = \cancel{K_B}^{=0} + U_{tot,B} = mg2L$$

entonces, por conservación de la energía mecánica

$$E_A = E_B$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}k\delta_{min}^2 + mgL = 2mgL$$

$$\Rightarrow \boxed{|\delta_{min}| = \sqrt{\frac{2mgL}{k}}}$$



b) Si la partícula llega con mucha velocidad a B, se podría despegar. Ocupemos la indicación para un punto en torno a B, donde la aceleración sería

$$\vec{a}(\vec{r}_B) = \dot{v}_B\hat{t} + \frac{v_B^2}{L}\hat{n}$$

$$= \dot{v}_B\hat{\imath} - \frac{v_B^2}{L}\hat{\jmath}$$

y las fuerzas que se ejercen sobre la partícula en ese punto son:

- $\vec{F}_{mg} = -mg\hat{\jmath}$
- $\vec{N} = |\vec{N}|\hat{\jmath} \equiv N\hat{\jmath}$

Además, por conservación de la energía mecánica entre A y B podemos calcular la rapidez v_B con la que llega la partícula a B

$$E_A = E_B$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}k\delta_{max}^2 + mgL = \frac{1}{2}mv_B^2 + 2mgL$$

$$\Leftrightarrow v_B^2 = \frac{k}{m}\delta_{max}^2 - 2gL$$

Haciendo segunda Ley de Newton

$$m\vec{a} = \Sigma_i \vec{F}_i$$

$$\Leftrightarrow m\left(\dot{v}_B\hat{\imath} - \frac{v_B^2}{L}\hat{\jmath}\right) = -mg\hat{\jmath} + N\hat{\jmath}$$

y las ecs. de mov. escalares son:

$$\hat{\imath})\quad m\dot{v}_B = 0$$

$$\hat{\jmath})\quad -m\frac{v_B^2}{L} = -mg + N$$

Sabemos que la condición límite para que la partícula no se despegue es $N \stackrel{!}{=} 0$, entonces de $\hat{\jmath}$) obtenemos que

$$-m\frac{v_B^2}{L} = -mg$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{m}\delta_{max}^2 - 2gL = gL$$

$$\Rightarrow \boxed{|\delta_{max}| = \sqrt{\frac{3mgL}{k}}}$$

c) Calculemos con qué rapidez llega la partícula a C con conservación de la energía

$$E_A = E_C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}k\delta^2 + mgL = \frac{1}{2}mv_C^2$$

Recordamos que $W_{C\to D}^{tot} = K(r_D) - K(r_C)$, donde en el tramo $C-D$ solo ejerce trabajo el roce cinético, que tiene como expresión

$$\vec{F}_{roce} = -\mu|\vec{N}|\hat{t} = -\mu mg\hat{\imath}$$

y su trabajo se calcularía como

$$W_{C\to D}^{roce} = \int_{\vec{r}_C}^{\vec{r}_D} \vec{F}_{roce}\cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{x_C}^{x_D} (-\mu m g \hat{\imath}) \cdot dx\,\hat{\imath}$$

$$= -\mu m g \int_{x_C}^{x_D} dx$$

$$= -\mu m g \,(\underbrace{x_D - x_C}_{=L}) = -\mu m g L$$

así que

$$W^{tot}_{C\to D} = K(\cancel{x_D})^{=0} - K(x_C)$$

$$\Leftrightarrow \; -\mu m g L = -\frac{1}{2} m v_C^2$$

$$\Leftrightarrow \; \mu m g L = \frac{1}{2} k \delta^2 + m g L$$

$$\Rightarrow \; \boxed{|\delta| = \sqrt{\frac{2\mu m g L}{k} - \frac{2 m g L}{k}}}$$

P3

a) Primero determinemos las unidades de la energía cinética

$$[K] = \left[\frac{1}{2} m v^2\right] = [m][v]^2 = [kg]\frac{[m]^2}{[s]^2}$$

Como la energía potencial tiene las mismas unidades

$$\Rightarrow [U] = [kg]\frac{[m]^2}{[s]^2}$$

El primer término del potencial es como:

$$\left[\frac{A}{x^2}\right] = \frac{[A]}{[x]^2} = \frac{[A]}{[m]^2} \overset{!}{=} [kg]\frac{[m]^2}{[s]^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{[A] = [kg]\frac{[m]^4}{[s]^2}}$$

y para el segundo término hacemos lo mismo

$$\Rightarrow \boxed{[B] = [kg]\frac{[m]^3}{[s]^2}}$$

b) Debido a que nos dan el potencial $U(x)$ $\Rightarrow$ su fuerza asociada es conservativa

$\therefore$ Se conserva la energía mecánica

Expresamos la energía mecánica

$$E = K + U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{A}{x^2} - \frac{B}{x}$$

y derivamos, considerando que $\dot{E} = 0$ al ser cte.,

$$m \dot{x} \ddot{x} - \frac{2A}{x^3}\dot{x} + \frac{B}{x^2}\dot{x} = 0 \quad / : \dot{x}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} = \frac{2A}{m}\frac{1}{x^3} - \frac{B}{m}\frac{1}{x^2}}$$

c) Los ptos. de equilibrio se dan en $\ddot{x} = 0$ para algún x_0

$$\Rightarrow \frac{2A}{m}\frac{1}{x_0^3} - \frac{B}{m}\frac{1}{x_0^2} = 0$$

$$\Rightarrow 2A - Bx_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_0 = \frac{2A}{B}}$$

Y para ver que es estable calculamos la segunda derivada del potencial

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{2A}{x^3} + \frac{B}{x^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{6A}{x^4} - \frac{2B}{x^3}$$

que evaluado en $x = x_0$

$$\left.\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x}\right|_{x=x_0} = \frac{6A}{x_0^4} - \frac{2B}{x_0^3} = 6A\frac{B^4}{16A^4} - 2B\frac{B^3}{8A^3}$$

$$= \frac{3}{8}\frac{B^4}{A^3} - \frac{1}{4}\frac{B^4}{A^3}$$

$$= \frac{1}{8}\frac{B^4}{A^3} > 0 \quad \forall B \neq 0, B \in \mathbb{R} \wedge A > 0$$

Supongamos que es estable, entonces su frecuencia de pequeñas oscilaciones es:

$$\omega = \sqrt{\frac{U''(x_0)}{m}} = \sqrt{\frac{1}{8}\frac{B^4}{mA^3}} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{8mA^3}{B^4}}$$

d) Ocupemos conservación de la energía. Inicialmente tenemos

$$E_i = \cancelto{=0}{K_i} + U_i = U\left(\frac{x_0}{2}\right) = \frac{A}{(x_0/2)^2} - \frac{B}{x_0/2} = 4A\frac{B^2}{4A^2} - 2B\frac{B}{2A} = 0$$

y para el momento en que $x = x_0$

$$E_f = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{A}{x_0^2} - \frac{B}{x_0} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{B^2}{4A}$$

entonces

$$E_i = E_f$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{B^2}{4A}$$

$$\Rightarrow \boxed{|\dot{x}| = \sqrt{\frac{B^2}{2mA}}}$$